MEMORIE

DI MATEMATICA E DI FISICA

DELLA

SOCIETÀ ITALIANA DELLE SCIENZE

RESIDENTE IN MODENA

TOMO XXIV.

PARTE PRIMA.

MODENA

DAI TIPI DELLA R. D. CAMERA

MDCCCXLVIII.

INDICE

DELLE MEMORIE CONTENUTE

IN QUESTA PARTE I.ª DEL TOMO XXIV.

STATUTO

DELLA SOCIETÀ ITALIANA DELLE SCIENZE

RESIDENTE IN MODENA.

1848.

I. La Società Italiana delle Scienze residente in Modena è composta di *Quaranta* Socj Attuali, tutti Italiani, di merito maturo, e per Opere date in luce ed applaudite riconosciuto.

II. La Scienza della natura è il grande oggetto, che la Società medesima si propone. Pubblicherà pertanto, sotto il titolo di *Memorie di Matematica e di Fisica*, le produzioni di chiunque de' Socj vorrà render pubblico negli Atti Sociali il frutto de' proprj studj.

III. De' Quaranta Membri, uno sarà Presidente della Società, e la presidenza durerà sei anni. Questi può eleggersi e risiedere in una qualunque Città dell' Italia, ma in Modena esister deve sempre sotto gli ordini del Presidente una rappresentanza, e in Modena sempre si pubblicheranno gli Atti della Società.

IV. Avrà la Società un Segretario, ed un Vicesegretario amministratore residente in Modena. Il primo sarà partecipe di tutte le facoltà dei Quaranta, benchè non fosse uno d'essi, ed avrà diritto, non obbligo, di presentar Memorie da inserirsi negli Atti. Il secondo terrà il maneggio economico.

V. §. 1. Altra Classe vi avrà di Socj Emeriti in numero indeterminato. Essa è preparata a chiunque dei Quaranta, o

per età avanzata, o per abituale mancanza di salute, o per altro motivo, non producesse verun suo lavoro in tre consecutivi Tomi delle Memorie sociali.

§. 2. Ma se un Socio Attuale passasse negli Emeriti dopo aver posto otto Memorie ne' Tomi sociali, in tal caso seguiterà a godere, quantunque Emerito, tutte le prerogative di Attuale.

§. 3. Che se un Socio Emerito ponga Memorie in tre Tomi consecutivi, sarà restituito nel ruolo degli Attuali.

VI. Un'altra Classe, parimente indeterminata, comprenderà i Socj Onorarj. A questa saranno ascritti, previo l'assenso di ventuno almeno dei Quaranta, i Compilatori, eletti dal Presidente, degli elogj de' Socj Attuali defunti. Inoltre, esso Presidente potrà aggregare a questa classe, nel suo sessenio, due Soggetti, non più, che avessero operato cosa a prò della Società, onde meritassero d' esserne onorati particolarmente.

VII. Ed altra Classe avrà finalmente il titolo di Socj Stranieri, stabilita per distinguere ed onorare il merito delle Scienze in qualunque parte fuori d'Italia. Sarà composta di dodici Soggetti, a ciascun de' quali verrà esibito in dono un esemplare d'ogni Volume, che uscirà in luce, delle Memorie Sociali.

VIII. Le aggregazioni alle classi de' Socj Attuali e degli Stranieri si faranno nel modo seguente. Per ogni posto che rimanga vacante, dovrà il Presidente, col mezzo del Segretario proporre sei nomi a ciascuno de' Socj Attuali, il qual farà scelta d' uno, e lo indicherà per lettera al Segretario. Quel de' sei, che, entro il termine di due mesi dalla proposta, avrà più suffragj, s' intenderà aggregato, e la Compagnia sarà fatta opportunamente consapevole dell'acquistato Cooperatore. Qualora accadesse che due o più Candidati avessero parità di voti maggiori, il Presidente avrà il voto di preponderanza per decidere sulla scelta.

IX. All'elezione del Presidente saranno invitati li Socj Attuali con una lettera circolare del Segretario, al quale ognuno di essi farà tenere in iscritto la nomina del Socio da sè eletto a Presidente: e la pluralità de' voti, che arriveranno al Segretario,

dentro il termine di due mesi dopo la data del circolare invito, determinerà l'elezione, che dovrà esser dal Segretario annunziata ai Membri votanti.

X. Ciascheduno dei Quaranta ha facoltà d' inserire negli Atti una scoperta utile, un' importante produzione, anche di persona non aggregata ma Italiana, purchè tal produzione, o scoperta sia giudicata degna degli Atti stessi anche da un altro Socio, il qual venga destinato segretamente dal Presidente di volta in volta all' esame della cosa presentata, ed il suo nome (quando approvi) si stampi insieme con quello del presentatore.

XI. Di questi Autori non Socj dovrà il Presidente aggiungere i nomi, segnati con asterisco, ai sei che presenta, a tenor dell' Articolo VIII, per l' elezione d' un Socio attuale. Bensì questa nomina cesserà, dopo fatta sei volte, contate dalla pubblicazione d' ogni Memoria.

XII. Le Dissertazioni o Memorie da pubblicarsi ne' Volumi della Società, debbon essere scritte in lingua Italiana e in carattere chiaro. Il Segretario dovrà apporvi la data del recapito, acciocchè sieno stampate con essa in fronte e per ordine di tempo. Che se l'opera sia voluminosa, può l'Autore distribuirla in due o più parti pe' Tomi susseguenti.

XIII. Tutto ciò che è destinato pegli Atti dev' essere nuovo, inedito, importante, ed analogo all' indole scientifica di questi Volumi, che non ammette sfoggio d'erudizione, nè moltitudine di note e di citazioni.

XIV. I fogli stampati di ciascun Volume non dovranno eccedere il numero di cento. Le Memorie soprabbondanti resteranno in deposito pel Tomo susseguente, o saranno restituite agli Autori che le dimandassero. Bensì, nel caso di soprabbondanza, le Dissertazioni degli Autori non Socj dovranno cedere il luogo a quelle de' Socj.

XV. La Società non si fa risponsabile delle Opere pubblicate negli Atti. Ogni Autore dev' esser mallevadore delle cose proprie, come se le pubblicasse appartatamente.

XVI. Non permette peraltro la Società le invettive personali, e nè anche le critiche non misurate: sopra di che veglierà il Segretario, e ne farà inteso il Presidente per un acconcio provvedimento.

XVII. Il Socio Attuale, Autore d'una Memoria o d'un Elogio, avrà in dono cinquanta esemplari della sua produzione, con frontispizio apposito, e con la numerazion delle pagine ed il registro ricominciati. Ad ogni altro Autore saranno corrisposte dodici copie. Qualunque Autore ne desiderasse di più, non sarà aggravato d'alcuna spesa per conto della composizione tipografica.

XVIII. Nell'atto di queste spedizioni sarà trasmessa ai Socj, che avranno mandato il voto per le elezioni, la dimostrazione stampata del numero de' suffragj toccati ad ogni Candidato, senza il nome però de' votanti, e così ancora i conti stampati dell'amministrazione tenuta dal Vicesegretario amministratore.

XIX. Alle principali Accademie estere sarà offerto in dono un esemplare d'ogni Volume delle Memorie sociali, che andrà successivamente uscendo alla luce.

XX. I doveri del Presidente, oltre i già mentovati, sono: mantener l'osservanza dello Statuto; eleggere il Segretario ed il Vicesegretario, qualunque volta sia di bisogno; avere in governo e cura ogn'interesse della Società; rivedere, almeno una volta all'anno, i conti dell'amministrazione del Vicesegretario, alla validità de'quali fa d'uopo l'approvazione e sottoscrizione di mano propria del Presidente, e ragguagliar finalmente il Successore dello stato degli affari nell'atto di rinunziargli l'Uffizio.

XXI. Dopo il Presidente, il Segretario è la Persona propriamente deputata a mantener corrispondenza con tutti i Membri della Società, e quasi centro, ove debbono metter capo tutte le relazioni Sociali. Egli invia le patenti d'aggregazione; presiede alla stampa, ai Correttori di quella, ed all'incision delle tavole; prende cura delle spedizioni, e d'ogni altro interesse della Società, sempre però con l'approvazione del Presidente.

Egli deve pure tener registro d'ogni atto che importi; custodire i voti de' Socj per le elezioni, manifestandoli al Presidente ad ogni richiesta; e finalmente eseguir tutto ciò, che ne' precedenti articoli gli è addossato.

XXII. §. 1. Ad esempio delle principali Accademie, la Società Italiana delle Scienze avrà Membri pensionarj; e la pensione sarà d'annui zecchini ventiquattro, pagabili per metà allo spirare d'ogni semestre; non computate in verun caso, sia di morte, o di rinunzia, o di transito negli Emeriti, le frazioni di semestre.

§. 2. Saranno capaci della pensione li tre più anziani, e di permanenza non interrotta, nel ruolo de' Socj attuali; sin a tanto però che rimangano nel ruolo medesimo.

§. 3. Qualunque volta l'eguaglianza d'età accademica renda ambigua la scelta d'uno o più Pensionarj, sarà tolta l'ambiguità concedendo la preferenza alla maggior età naturale. Nel qual caso, il Segretario chiederà a ciascun de' coetanei come sopra, documento legale dall' epoca di sua nascita; e chi non lo faccia a lui pervenire entro mesi tre dopo la domanda, s'intenderà che rinunzj alla pensione.

§. 4. Due Socj (sia ciascun d'essi Attuale o Emerito) potranno inoltre goder la pensione, loro vita naturale durante, quando siano Autori ciascuno di dieci o più Memorie stampate, ne' Tomi sociali, il valor delle quali venga giudicato degno di tal premio dalla pluralità assoluta de' Socj attuali, a proposizione del Presidente; ovvero dalla pluralità relativa, quando si tratti di giudicare del merito relativo fra più Candidati.

§. 5. In ambi questi partiti le opinioni de' Socj resteranno sempre segrete, ed a sola notizia del Presidente e del Segretario: si pubblicherà unicamente il numero de'suffragj a favore di ciascun Candidato, siccome è prescritto per le elezioni nell' Articolo XVIII.

§. 6. Avranno titolo di *Pensionarj anziani* li tre del §. 2; di *Pensionarj giubilati* li due del §. 4.

§. 7. Potrà il Pensionario anziano passare a goder la pensione come giubilato, sotto le condizioni prescritte dal §. 4, e quando l' un de' due posti sia vacuo.

XXIII. A compensazion delle spese, che incontrano i Quaranta ne' porti di lettere per cagion della Società, ogni anno, nel mese di Gennajo sarà fatto l' esame, onde riconoscere i Membri Attuali, che avranno corrisposto a tutte le lettere del Presidente e del Segretario nel corso dell' anno antecedente, e dentro li rispettivi termini di tempo in esse specificati; ciascuno de' quali Socj avrà diritto di esigere zecchini tre dalla cassa della Compagnia.

XXIV. §. 1. Ogni volta, che la forza pecuniaria della stessa Società lo consenta, si esporranno Programmi al concorso pubblico. Risoluto ciò dal Presidente, il Segretario inviterà li Socj Attuali a proporre argomenti. Questi esser dovranno, o Fisici, o Matematici, o Fisico-Matematici, o in qualunque modo giovevoli a queste Scienze, e sempre applicabili ad utile general dell' Italia. Il Segretario li manderà stampati a ciaschedun Socio, pretermettendo quelli che uscissero dalle condizioni ora prescritte. Ogni Socio spedirà al Segretario il proprio suffragio per la scelta dell' argomento, e dichiarerà insieme qual premio reputi conveniente e qual tempo alla facitura ed alla presentazione delle Memorie. Quel tema che avrà più suffragj, sarà adottato: nel caso di parità di voti, deciderà la sorte.

§. 2. Tosto si comunicherà alla Compagnia l' argomento coronato, ed il numero de' suffragj riscossi da ogni argomento. Nell' atto stesso sarà richiesto ciaschedun Socio Attuale di nominarne tre (di qualunque Classe, purchè Italiani, e dimoranti attualmente in Italia); quelli cioe, che ciascuno, osservato il quesito, stimerà più adattati a giudicar le Memorie che compariranno al concorso. Quei tre, ne' quali concorrerà maggior numero di suffragj (l' uguaglianza rimovasi con la sorte), s' intenderanno destinati a pronunziare il giudizio.

§. 3. Nelle occasioni statuite sopra, saranno come non fatte le risposte de' Socj, qualora non giungano al Segretario dentro quaranta giorni dalla data della rispettiva Circolare di Lui.

§. 4. Il nome de' Giudici eletti rimarrà a sola notizia del Presidente e del Segretario: se non che ciascun di quelli sarà fatto consapevole della propria destinazione, con divieto di concorrere al Programma e di manifestarla a chicchessia: niun di loro saprà i suoi Colleghi. Se qualcuno ricusasse, sarà sostituito il prossimo inferiore in quantità di voti. Ogni Giudice riceverà, dopo pronunziato il giudizio, un decente compenso dell' esclusion dal concorso.

§. 5. Il Presidente, considerati i pareri de' Socj, lo stato economico della Società, e l' importanza di moltiplicare i Programmi, stabilirà la grandezza del premio, ed il termine da assegnarsi al concorso. Sarà tosto promulgato il problema per tutta Italia. Ogni Italiano, anche Socio, potrà concorrere: rimangono esclusi li soli tre Giudici. Le Memorie dovranno essere inedite, scritte in lingua Italiana, e pervenute nelle mani del Segretario entro il termine prescritto dal Programma: il nome degli Autori sarà occulto: ogni Memoria porterà in fronte un motto, e sarà accompagnata da un biglietto suggellato, contrassegnato al di fuori dal medesimo motto, e contenente, al di dentro in maniera occultissima, nome, cognome, patria, domicilio e profession dell' Autore. Il mancare a qualunque delle antecedenti condizioni fa perdere il premio.

§. 6. Tosto che il concorso sia chiuso, il Presidente, veduto il numero e l' estensione delle Memorie, definirà il tempo, entro il quale ogni Giudice dovrà pronunziare il giudizio. Allora il Segretario trasmetterà le Memorie, tutte unite, ad uno de' Giudici: da cui restituite che siano, e notificato il proprio giudizio al Segretario, saranno da questo fatte pervenire ad altro Giudice; quindi con le regole stesse al terzo. Ogni Memoria coronata da un Giudice, sarà stampata col nome dell' Autore. Il premio sarà dato a quella Memoria, che venga coronata da tre, o da due Giudici. Se tutti e tre li giudizj fossero discordi, si dividerà il premio fra le tre Memorie coronate. Lo stesso si farà tra due coronate, qualora un Giudice neghi il premio a tutte le Memorie, e gli altri due non siano concordi. Che se

fossero due li giudizj di negativa generale del premio, in tal caso il terzo giudizio non sarà di alcun valore: si notificherà alla Compagnia l' esito del giudizio, e si passerà alla pubblicazione di nuovo Programma coi metodi stabiliti sopra.

§. 7. Ma quando sia conferito il premio, il Segretario annunzierà prontamente ai Socj ed a tutta l' Italia il nome degli Autori delle Memorie coronate, indicando quello cui spetta il premio. Esse Memorie saranno stampate senza indugio; se ne spedirà un esemplare ad ogni Socio, 12 della propria a ciascun degli Autori coronati, 38 di più al premiato: i rimanenti si esporranno a vendita pubblica.

CATALOGO

DE' MEMBRI COMPONENTI LA SOCIETÀ ITALIANA DELLE SCIENZE

RESIDENTE IN MODENA

Anno 1848.

Rispettiva loro Residenza

PRESIDENTE

MARIANINI Dottore Stefano Cavaliere dell' ordine civile di Savoja, Professore di Fisica Sperimentale e Bibliotecario nella R. Università di Modena — *Modena.*

SOCJ ATTUALI.

ALESSANDRINI (Cavaliere Antonio) Professore di Anatomia comparata nella Pontificia Università di Bologna — *Bologna.*

AMICI (Cavaliere Gio. Battista) I. R. Astronomo nel Museo di Firenze — *Firenze.*

AVOGADRO (Conte Amedeo) Professore emerito di Fisica Sperimentale — *Torino.*

BELLANI (Canonico Angelo) Membro effettivo dell' I. R. Istituto Lombardo — *Milano.*

BELLI (Cavaliere Giuseppe) Professore di Fisica nella I. R. Università di Pavia, Membro effettivo dell' I. R. Istituto Lombardo — *Pavia.*

BERTOLONI (Cavaliere Antonio) Professore di Botanica — *Bologna.*

RESIDENZA

BIANCHI (Dottor Giuseppe) Direttore del R. Osservatorio Astronomico di Modena, Socio Pensionario giubilato — *Modena.*

BIZIO (Dottor Bartolomeo) Professore di Chimica nelle II. RR. Scuole tecniche di Venezia — *Venezia.*

BORDONI (Cavaliere Antonio) Professore attuale di Geodesia nella I. R. Università di Pavia — *Pavia.*

BUFALINI (Cavaliere Maurizio) Professore di Clinica Medica della Università di Pisa nelle Scuole Medico-Chirurgiche di compimento e perfezionamento in Firenze — *Firenze.*

CARLINI (Cavaliere Francesco) Direttore dell' I. R. Osservatorio astronomico di Milano — *Milano.*

CATULLO (Cavaliere Tommaso - Antonio) Professore di Storia naturale nella I. R. Università di Padova — *Padova.*

CHIAJE (DELLE) (Dottore Stefano) Professore di Storia naturale — *Napoli.*

FLAUTI (Cavaliere Vincenzo) Professore di Matematica e Segretario della R. Accademia delle Scienze di Napoli — *Napoli.*

FUSINIERI (Dottore Ambrogio) Membro dell' I. R. Istituto Veneto — *Vicenza.*

GIORGINI (Cavaliere Gaetano) Professore onorario della I. R. Università di Pisa — *Firenze.*

GIULIO (Cavaliere Carlo-Ignazio) Professore di Meccanica nella R. Università di Torino — *Torino.*

MAGISTRINI (Cavaliere Gio. Battista) Professore di Matematica nella Pontificia Università di Bologna, Socio Pensionario Anziano — *Bologna.*

MAINARDI (Dottor Gaspare) Professore di Calcolo sublime nella I. R. Università di Pavia — *Pavia.*

MARIANINI (Cavaliere Stefano) suddetto — *Modena.*

MATTEUCCI (Cavaliere Carlo) Professore di Fisica nella I. R. Università di Pisa — *Pisa.*

Residenza

MEDICI (Dottor Michele) Professore di Anatomia nella Pontificia Università di Bologna *Bologna.*

MELLONI (Cavaliere Macedonio) Direttore dello Stabilimento Fisico-meteorologico presso il Vesuvio a Napoli *Napoli.*

MORIS (Cavaliere Giuseppe) Professore di Botanica nella R. Università di Torino *Torino.*

MOSSOTTI (Cavaliere Ottaviano-Fabrizio) Professore di Fisica Matematica e Meccanica celeste nella I. R. Università di Pisa *Pisa.*

PANIZZA (Cavaliere Bartolomeo) Professore di Anatomia umana nella I. R. Università di Pavia *Pavia.*

PARETO (Marchese Lorenzo) Naturalista *Genova.*

PIANCIANI (Padre Gio. Battista) D. C. D. G., Professore di Fisica nel Collegio Romano *Roma.*

PIOLA (Don Gabrio) Membro effettivo dell' I. R. Istituto Lombardo *Milano.*

PLANA (Barone e Commendatore Giovanni) Professore di Matematica sublime nella R. Università di Torino, Socio Pensionario Anziano *Torino.*

RIDOLFI (Marchese Cosimo) Ministro dell' Interno di S. A. I. R. il Granduca di Toscana, Direttore Proprietario dell' Istituto Agrario di Meleto *Firenze.*

RUSCONI (Dottor Mauro) Zoologo, Membro effettivo dell' I. R. Istituto Lombardo *Pavia.*

SANTINI (Cavaliere Giovanni) Direttore dell' I. R. Osservatorio astronomico di Padova, Socio Pensionario Anziano *Padova.*

SAVI (Cavaliere Paolo) Professore di Zoologia nella I. R. Università di Pisa *Pisa.*

SISMONDA (Cavaliere Angelo) Professore di Geologia e Mineralogia nella R. Università di Torino *Torino.*

SPINOLA (Marchese Massimiliano) Naturalista *Genova.*

TENORE (Cavaliere Michele) Professore di Botanica nella R. Università di Napoli *Napoli.*

Residenza

TORTOLINI (Abate Barnaba) Professore di Calcolo sublime nella Romana Università della Sapienza *Roma.*

TRAMONTINI (Giuseppe) Professore di Geometria descrittiva e di Architettura nella R. Università di Modena *Modena.*

VICO (DE) (Padre Francesco) D. C. D. G. Direttore dell' Osservatorio Astronomico del Collegio Romano *Roma.*

MAGGI (Dottor Pietro) Ingegnere, Accademico Veronese *Verona.*

SANDRI (Dottor Giulio) Accademico Veronese *Verona.*

SOCIO EMERITO

INGHIRAMI (P. Giovanni d. S. P.) *Firenze.*

SOCJ ONORARJ

BERRUTI (Dottor Secondo) *Torino.*

BRAMBILLA (Professor Paolo) *Milano.*

CAGNOLI (Ottavio) *Verona.*

CAMPOSTRINI DE' NOBILI (Giovanni Antonio) Presidente dell' Accademia d' Agricoltura, Arti e Commercio di Verona *Verona.*

DIETRICHSTEIN (Sua Eccellenza Conte Maurizio), Gran Ciamberlano di S. M. I. R. A. l' Imperatore d' Austria, Presidente della I. R. Biblioteca di Vienna e del Museo Numismatico Antiquario, ec. *Vienna.*

FABENI (Dottor Vincenzo) *Padova.*

LANDI (Marchese Cav. Ferdinando) *Piacenza.*

LUGLI (Professor Giuseppe) *Modena.*

PALLETTA (Dottor Marco) *Milano.*

PEZZANA (Cavaliere Professor Angelo) D. Bibliotecario *Parma.*

	Residenza
RICCARDI (Professor Geminiano)	*Modena.*
ROVIDA (Cavaliere Professore Ab. Cesare)	*Milano.*
RUFFO (Sua Eccellenza Don Folco) Principe di Scilla	*Napoli.*
SCOPOLI (Conte Giovanni) Segretario perpetuo dell' Accademia di Agricoltura, Arti e Commercio di Verona	*Verona.*

SOCJ STRANIERI

ARAGO (Francesco Giovanni Domenico) Matematico e Fisico	*Parigi.*
BERZELIUS (Gio. Giacomo) Chimico	*Stokolm.*
BIOT (Gio. Battista) Fisico Matematico	*Parigi.*
CAUCHY (Agostino Luigi) Matematico	*Parigi.*
FARADAY (Michele) Chimico e Fisico	*Londra.*
FUSS (Paolo Enrico) Segretario della I. R. Accademia di Pietroburgo	*Pietroburgo.*
GAUSS (Carlo Federico)	*Gottinga.*
GAY LUSSAC, Fisico	*Parigi.*
HERSCHEL (Gio. Federico Guglielmo) Astronomo	*Londra.*
HUMBOLDT (Barone Alessandro) Fisico	*Berlino.*
OERSTED, Fisico	*Copenhaghen.*
THENARD (Barone) Chimico	*Parigi.*

Segretario

BIANCHI (Professor Giuseppe) suddetto	*Modena.*

Vice-Segretario Amministratore

RUFFINI (Avvocato Luigi)	*Modena.*

ELENCO DI LIBRI E OPERE

NEL BIENNIO 1846-1847 OFFERTE IN DONO

ALLA SOCIETÀ ITALIANA DELLE SCIENZE

che, pubblicandone i titoli, intende significarne agl' illustri Donatori la propria stima e riconoscenza.

Philosophical Transactions of the Royal Society of London for the year 1846. Un Tomo in 4°, in quattro parti.

Proceedings of the Royal Society. 1845. Numeri 62, 63, 64, 65, 66: in 8°.

Mémoires de l' Academie Imperiale des Sciences de Saint Petersbourg. 1.re Partie: Sciences mathématiques et physiques. T. IV, livraisons 1, 2. — Idem: Sciences naturelles. T. V, livraisons 3, 4. in 4°.

Mémoires presentées à l' Academie Imperiale de Saint Petersbourg. T. V, livraisons 1, 2, 3 — 4, 5, 6. 1844-1846. Idem. T. VI, livraison. 1.re in 4°.

Atti della R. Accademia Borbonica delle Scienze di Napoli. Vol. I, II, III, IV, V. P. I, V. P. II. Napoli - Stamperia Reale. in 4°.

Rendiconto delle Adunanze e de' lavori della R. Accademia delle Scienze di Napoli. T. 2°, 3°, 4°, 5°, ed i primi due bimestri del 6°. Napoli. 1843-1847.

Abhandlungen der Koeniglichen Bayerischen Akademie der Wissenschaften. Erste, zweite und dritte Abtheilungen des vierten Bandes. Monaco 1844-1847. Sei volumi in 4°.

Almanach der Koeniglichen Bayerischen Akademie der Wissenschaften für das Jahr 1845. Monaco: in 12°.

Bulletin der Koeniglichen Akademie der Wissenschaften. Monaco; in 4°. Dal N. 51 al 57 inclus. del 1844, dal N. 1 al 52 inclus. del 1845, dal N. 1 al 77 del 1846 (completo), e dal N. 1 al 7 inclus. del 1847.

Memorie della Società Agraria della Provincia di Bologna. Vol. III. Bologna. 1847.

Memorie della Società Medico-Chirurgica di Bologna. Vol. IV. in 4°.

Bullettino delle Scienze mediche. Bologna in 8°. Fascicoli di Novembre e Dicembre 1846, e dal Gennajo al Settembre inclus. 1847.

Bulletin des Séances de la Société Vaudoise des Sciences naturelles. N. 15.

Report of the finteenth meeting of the British Association for the Advancement of science; heald at Cambridge in june 1845. London. 1846.

Commentarj dell' Ateneo di Brescia per gli anni 1842-1843. Brescia 1844-1845.

Esercitazioni scientifiche e letterarie dell'Ateneo Veneto. Vol. VI, fasc. 1°. Venezia. 1847.

Discorsi letti nell' Ateneo Veneto nella pubblica Adunanza del giorno 11 Luglio 1847, dedicati alla IX Riunione degli Scienziati Italiani dall' Ateneo stesso.

Tributo della R. Accademia di scienze lettere ed arti di Modena alla Memoria di Francesco IV. Parte I. Modena. in 4°.

Kupffer A. T. Annuaire magnétique et météorologique du Corps des Ingenieurs des mines de Russie. Année 1843. Saint Petersbourg. 1845. Due volumi in 4°. — Idem. Année 1844. S. Petersbourg. 1846. Due simili volumi.

Idem. Note relative à la tempèrature du sol et de l' air, aux limites de la culture des céréales. S. Petersbourg. in 4°.

Bellavitis Professore Giusto. Memoria sul più facile modo di trovare le radici reali delle equazioni algebraiche. - Coi tipi del Seminario di Padova. 1846. in 4°.

Considerazioni sul movimento di un liquido che discende in modo perfettamente simmetrico rispetto ad un asse verticale. - Venezia, coi tipi Antonelli. in 4°.

Considerazioni sulle nomenclature chimiche, sugli equivalenti chimici, e su alcune proprietà che con questi si collegano. - Coi tipi del Seminario di Padova. 1847. in 4°.

Bellavitis Professore Giusto. Saggio di Geometria derivata; Memoria estratta dal Vol. IV dei Nuovi Saggi della I. R. Accademia di scienze lettere ed arti di Padova. in 4°.

Soluzioni grafiche di problemi geometrici del 1°. o del 2°. grado, trovate col metodo delle equipollenze. Venezia, coi tipi Antonelli; in 4°.

Sopra un oligocronometro; Dimostrazione di alcuni teoremi; Poche esperienze sulla coesione dell'acqua.— Articoli tolti dagli Atti delle Adunanze dell' I. R. Istituto Veneto; in 8°.

Zantedeschi. Relazione dell' influenza delle forze elettriche e magnetiche sulla luce ed il calorico. — Dal fasc. 8°. T. II della Raccolta fisico-chimica Italiana. Venezia. 1847.

Della Teoria fisica delle macchine magneto-elettriche ed elettro-magnetiche. — Dal fasc. 11°. T. I. Racc. sudd. Venezia. 1846.

Lettere 2ª e 3ª sul magneto-telluro-elettrico in Italia. — Dal fasc. 8°. T. II. Racc. sudd. Venezia. 1847.

Memorie tre: 1ª. Della termocromia: 2ª. Della atermocrosi del sal gemma e della sua termocrosi col nero di fumo: 3ª. Del potere diatermico e atermico dei corpi. — Dai fasc. 6° e 7°. T. II. Racc. sudd. Venezia. 1847. in 8°.

Smee Alfred, F. R. S. The Potatoe Plant, its uses and properties: togheter with the cause of the present Malady. London. 1846. Un Vol. in 8°.

The extension of that disease to other plants, the question of famine arsiing therefrom, and the best means of averting that calamity. London. 1847.

Wagner D.r A. Andeutungen zur charaktistik des organischen Lebens nac seinem Auftreten in den verschiedenen Erdperioden. Monaco. 1845. in 4°.

Pruner D.r Franz. Die Ueberbleibsel der altaegyptischen Menschenrace. Monaco. 1846. in 4°.

Ernst von Lasaulx. Ueber das studium der Griechischen und Roemischen Alterthuemer. Monaco. 1846. in 4°.

Georg Phillips. Ueber die Ordalien bei den Germanen in ihrem zusammenhange mit der Religion. Monaco. 1847. in 4°.

Cauchy Bar. Augustin. Exercices d' Analyse et de Physique mathématique. T. IV. Paris. 1847. Livraison 37.

Fallenberg L. R. Fragmens de Recherches comparées sur la nature constitutive de differentes sortes de fibrine du cheval dans l' état normal et pathologique. Berne. 1841.

Pezzana Cav. Angelo. Storia della Città di Parma: continuazione. T. III. 1847. in 4°.

Bellardi Luigi. Monografia delle Pleurotome fossili del Piemonte. Torino. Stamperia Reale. 1847. in 4°.

Flauti Cav. Vincenzo. Discorso pronunziato nella solenne pubblica tornata della Società Reale Borbonica nel dì 30 Giugno 1847. in 4°.

Sismonda D.r Eugenio. Il Cav. Giuseppe Genè: Articolo necrologico della *Gazzetta Piemontese* del 17 Luglio 1847. in 8°.

Synopsis methodica animalium invertebratorum Pedemontii fossilium (exceptis speciebus ineditis). Editio altera, accuratior et aucta. Augustae Taurinorum. Typis Regiis. MDCCCXLVII.

Bordè Prof. Francesco. Elogio storico del Cavaliere Leopoldo Nobili. Modena. 1847. in 8°.

P. Tanzini delle Scuole Pie. Cenni biografici del P. Eusebio Giorgi. Firenze. 1847. in 8°.

Medici Prof. Michele. Osservazioni anatomiche e fisiologiche intorno l'apparecchio sonoro della Cicala. Bologna. 1847. in 8°.

Bellani Can. Angelo. Memoria su i boschi. Milano. 1846.

Brighenti Prof. Maurizio. Elogio storico di Giuseppe Venturoli recitato all' Accademia delle scienze dell' Istituto di Bologna. Bologna. 1847.

Capocci Ernesto. Annuario del R. Osservatorio Astronomico di Napoli per l' anno 1846. Napoli. in 16°.

Delle Chiaje Prof. Stefano. Notizia su due gimnoti elettrici dall' America recati vivi in Napoli.

Fusinieri D.r Ambrogio. Discussioni sopra varj oggetti di Filosofia della Fisica, in risposta al Prof. Carlo Conti. 1845. in 4°.

Sulle ipotesi del Prof. Melloni circa il calore raggiante. 1848. in 4°.

Grimelli Prof. Geminiano. Osservazioni ed esperienze intorno al metodo dell' assopimento animale ed umano, con scientifiche e pratiche applicazioni mediche e chirurgiche. Modena. 1847. in 8°.

Marianini Stefano. Storia di una sensazione che provava una paralitica, quando veniva elettrizzata durante il corso mensile. Modena. 1846. in 4°.

Di alcune paralisi curate colla elettricità voltaica: Memoria seconda. Modena. 1846. in 4°.

Sopra l'azione magnetizzante delle correnti elettriche momentanee: Memorie VII, VIII e IX. Modena. 1845-1847. in 4°.

Bianchi Giuseppe. In onore alla memoria di Francesco IV. Articoli tre accademici di vario argomento. Modena. 1846. in 4°.

Il Catajo celeste: Visione. Modena. 1847. in 8°.

Moretti. Difesa ed illustrazione delle Opere botaniche di Pier Andrea Mattioli, Botanico del XVI Secolo: continuazione, 1845, pagine 32; e continuazione, 1846, di pag. 32. in 8°.

Namias. Delle condizioni di Venezia in ciò che risguarda la vita e la salute dell' uomo: Cenni del Dott. Giacinto Namias, Membro effettivo dell' I. R. Istituto Veneto. Venezia. 1847, per Antonelli. in 4°.

Rivato Ab. Antonio. Per le solenni esequie dell' Ab. Giuseppe Zamboni, Professore di Fisica e Matematica applicata, fatte nella Cattedrale il giorno XI Dicembre 1846, Elogio funebre. Verona. 1847. in 8°.

Taddei. Manuale di Chimica organica e Fisica medica ad uso degli Alunni medici e chirurghi della Scuola di complemento e perfezionamento dell' I. R. Ospedale di S. Maria Novella di Firenze. Firenze. 1845.

Tortolini Ab. Barnaba. Sopra la rettificazione dell'elissi sferica, e sulla divisione de' suoi archi. Roma. 1846. in 8°.

Nota sopra l'equazione e proprietà di una curva piana, luogo geometrico delle perpendicolari abbassate da un punto fisso sopra le tangenti di una curva data. Roma. 1847. in 8°.

Sopra alcune superficie curve derivate da una data superficie e di genere concoidali. Roma. 1847. in 8°.

INTORNO ALLE EQUAZIONI FONDAMENTALI DEL MOVIMENTO DI CORPI QUALSIVOGLIONO, CONSIDERATI SECONDO LA NATURALE LORO FORMA E COSTITUZIONE.

MEMORIA

DEL SIG. DOTTOR GABRIO PIOLA

Ricevuta adì 6 Ottobre 1845.

Avviene non di rado che i nuovi ritrovamenti mediante i quali fu accresciuto qualche ramo delle Matematiche applicate, non appajano subito nel concetto e nella esposizione sgombri da superfluità o lungaggini. La complicazione de' procedimenti analitici può giungere anche a tale da non parer più possibile l'andare innanzi: ed è invece allora che talvolta si scopre un punto di vista più generale, si concentrano molte particolarità e si forma una teorica compendiosa e così bene assicurata da infondere lena per ulteriori progressi. Sarebbe desiderabile che questo avvenisse anche per le ultime aggiunte fatte da moderni Geometri alla Meccanica razionale: e quanto a me direi che il modo di riuscirvi l'abbiamo nelle nostre mani: resta a vedere se altri vorranno essere del mio avviso.

Scrissi più volte non parermi necessario il creare una nuova Meccanica, dipartendoci dai luminosi metodi della Meccanica analitica di Lagrange, per rendere ragione dei fenomeni più intimi del moto dei corpi: potersi piegare que' metodi a

tutte le esigenze della moderna fisica matematica: essere anzi questa la vera via da tenersi, perchè, sicura ne' suoi principj, conduce a sicure conseguenze, e promette ulteriori e grandiose conquiste. Però mi stettero e mi stanno anche attualmente contro autorità ben rispettabili, davanti alle quali io dovrei darmi per vinto, se la bontà della causa avesse ad argomentarsi dal valor scientifico del suo patrocinatore. Ma comecchè io non posso rinunciare alla mia persuasione, credetti convenisse fare un nuovo tentativo, riunendo in questa Memoria i miei pensieri sull' argomento e procurando di esporli con tale accuratezza da conciliar loro l' attenzione dei Geometri. Perocchè non dissimulo accorgermi ora che ne' precedenti miei scritti alcune idee non furono esposte con sufficiente maturità: ve ne ha qualcuna troppo spinta, ve ne ha qualch' altra ancora troppo timorosa: certe parti di quelle scritture potevano essere ommesse, perchè non tendenti direttamente allo scopo: e a più forte ragione quelle altre che quantunque necessarie conseguenze di supposizioni allora tenute per vere, stante l' interpretazione da me data a qualche passo d' insigne Autore, non mi sentirei ora più di ripetere e di sostenere dopo che quelle supposizioni mi apparvero false o per lo meno dubbie (Vedi il già detto nel T. VI del Giornale dell' I. R. Istituto Lombardo pag. 328.).

La ragione in forza della quale, anche più che per l' eleganza e grandiosità de' processi analitici, io preferisco agli altri tutti in Meccanica i metodi di Lagrange, si è perchè veggo in essi l'espressione di quella saggia filosofia insegnataci da Newton che parte dai fatti per salire alle leggi, e quindi discendere alla spiegazione degli altri fatti. Fondare le formole primordiali sopra ipotesi anche benissimo ragionate, ma che non ricevono conferma se non per una lontana corrispondenza con alcuni fenomeni osservati, ottenuta scendendo dal generale al particolare, è a parer mio non cautelarsi abbastanza, è un tornare in certa maniera alla filosofia di Cartesio o di Gassendo: giacchè il magistero della natura nei minimi spazj nei quali noi pretendiamo cogliere il lavorio delle azioni molecolari, sarà forse

assai diverso da quello che noi possiamo rappresentarci per mezzo di immagini procurate dai nostri sensi contemplando gli effetti in grande. E fosse pur anche piccolissima questa diversità: una deviazione affatto insensibile nei primi elementi che bisogna intendere moltiplicati a milioni a miliardi prima di venire a dimensioni sensibili, può essere il lontano principio di notabili errori. Ma coi metodi di Lagrange mettendosi a calcolo non le azioni delle forze interne, ma i loro effetti, i quali sono ben noti e nulla risentono dell' incertezza intorno al modo d'agire delle cause, non può restarci alcun dubbio sull' esattezza dei risultati. È vero che l' immaginazione nostra riesce meno soddisfatta, perchè non le si concede di salire fino alle primissime origini dei moti intestini nei corpi: ma che perciò? Ben largo compenso di questa privazione abbiamo nella sicurezza delle deduzioni. Io quì potrei ripetere, se non fossero assai noti, i savj documenti coi quali Newton richiamava alla scienza dei fatti i filosofi che prima di lui aveano lasciato alla immaginazione un troppo libero slancio.

E notisi che io non intendo per questo proscrivere i dettati della Fisica moderna intorno alla costituzione interna dei corpi e alle azioni molecolari; penso anzi recar loro il maggior de'servigj. Quando le equazioni degli equilibrj e dei moti siano stabilite sopra principj inconcussi, per aver messo a calcolo effetti certi piuttosto che ipotetiche espressioni di forze, credo lecito cercare di ricostruire da capo quelle equazioni mediante supposizioni intorno a queste azioni molecolari: e se ci riesca per tal modo di ridurci a risultamenti identici con quelli che sappiamo in anticipazione esser veri, credo che quelle ipotesi acquisteranno così tal grado di probabilità quale non potrebbero a gran pezza sperare altrimenti. Allora la Fisica molecolare potrà essere incoraggiata a tirare innanzi colle sue deduzioni, purchè, fatta esperta dalle aberrazioni di alcuni antichi pensatori troppo arditi, si risovvenga di cercar tratto tratto nell'osservazione quei richiami che stanno là per avvertirla se mai deviasse.

Taluno potrà quì obbiettarmi essere questa una sapienza assai vecchia, sì da non valere la pena ch' io me ne facessi nuovamente promulgatore: ma che le mie belle teoriche vengono poi meno alla prova, giacchè il Poisson ha assicurato (Mémoires de l' Institut de France T. VIII. pag. 361, 400; Journal de l' Ecole polyt. cah. XX. pag. 2) che la maniera lagrangiana di scrivere gli effetti delle forze per mezzo di equazioni di condizione (quella maniera quì proclamata siccome l' unica idonea a tener conto dei fatti anzichè delle cause) è troppo astratta; che vi ha bisogno di una scienza più vicina alla realtà delle cose; che quella analisi estesa ai corpi della natura deve essere rigettata come insufficiente. Rispondo che io pure riconosco star quì il nodo della quistione. Essere poi o no una millantería l' asserzione che i metodi di Lagrange bastino a tutto, ed abbiano anche in se tale potenza che s'agguagli alle possibili ulteriori ricerche, questo è ciò che dovrà decidersi più tardi, e innanzi darmi torto, si troverà giusto di lasciarmi esporre tutto ciò che ho raccolto a mia difesa. Spero mettere in chiaro nella seguente Memoria che l' unico motivo pel quale la Meccanica Analitica parve restar addietro nella trattazione di alcuni problemi, fu che Lagrange nello scrivere dell' equilibrio e del moto di un corpo solido, non è disceso fino ad assegnare le equazioni spettanti a un solo punto qualunque di esso. Se questo avesse fatto, e lo potea benissimo senza uscire dai metodi insegnati nel suo libro, sarebbe giunto prontamente alle stesse equazioni cui arrivarono con molta fatica i Geometri francesi del nostro tempo, e che ora servono di base alle nuove teoriche. Però quello ch' egli non fece, perchè la morte lo tolse alle scienze prima che avesse finita la sua grand' opera, può esser fatto da altri: ed ecco l' assunto intorno al quale arrischiai qualche tentativo fino dagli anni 1832 e 1835 (Vedi la Memoria *della Meccanica dei corpi naturalmente estesi* inserita nel 1° Tomo degli Opuscoli matematici e fisici; Milano, Giusti, 1832: e l'altra *Sulla nuova analisi per tutte le quistioni della Meccanica molecolare* inserita nel Tomo XXI di questi Atti.).

Nel mentre poi colla seguente Memoria mirerò di nuovo allo scopo ora divisato, procurerò di raggiungerne anche un altro. Dimostrata rigorosamente in più luoghi è l' equazione generale della Meccanica, scritta colla notazione del calcolo delle variazioni, pel caso di un sistema qualunque discreto di corpi considerati siccome punti in cui siano concentrate diverse masse, animati da forze esterne attive e soggetti anche a forze interne attive e passive. Ma, partire da essa e passare alle formole spettanti all' equilibrio e al moto di corpi estesi secondo le tre dimensioni, è questo un passo assai duro per chi voglia veder le cose con chiarezza e non si accontenti d' una mezza intelligenza. Uno de' miei primi tentativi intorno a questo argomento può vedersi nella Memoria *Sui principj della M.ª A.ª* di Lagrange pubblicata in Milano fin dall' anno 1825, dove ho esposte in proposito alcune idee giuste, ma con accompagnamenti o troppo complicati o superflui. Vi tornai sopra nella Memoria posta nel T. XXI di questi Atti, e credetti avervi fatto un notabile guadagno, introducendo non poche semplificazioni ed abbreviazioni: ma poscia mi accorsi della possibilità di ulteriori miglioramenti che farò entrare nella presente. Di grande vantaggio è sempre la cura di chiarir bene le idee intorno alla natura delle diverse quantità analitiche e allo spirito dei metodi: e che anche da questo lato rimanesse qualche cosa a fare, ne lascerò il giudizio ai lettori intelligenti.

Lo studioso s' accorgerà ch' io mi proposi anche altri fini col presente lavoro, avendovi stabilite varie formole che possono servir di punto di partenza per indagini ulteriori. Di uno non voglio tacere ed è quello di ridimostrare (Capo V), adottando le idee meglio assicurate forniteci dalla fisica moderna intorno ai fluidi, le equazioni fondamentali del loro moto. Imperocchè essendomi io occupato a lungo in altri miei scritti dei problemi della idrodinamica (Vedi i due primi volumi delle Memorie dell' I. R. Istituto Lombardo) mi si obbiettò potere quelle mie deduzioni essere in difetto, visto quanto ebbe a dire il Poisson intorno alle equazioni dell' idrodinamica ordinaria.

Ora io credetti poter dimostrare che le considerazioni del Geometra francese in questa circostanza sono corse troppo innanzi, che non ostanti le sue obbiezioni, la teorica fondamentale del moto de' fluidi rimane a tutta prova quale D'Alembert ed Eulero l' hanno stabilita, quale fu riprodotta dallo stesso Fourier coll'aggiunta di altra equazione dedotta dalla teorica del calore, alla quale però non è necessario aver riguardo nelle questioni più ovvie della scienza delle acque. Per questa parte la presente Memoria serve di sostegno e di complemento alle altre testè ricordate.

CAPO I.

NOZIONI PRELIMINARI (*).

1. Bisogna distinguere con accuratezza il corpo dallo spazio da esso occupato. Questo spazio è sempre un' estensione continua che possiamo concepire formata dalla congerie di infiniti punti geometrici (così denominando noi per comodo gli elementi dell' estensione) posti in assoluto contatto gli uni degli altri, senza alcuna benchè minima interruzione. Non badiamo a quel dilemma che dice: o questi punti sono inestesi, e allora la loro aggregazione, per quanto vogliasi accumulata, non darà mai l' estensione: o sono estesi, e allora un numero infinito di essi darebbe sempre uno spazio infinito. Secondo la vera metafisica degli indivisibili insegnataci da Cavalieri, conviene considerare dapprima lo spazio diviso in un grandissimo numero di parti, la cui somma torni a restituire lo stesso spazio, ma però parti dotate di estensione. In appresso si passa a

(*) Non intendo raccogliere in questo capitolo d' introduzione tutte le nozioni preliminari di meccanica, giacchè suppongo di scrivere per lettori istrutti; ma quelle sole, che pur sono molte, ove ho dovuto introdurre modificazioni per potere adoperare i metodi di Lagrange sopra corpi considerati siccome composti di molecole disgiunte. Nella stessa occasione ho fatto entrare in questo Capo alcuni preliminari analitici, dei quali avrò bisogno in progresso.

concepire inoltrata all' indefinito questa divisione di parti in altre più piccole di loro, fino a ridurle, se fa bisogno, al dissotto di ogni termine apprezzabile dai sensi e dalla immaginazione. Abbiamo qui a fronte l' uno dell' altro due principj opposti che si compensano. Una somma di termini positivi cresce continuamente accrescendo il numero di tali termini, e diminuisce, diminuendo continuamente la grandezza di ciascuno di essi. Senza dubbio se, ragionando di quella somma, vogliamo badare ad uno solo dei suddetti principj, perdendo di vista l'altro, ne ridurremo il valore all' infinito o allo zero: ma bisogna farli camminare di pari passo, e non disgiungerli mai, di modo che l'accrescimento continuo del numero dei termini compensi sempre il loro attenuarsi continuo. E questa operazione può da noi concepirsi spinta oltre ogni limite, e fin entro a quei recessi dove hanno origine le affezioni delle curve, le prime sfumature nelle quantità che contengono qualche elemento variabile. Pretendere di condurre l'immaginazione a vedere, quasi testimonio oculare, anche in queste profondità il compensarsi reciproco dei due sunnominati principj, è voler cosa non concessa all' uomo nello stato attuale. Ma ciò che è indiscernibile all' immaginazione, è, oso dire, chiaro alla ragione, la quale conosce che a quelle profondità arriva la potenza del calcolo. In queste considerazioni, per dirlo di passaggio, sta quanto basta per poter rispondere ad ogni difficoltà mossa contro le applicazioni del calcolo integrale.

2. L' esistenza di un corpo è un fenomeno che si avvera in varie parti dello spazio. Dove esiste un corpo, *alcuni non tutti* i punti geometrici dello spazio da esso occupato sono dotati di proprietà particolari, delle quali sarebbe quì fuori di luogo indagar la natura, bastando il dire essere quelle proprietà che accompagnano l' essenza della materia; chiameremo questi punti privilegiati sparsi fra i geometrici, *punti materiali o fisici*. Bisogna concepire tali punti materiali disgiunti fra loro e stanti a distanze piccolissime in presenza gli uni degli altri. Anche qui non ci tratteremo a discutere come avvenga che

questi punti materiali disgiunti si tengano fra loro a distanza e non si addossino o si disperdano. Vi ha chi con profonde vedute intorno alle leggi di forze attrattive o repulsive emananti dai punti materiali, cercò dare spiegazione di questo fatto; ma tali pensamenti sarebbero ora troppo anticipati. Per noi che quì non miriamo se non a formarci idee chiare, basta ammettere il fatto senza indagarne la causa.

3. La distribuzione dei punti materiali fra i geometrici per costituire i diversi corpi (e quì intendiamo sempre corpi che in tutte le loro parti siano della stessa natura) può aver luogo in infinite maniere. Possiamo rappresentarcela all'immaginazione per modo che le minime distanze fra detti punti siano più piccole da una parte che dall'altra, e passino per molte grandezze variabili secondo diversissime leggi. Per formarcene però un concetto matematico, conviene partire come da termine di confronto, da una disposizione regolare, che forse non avrà mai luogo in natura, ma che noi possiamo benissimo immaginare: epperò nella Memoria inserita nel Tomo XXI, la chiamammo *disposizione ideale*. Riferendo i diversi punti materiali di un corpo a tre assi ortogonali di coordinate x, y, z, suppongo le coordinate x, y, z di uno qualunque di questi punti, funzioni di tre coordinate ortogonali a, b, c per lo stesso punto in una distribuzione antecedente uniforme, nella quale gl' incrementi piccolissimi delle coordinate a, b, c per passare d' uno in altro punto materiale fossero costanti per ciascun asse, eguali fra loro ed espressi da una comune lettera σ di grandezza arbitraria, ma sommamente piccola. Immagino che la diversa struttura dei corpi quali ce li dà la natura, non consista se non nella diversa forma delle funzioni $x(a, b, c)$; $y(a, b, c)$; $z(a, b, c)$ per ciascun corpo. Quando io retrocedo coll' immaginazione a considerare i punti fisici dei differenti corpi (del legno per esempio, o dell' oro) nella disposizione antecedente ideale, me li rappresento tutti in eguali circostanze: passando poi da quella alla disposizione reale, penso che una certa forma delle funzioni $x(a, b, c)$; $y(a, b, c)$; $z(a, b, c)$ mi darà la disposizione

dei punti fisici nel legno, un' altra forma mi darà quella dei punti fisici nell' oro, e così via via.

4. Ripeterò quello che disse Newton in un caso simile: *mathematicus dumtaxat est hic conceptus*. Questa maniera di concepire la struttura dei differenti corpi, è quanto basta al Matematico che vuol metterne in equazione gli equilibrj e i movimenti. Pei bisogni del Fisico è permesso andare innanzi, e quei punti materiali chiamarli molecole tutte eguali fra loro, ancora estese, diversamente configurate, impenetrabili, inalterabili; però di tale esilità chè non sia possibile ai nostri sensi, fossero anche le cento volte più perfetti, notarvi distinzioni di parti. Può anche immaginare ciascuna di queste molecole composta di un egual numero di particelle (chiamate atomi) di altri corpi semplici, particelle non separabili se non per mezzo di un altro genere di forze diverse da quelle che si considerano in Meccanica, cioè di forze chimiche: e quindi respingere a questa seconda sorta di particelle quella assoluta invariabilità che il Meccanico può supporre addirittura nelle molecole. Il Metafisico va, se gli piace, ancora più innanzi: per lui uno di questi atomi resistenti invincibilmente alle forze fisiche e chimiche, può ingrandirsi ancora quasi un mondo, sì che sia lecito considerarvi per entro un numero quanto vuolsi grande di punti ridotti adesso affatto inestesi, da cui emanino forze che li tengano a distanze sempre inalterabili da agenti creati. Lasceremo da parte quest' ultima speculazione, forse vera, ma per noi non necessaria: e quanto al mentovato concetto fisico dei punti materiali, lo richiameremo più innanzi quando cercheremo di ravvicinare la nostra maniera di vedere a quella degli Scrittori moderni. Per ora tutto ciò che riterremo dell'averne fatto cenno, sarà l'arbitrio di usare promiscuamente il vocabolo di *molecole*, invece di punti fisici o materiali.

5. Considerando i corpi fatti di molecole disgiunte, diventa assai chiara l' idea della densità, che si fa maggiore, dove le molecole sono più ravvicinate, minore dove sono più diradate, costante in quei corpi che dappertutto sotto eguali porzioni del

loro volume contengono egual numero di molecole, variabile in quei corpi dove ciò non succede.

Scolio. Per poco che si rifletta, si viene a comprendere, che i corpi possono essere a densità costante anche con diversa disposizione relativa delle loro molecole, bastando che sotto eguali porzioni di volume il numero delle molecole sia dappertutto il medesimo, il che può avverarsi in infiniti modi. Fra questi ne citerò due, l'uno dei quali è puramente ideale, l'altro reale. L' ideale è quello spettante alla distribuzioue descritta più sopra al N. 3. in relazione con tre assi ortogonali di coordinate a, b, c: il reale è quello della distribuzione che prendono le molecole dei corpi ridotti allo stato liquido. Farò vedere fra poco che noi possiamo aver di mira il secondo, e ridurlo mentalmente al primo, senza che ciò porti alcuna alterazione nelle formole analitiche. Nella Memoria inserita nel Tomo XXI e anche dopo, ho studiato a lungo per capire come stia la collocazione rispettiva delle molecole nei liquidi: ma debbo confessare, che avendo trovato modo di concepirla chiaramente in un piano, non mi è riuscito lo stesso intento anche nello spazio a tre dimensioni (V. Giornale dell' Istituto Lombardo. T. VI. pag. 328: Nota.). Ora però sono giunto a comprendere (e lo mostrerò fra poco) che si può saltar di piè pari questa difficoltà, si può cioè far di meno del conoscere la vera disposizione rispettiva delle molecole nei liquidi in riposo, bastando il sapere essere essa tale da risultarne dappertutto la densità costante.

Se s' immagina che le molecole di un corpo a densità costante siano diradate in uno spazio doppio, triplo, ecc., restando però sempre a densità costante, la densità si dirà risultare la metà, un terzo, ecc. di quella di prima; e viceversa, se il volume sia ridotto la metà, un terzo, ecc. comprendendo lo stesso numero di molecole, la densità si dirà ridotta doppia, tripla, ecc. Adunque le differenti densità costanti di uno stesso corpo sono fra loro in ragione inversa dei volumi occupati da un egual numero di molecole. Una di queste densità suole assumersi per

unitaria, ed è quella che corrisponde ad uno stato del corpo in certe determinate circostanze fisiche, stato che si è convenuto di prendere a base dei confronti.

6. La somma di tutte le molecole di un corpo, fatta astrazione dalle distanze che le separano, chiamasi la *Massa* del corpo. Però l'espressione numerica di questa massa non può venire formata dal numero di dette molecole, il quale in ogni estensione finita è sempre immensamente grande: ma dal rapporto di detto numero grandissimo all' altro pure grandissimo delle molecole dello stesso corpo comprese entro l'unità di volume, e distribuitevi colla densità costante unitaria. Si sa che il rapporto anche di due numeri grandissimi può essere espresso in poche cifre, talora semplicissime. Se pertanto prendasi per unitaria la massa compresa nell' unità di volume colla densità unitaria, la massa M in un volume V, quando la densità costante del corpo è ancora l' unitaria, ci sarà data dall' equazione $M = V$; e se la densità costante è Γ volte l' unitaria (Γ numero che spesso è una frazione) sarà espressa dalla formola $M = \Gamma V$.

7. Prima di procedere innanzi sarà bene intrattenerci a spiegare quello che si è soltanto accennato al N. 3., cioè che considerando le $x(a,b,c)$; $y(a,b,c)$; $z(a,b,c)$ (coordinate relative allo stato vero di un corpo qualunque) siccome funzioni delle a, b, c coordinate spettanti a quella distribuzione ideale nella quale le molecole sono rappresentate agli angoli di tanti cubi immensamente piccoli in contatto gli uni degli altri, possiamo anche dire queste a, b, c essere le coordinate delle diverse molecole in uno stato antecedente liquido da cui si immaginassero tolte per passare a quello che hanno nel corpo naturale anzidetto. E questa riduzione giova, perchè questo stato antecedente ideale non è allora più fuori della natura: le idee vengono meglio fissate: e se ne ha un deciso vantaggio principalmente nella Idrodinamica. Tanto razionalmente quanto analiticamente si riconosce permesso lo scambio. Mentalmente niente ci vieta concepire entro uno stesso volume le molecole

del liquido togliersi a quella disposizione in cui sono (qualunque essa sia) per mettersi ai vertici degli angoli degli ideati cubetti, e starvi tutte, nessuna eccettuata, estendendosi a tutto ancora il volume: qualche mancanza nei cubetti alle superficie conterminanti il detto volume, non fa difetto, attesa l'estrema piccolezza di essi, il che si farà manifesto per ciò che a momenti soggiungeremo. Così procedendo, la grandezza σ del lato di tutti quei cubi, la quale sulle prime poteva parere indeterminata, viene a ricevere una determinazione, abbisognando che essa sia nè più nè meno di quella che ci vuole affinchè sotto lo stesso volume del liquido stia un egual numero di molecole ridotte alla disposizione dei cubi. Una tale grandezza minima σ è un elemento singolare e di frequentissimo uso anche per le cose posteriori.

Analiticamente poi quello scambio non produce alcuna alterazione sensibile. Dette p, q, r le coordinate di una molecola quando il corpo è nello stato liquido con densità costante, e dette a, b, c le coordinate della stessa molecola quando la disposizione molecolare s'intende essere quella anzidetta dei cubi, le p, q, r (badisi bene) non possono differire dalle a, b, c se non per differenze minori o eguali al lato σ di quei cubi, talchè sarebbero

$$(1) \qquad a = p + \sigma l; \quad b = q + \sigma m; \quad c = r + \sigma n;$$

essendo l, m, n coefficienti numerici non maggiori dell' unità; nè farebbe difetto quand' anche fossero due o tre volte più grandi, il che non credo possa mai addivenire. Ora l'assumere le a, b, c invece delle p, q, r non può portare alcun divario apprezzabile nei valori delle formole analitiche, le quali, supponendo fatta la sostituzione dei valori (1), possono immaginarsi svolte secondo le potenze positive della σ, e cangiate in serie i cui primi termini sono que' medesimi che si avrebbero mettendo le vere coordinate p, q, r, e gli altri possono francamente trascurarsi perchè moltiplicati colle potenze di σ. Vedremo più volte nel seguito di questa Memoria il bisogno di trascurar

termini che essendo moltiplicati per la σ, danno valori di quantità inapprezzabili dai nostri sensi: siccome quindi si tratta di un principio d'uso frequente, gioveranno le seguenti riflessioni.

Scolio. L'ammissibilità del principio si riferisce alla condizione attuale dell' uomo collocato, dice Pascal nei suoi Pensieri (Parte 1ª. Art. IV.) a immense distanze tanto dall'infinito quanto dallo zero: distanze nelle quali è permesso immaginare tanti ordini di grandezze, di cui ciascuno sia come un tutto relativamente a quello che lo precede, e quasi un niente relativamente a quello che lo segue. Quindi risulta che quelle stesse quantità asserite siccome trascurabili per noi senza tema di errore, potrebbero essere grandi e tutt'altro che trascurabili per esseri i quali fossero, per esempio, adatti a percepire le proporzioni che reggono l'organizzazione degli animaletti infusorj. Per tali esseri quei corpi che a noi pajono continui, potrebbero apparire come mucchj di sassi: l'acqua, che per noi è un vero liquido, potrebbe comparire come per noi il miglio o un ammasso scorrevole di pallini di piombo. Ma anche per tali esseri ci sarebbero poi i veri fluidi, rispetto ai quali varrebbero per essi le stesse conseguenze che noi deduciamo rispetto all'acqua. Vi hanno dunque quantità che riduconsi nulle assolutamente per tutti gli ordini di esseri, come gli elementi analitici adoperati nel calcolo integrale, e vi hanno quantità nulle solo per esseri di un cert' ordine, che non lo sarebbero per altri, come alcuni elementi che entrano nelle considerazioni di Meccanica. Io, educato da Brunacci alla scuola di Lagrange, ho sempre impugnato l'infinitesimo metafisico, ritenendo che per l'analisi e la geometria (se si vogliono conseguire idee chiare) vi si deve sempre sostituire l'indeterminato piccolo quanto fa bisogno: ma ammetto ciò che potrebbe chiamarsi l'infinitesimo fisico, di cui è chiarissima l'idea. Non è uno zero assoluto, è anzi tal grandezza che per altri esseri potrebbe riuscire apprezzabile, ma è uno zero relativamente alla portata dei nostri sensi, pei quali tutto quanto è al disotto di loro, è precisamente come non esistesse.

Concludiamo pel caso attuale. Delle due maniere indicate al N. 3. per la distribuzione delle molecole onde ottenere la densità costante, possiamo dire essere quella dello stato liquido la precedente colle coordinate a, b, c, da cui immaginiamo trasportati i corpi allo stato attuale colle coordinate $x(a, b, c)$; $y(a, b, c)$; $z(a, b, c)$: e nondimeno trattare analiticamente le a, b, c come se la disposizione delle molecole fosse quella dei cubi. Quantunque poi questa proposizione, in forza degli addotti ragionamenti, sia a mio parere sufficientemente provata, mi ricorderò di recarne più tardi una riconferma.

8. Vediamo di formarci l' idea e l' espressione della densità variabile, e per riuscirvi immaginiamo di assistere a quella operazione mediante la quale le molecole si tolgono alla disposizione (a, b, c) di densità costante assunta come unitaria, per passare alla disposizione reale $[x(a, b, c), \; y(a, b, c), \; z(a, b, c)]$. In quella prima immaginiamo la massa divisa entro uno spazio qualunque in tanti parallelepipedi kij (di lati k, i, j) comprendenti ciascuno un certo numero eguale di quei cubetti descritti al principio del N.° precedente, e in contatto gli uni degli altri. Nel trapasso alla disposizione reale quelle piccole masse eguali in conseguenza di un muoversi delle molecole piccolissimo, e che altera le loro reciproche distanze, saranno venute a disporsi sotto volumi $v_1, v_2, v_3, \ldots v_n$ succedentisi gli uni accanto agli altri, i quali non saranno eguali fra loro, come lo erano quei primi parallelepipedi, e saranno anche di diversa configurazione relativamente alle superficie che li comprendono. Immaginiamo ora che in ciascuno di questi volumetti così stabiliti, le molecole (le quali sono per tutti in egual numero) senza uscire da essi tornino ad una disposizione che dia la densità costante. Poichè i volumi $v_1, v_2, v_3 \ldots\ldots$ sono fra loro diversi, le anzidette densità costanti in ciascuno, saranno diverse fra loro, e diverse dalla densità unitaria primitiva, ed espresse (Vedi N. 5. sul fine) dalle frazioni

$$(2) \qquad \frac{kij}{v_1}; \quad \frac{kij}{v_2}; \quad \frac{kij}{v_3}; \ldots\ldots\ldots \frac{kij}{v_n}.$$

Il corpo che risulterebbe dopo l'ideata riduzione delle molecole, sarebbe bensì un corpo a densità cangiante di tratto in tratto, ma non il vero corpo a densità variabile. Nondimeno noi possiamo col pensiero impicciolire continuamente di grandezza e crescere di numero i primitivi parallelepipedi kij, e i corrispondenti volumetti $v_1, v_2, v_3 \ldots . v_n$ che colla loro somma compongono il volume intero del corpo. Ci si presenta allora alla mente una serie indefinita di corpi a densità cangiante, che occupano tutti uno stesso volume V, nei quali i salti di densità d'uno in altro volume diventano sempre più frequenti, e una stessa densità persevera sempre più poco. Il corpo a densità variabile è quello, lo stato del quale viene sempre meno imperfettamente rappresentato dai corpi dell'anzidetta serie più che c' innoltriamo in essa, e sta come limite di tali successivi avvicinamenti.

9. Fissata l'idea della densità variabile, cerchiamone l'espressione. Il volumetto v_n sia quello contenente la massa che nella disposizione precedente ideale occupava il parallelepipedo kij il cui vertice più vicino all'origine degli assi avea le coordinate a, b, c. È manifesto che le dimensioni del volume v_n dipenderanno dalle forme delle funzioni $x(a,b,c)$, $y(a,b,c)$, $z(a,b,c)$ che regolarono la collocazione rispettiva delle molecole nel trapasso alla disposizione reale. Esso è in generale espresso dalla formola

$$v_n = \int dx \int dy \int dz \,. \quad 1$$

dovendosi intendere le integrazioni definite secondo i valori che prendono le x, y, z alle superficie conterminanti il volume: ma non si vede a prima giunta come effettuare tale operazione analitica. Si arriva però all'intento trasformando detto integrale triplicato nell' altro equivalente preso per le variabili a, b, c delle quali conosciamo i limiti che si riferiscono alle dimensioni del parallelepipedo kij. Abbiamo per tal modo, giusta la nota teorica per la trasformazione degli integrali triplicati (*)

(*) Lacroix. Traité ec. T. II. n. 531. pag. 208; ovvero Bordoni. Lezioni ec. T. I. pag. 380.

$$v_n = \int_a^{a+k} da \int_b^{b+i} db \int_c^{c+j} dc \,.\, \mathrm{H} \tag{3}$$

essendo H un sestinomio come segue

$$\begin{aligned} \mathrm{H} = & \frac{dx}{da}\frac{dy}{db}\frac{dz}{dc} - \frac{dx}{db}\frac{dy}{da}\frac{dz}{dc} \\ & + \frac{dx}{db}\frac{dy}{dc}\frac{dz}{da} - \frac{dx}{dc}\frac{dy}{db}\frac{dz}{da} \\ & + \frac{dx}{dc}\frac{dy}{da}\frac{dz}{db} - \frac{dx}{da}\frac{dy}{dc}\frac{dz}{db}. \end{aligned} \tag{4}$$

È facile svolgere l' integrale triplicato dell' equazione (3) in una serie ordinata secondo gli aumenti k, i, j: e ciò per la doppia ragione che questi aumenti sono indeterminati, e che i limiti delle successive integrazioni sono indipendenti gli uni dagli altri.

Infatti chiamiamo per un momento $\mathrm{F}(c)$ l' integrale $\int dc.\mathrm{H}$ indefinito ed incompleto, avremo

$$\int_c^{c+j} dc \,.\, \mathrm{H} = \mathrm{F}(c+j) - \mathrm{F}(c) = j\,\frac{d\mathrm{F}}{dc} + \frac{j^2}{2}\frac{d^2\mathrm{F}}{dc^2} + \text{ec.}$$

ossia, siccome $\frac{d\mathrm{F}}{dc} = \mathrm{H}$,

$$\int_c^{c+j} dc \,.\, \mathrm{H} = j\,\mathrm{H} + \frac{j^2}{2}\frac{d\mathrm{H}}{dc} + \text{ec.}$$

Ci è quindi lecito cambiare il valore di v_n dato dalla (3) nel seguente

$$v_n = \int_a^{a+k} da \int_b^{b+i} db \left(j\,\mathrm{H} + \frac{j^2}{2}\frac{d\mathrm{H}}{dc} + \text{ec.} \right)$$

e come abbiamo potuto fare sparire un segno integrale, collo stesso artifizio faremo sparire anche gli altri due, e ci risulterà

$$v_n = kij\,\mathrm{H} + \frac{k^2 ij}{2}\frac{d\mathrm{H}}{da} + \frac{ki^2 j}{2}\frac{d\mathrm{H}}{db} + \frac{kij^2}{2}\frac{d\mathrm{H}}{dc} + \text{ec.}$$

Sostituendo questo valore di v_n nell' ultima delle espressioni (2), e dividendo i due termini della frazione per kij, avremo

$$(5) \qquad \frac{1}{H + \frac{k}{2}\frac{dH}{da} + \frac{i}{2}\frac{dH}{db} + \frac{j}{2}\frac{dH}{dc} + \text{ec.}}$$

per l' espressione della densità costante entro il volumetto v_n. Mentre col successivo impicciolirsi dei volumetti $v_1, v_2, \ldots\ldots v_n$, veniamo, come sopra abbiamo descritto, ad accostarci continuamente al vero corpo a densità variabile, il valore della precedente frazione (5), a motivo dell' impicciolimento continuo delle k, i, j, s' accosterà esso pure come a limite alla frazione $\frac{1}{H}$: quindi detta Γ l' espressione della densità variabile, avremo

$$(6) \qquad \Gamma = \frac{1}{H}.$$

È questa una formola capitale, di cui ci occorrerà tratto tratto l' applicazione, e da cui si deducono prontamente conseguenze che altrimenti si avevano con molto stento. Viene essa dall' avere considerata la composizione dei corpi come procedente dopo una primitiva disposizione ideale ed uniforme delle loro molecole, quale si ha nello stato di fluidità: e dall'aver riguardate le coordinate x, y, z dello stato reale come funzioni delle coordinate a, b, c spettanti a quello stato precedente (*).

Aggiungiamo una considerazione già fatta da Lagrange, cioè che dalle equazioni

$$(7) \qquad x = x(a, b, c); \quad y = y(a, b, c); \quad z = z(a, b, c)$$

possono intendersi dedotte le inverse

$$(8) \qquad a = a(x, y, z); \quad b = b(x, y, z); \quad c = c(x, y, z)$$

per cui si abbiano le a, b, c in funzioni delle x, y, z: e che quindi ogni funzione $K(a, b, c)$ delle a, b, c può essere riguardata ridotta ad una forma $K(x, y, z)$ in funzione delle x, y, z

(*) Nella Memoria inserita nel T. XXI di questi Atti ho dato una dimostrazione della formola (6) diversa dalla presente e molto più lunga: essa era dedotta da considerazioni geometriche che poi conobbi poter evitare, adottando, come qui feci, la teorica dei limiti.

mediante la sostituzione dei valori (8). Adunque la densità $\Gamma(x, y, z)$ nel punto (x, y, z) è quella funzione delle coordinate dello stato reale che si ottiene dal secondo membro della (6) ove s'immaginino eseguite tutte le derivazioni indicate nel sestinomio (4) e ad operazioni finite sostituiti i valori (8).

10. È ora facile avere l'espressione della massa di un corpo a densità variabile per mezzo delle dimensioni ch'esso ha nel suo stato reale. La massa M che sta nel volume V di detto corpo, stava in un diverso volume, quando la disposizione delle molecole era la precedente ideale colla densità unitaria, e allora sarebbesi avuto (Vedi N. 6)

$$(9)\qquad M = \int da \int db \int dc \,.\, 1$$

intendendo le integrazioni definite giusta i valori delle a, b, c alle superficie conterminanti il volume. Mettendo invece dell' unità il valore equivalente ΓH (equazione (6)), la formola precedente diventa

$$M = \int da \int db \int dc \,.\, H\Gamma$$

dalla quale, per la teorica della trasformazione degli integrali triplicati più sopra ricordata, si può passare immediatamente all' altra

$$(10)\qquad M = \int dx \int dy \int dz \,.\, \Gamma(x, y, z)$$

dove adesso i limiti delle integrazioni si hanno pei valori che prendono le x, y, z ai limiti delle superficie nello stato reale del corpo. Se avessimo rapportato lo stato reale del corpo non ad uno stato antecedente di densità costante unitaria, ma di densità costante espressa da un numero μ ci sarebbe risultato moltiplicato per questo stesso numero μ tanto il secondo membro della formola (6) quanto quello della formola (10).

Possiamo osservare che nella formola (10) l'effetto della funzione Γ introdotta sotto l'integrale triplicato, si è quello di rettificare un errore che senza di essa ci risulterebbe, non potendo più la massa avere per espressione la stessa espressione del volume, come nella formola (9): infatti la massa è ancora

la stessa e il volume è cambiato. Di più: la struttura del calcolo integrale suppone costanti gli aumenti delle variabili adoperate nelle integrazioni, mentre le x, y, z che passano d' una in altra molecola dello stato reale, non hanno veramente i loro aumenti eguali: pare quindi che si commetta un errore coll' usare delle x, y, z come si farebbe di variabili semplici in formole integrali. Non è vero: l' introduzione del fattore Γ corregge questo errore, cioè fa sì che si abbiano risultati giusti anche adoperando come variabili semplici le x, y, z che in realtà non lo sono. È questa una osservazione la quale potrà ricorrere frequentemente nello studio della seguente Memoria.

11. Sogliono i Matematici considerare talvolta la materia, non configurata secondo un volume a tre dimensioni ma in una linea o in una superficie; si hanno allora i sistemi chiamati lineari o superficiali. Veramente essi non sono che astrazioni, ed è perciò che la maggiore attenzione del Geometra deve sempre rivolgersi ai sistemi a tre dimensioni. Nondimeno ne è utile la considerazione, giacchè le diverse analisi per le tre sorte di sistemi offrono riscontri che le rischiarano, e di più servono anche ad applicazioni fisiche, quantunque però sempre in via di approssimazione, non essendo in natura mai il corpo, rigorosamente parlando, destituito di una o di due dimensioni.

Quantunque tanto pei sistemi lineari quanto pei superficiali ci abbisognino speciali considerazioni affine di rappresentarci la distribuzione delle molecole, e formarci l' idea della densità e la misura della massa, pure sono esse affatto analoghe alle surriferite pei sistemi a tre dimensioni: quindi le esporrò in maniera succinta.

Pel sistema lineare comunque curvilineo, conviene considerare le molecole nello stato reale, ivi trasportate da uno stato antecedente ideale nel quale erano tutte collocate in una linea retta parallela all' asse delle ascisse, e distanti fra loro d' intervalli piccolissimi eguali. Chiamata a l' ascissa variabile per una molecola generica nello stato antecedente (le altre due coordinate figurano fra le costanti), le coordinate rettangole

x, y, z della stessa molecola nello stato reale debbono riguardarsi funzioni della a,

$$(11) \qquad x = x(a); \quad y = y(a); \quad z = z(a)$$

funzioni che mediante la loro forma regoleranno la distribuzione della materia nello stato reale, e dopo l'eliminazione della a ci daranno le due equazioni della curva geometrica in cui le molecole sono distribuite.

Consideriamo nello stato antecedente molte piccole parti eguali k di quella retta, comprendenti un egual numero di molecole, le quali nello stato reale occuperanno gli archetti $v_1, v_2, v_3, \ldots . v_n$ diseguali fra loro. Se anche quì concepiamo che in ciascuno di questi archetti le piccole masse eguali tornino a mettersi con distanze eguali fra le loro molecole (distanze che saranno però diverse per ciascun archetto) la densità nell'archetto v_n rapportata alla primitiva sarà espressa da

$$(12) \qquad \frac{k}{v_n}$$

Abbiamo per v_n tre espressioni: la prima

$$v_n = \int dx \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}$$

considerando le y, z funzioni di x ed essendo i limiti dell' integrale determinati dai valori di x per le due estremità di detto arco. La seconda

$$v_n = \int_a^{a+k} da \cdot \frac{dx}{da} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}$$

quando si trasforma l' integrale e lo si prende per la variabile a di cui la x è funzione. La terza

$$(13) \qquad v_n = k \frac{dx}{da} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2} + \frac{k^2}{2} \cdot \frac{d \cdot \frac{dx}{da} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}}{da} + \text{ec.}$$

quando si riduce l'integrale in serie, come si è fatto al N. 9. Dalle espressioni (12) e (13) caviamo mediante una riduzione al limite analoga, ma più semplice, dell'usata al N. 9, la densità variabile Γ pel punto (x, y, z) espressa dalla formola

$$(14) \qquad \Gamma = \frac{1}{\frac{dx}{da}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}}$$

ovvero, poichè

$$(15) \qquad \frac{dy}{da} = \frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{da}; \qquad \frac{dz}{da} = \frac{dz}{dx}\cdot\frac{dx}{da}$$

$$(16) \qquad \Gamma = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{dx}{da}\right)^2+\left(\frac{dy}{da}\right)^2+\left(\frac{dz}{da}\right)^2}};$$

il secondo membro di questa equazione ci presenta la densità Γ come funzione di a, ma ci è sempre lecito considerarla funzione di x, immaginando sostituito ad a il suo valore $a = a(x)$ cavato dalla prima delle (11).

Quanto alla misura della massa M, le tre formole che corrispondono successivamente a quelle del N. 9, sono le seguenti

$$M = \int da \,.\, 1$$

$$M = \int da \,.\, \frac{dx}{da}\,\Gamma\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}$$

$$(17) \qquad M = \int dx \,.\, \Gamma\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}.$$

La prima dà la massa misurata dal volume nella distribuzione primitiva, intendendo che i limiti dell' integrale siano i valori della a per le due estremità di quella retta: la seconda è ancora la prima ove si è introdotta sotto al segno integrale un' espressione eguale all' unità in forza dell' equazione (14): la terza è quella che si ottiene trasformando l' integrale in maniera che sia espresso mediante le variabili proprie dello stato reale.

12. Pei sistemi superficiali comunque curvi, le molecole nello stato antecedente ideale si suppongono distribuite in un piano che può prendersi parallelo a quello delle x, y, e così uniformemente che distino fra loro di piccoli intervalli eguali secondo i due assi, ovvero, ciò che torna lo stesso, siano collocate agli angoli di tanti quadratelli eguali che ricoprano tutta quella superficie piana, potendo però lasciare (il che non fa difetto) qualche manco vicino alle linee curve da cui può intendersi limitata la figura piana. Chiamate a, b le coordinate variabili della molecola generica in tale stato antecedente, le coordinate rettangole x, y, z della stessa molecola nello stato reale, debbono riguardarsi funzioni delle a, b,

$$(18) \qquad x = x(a, b); \quad y = y(a, b); \quad z = z(a, b);$$

funzioni che mediante la loro forma regoleranno la distribuzione della materia per entro alla superficie curva dello stato reale. Si può intendere che vengano eliminate fra esse le due variabili a, b, e così ottenuta una equazione fra le x, y, z, che sarà quella della superficie del sistema.

Consideriamo nello stato antecedente tanti piccoli rettangoli ki che comprendano un egual numero di molecole: passando allo stato reale, queste piccole masse eguali si metteranno in tante porzioncelle $v_1, v_2, v_3 \ldots\ldots v_n$ di superficie curva, le quali, generalmente parlando, saranno diverse fra loro, e in nessuna di esse la densità sarà costante. Però immaginando che in ciascuno di questi spazietti le molecole si rimettano in una distribuzione uniforme, avremo un sistema superficiale a densità cangiante, che si avvicinerà sempre più al sistema vero, quanto più i mentovati spazietti cresceranno di numero e sceméranno di grandezza. La densità nello spazietto v_n rapportata alla primitiva dello stato ideale, sarà espressa da

$$(19) \qquad \frac{ki}{v_n}.$$

Abbiamo per v_n tre espressioni. La prima

$$v_n = \int dx \int dy \,.\, \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2}$$

intendendo z funzione di x, y, e supponendo le integrazioni definite secondo i valori che prendono le x, y alle linee conterminanti lo spazietto superficiale. La seconda espressione di v_n ci è data trasformando, secondo la nota teorica, il precedente integrale duplicato in un altro preso per le a, b di cui le x, y sono funzioni e risulta

$$v_n = \int_a^{a+k} da \int_b^{b+i} db \,.\, \mathrm{K}$$

essendosi posto per abbreviare

$$(20) \qquad \mathrm{K} = \left(\frac{dx}{da}\frac{dy}{db} - \frac{dx}{db}\frac{dy}{da}\right)\sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2}.$$

Da ultimo otteniamo

$$(21) \qquad v_n = ki \,.\, \mathrm{K} + \frac{k^2 i}{2}\frac{d\mathrm{K}}{da} + \frac{k i^2}{2}\frac{d\mathrm{K}}{db} + \text{ec.}$$

svolgendo in serie l' integrale duplicato nella maniera indicata al N. 9.

Dalle espressioni (19) e (21) ci risulta colla teorica dei limiti la densità variabile Γ pel punto (x, y, z) del sistema superficiale, espressa da

$$(22) \qquad \Gamma = \frac{1}{\mathrm{K}}.$$

Noteremo che ricavando i valori di $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$ dalle due equazioni

$$(23) \qquad \frac{dz}{da} = \frac{dz}{dx}\frac{dx}{da} + \frac{dz}{dy}\frac{dy}{da}\,; \qquad \frac{dz}{db} = \frac{dz}{dx}\frac{dx}{db} + \frac{dz}{dy}\frac{dy}{db}\,;$$

e sostituendoli nella formola (20), essa riducesi alla più simmetrica

$$(24) \quad \mathrm{K} = \sqrt{\left(\frac{dx}{da}\frac{dy}{db} - \frac{dx}{db}\frac{dy}{da}\right)^2 + \left(\frac{dz}{da}\frac{dx}{db} - \frac{dz}{db}\frac{dx}{da}\right)^2 + \left(\frac{dy}{da}\frac{dz}{db} - \frac{dy}{db}\frac{dz}{da}\right)^2}\,;$$

per la quale la (22) ci presenta la densità Γ funzione delle a, b: ma ci è sempre lecito considerarla funzione di x, y, immaginando sostituiti ad a, b i loro valori

$$(25) \qquad a = a(x, y); \quad b = b(x, y)$$

dedotti dalle prime due delle equazioni (18).

Quanto alla misura della massa M, le formole che corrispondono successivamente a quelle del N. 9. sono le seguenti:

$$M = \int da \int db \,.\, 1$$

$$M = \int da \int db \,.\, \left(\frac{dx}{da}\frac{dy}{db} - \frac{dx}{db}\frac{dy}{da} \right) \Gamma \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2}$$

$$(26) \qquad M = \int dx \int dy \,.\, \Gamma \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2} \,.$$

Di esse la prima dà la massa misurata dal volume, nella distribuzione primitiva: la seconda è ancora la prima, messavi sotto il doppio segno integrale, $K\Gamma$ in luogo dell'unità per effetto della formola (22), avendo sostituito per K il valore (20): e da essa si passa alla terza in forza della teorica della trasformazione degli integrali duplicati, avendosi così un integrale espresso mediante le variabili proprie dello stato reale.

13. Dalle formole ottenute in questi ultimi numeri possono dedursi prontamente alcune conseguenze alle quali altrimenti non si arriva se non con qualche stento. Prima però farò osservare che quando si considerano i corpi nello stato di moto, le coordinate x, y, z di un punto qualunque del corpo alla fine del tempo t, si debbono considerare funzioni di coordinate p, q, r corrispondenti a quel punto al principio del tempo, e di t. Le coordinate p, q, r poi dello stato reale al principio del tempo debbono considerarsi funzioni delle a, b, c coordinate di uno stato antecedente ideale. Nondimeno è lecito saltar via la considerazione delle coordinate intermedie p, q, r e invece di contemplare forme come la

$$x[\,p(a,b,c),\; q(a,b,c),\; r(a,b,c),\; t\,]$$

proporci a dirittura le forme $x(a, b, c, t)$, $y(a, b, c, t)$, $z(a, b, c, t)$ quali risulterebbero dalle precedenti per lo scioglimento e la fusione delle funzioni $p(a, b, c)$, $q(a, b, c)$, $r(a, b, c)$. Quando poi il corpo sia un liquido che parte dalla quiete al principio del tempo t, è manifesto che le a, b, c tengono il luogo delle p, q, r, giusta l'idea che ci siamo formati dello stato precedente ideale sulla fine del N. 7.

14. Ai numeri (43) e (44) della Memoria inserita nel T. XXI ho fatto vedere come dalla equazione (6) dipende la formola delle condensazioni, e la così detta equazione della continuità, la quale non si verifica soltanto pei corpi fluidi, ma in generale. Mi sarebbe comodo rimandare il lettore al luogo citato: affinchè però l'attuale Memoria possa essere letta indipendentemente da quella, riprodurrò qui almeno la dimostrazione dell' equazione della continuità.

Si pongono le seguenti denominazioni introdotte la prima volta da Lagrange (ho cambiate le lettere per evitare equivoci)

$$
(27)\qquad
\begin{aligned}
l_1 &= \frac{dy}{db}\frac{dz}{dc} - \frac{dz}{db}\frac{dy}{dc}\\
l_2 &= \frac{dz}{db}\frac{dx}{dc} - \frac{dx}{db}\frac{dz}{dc}\\
l_3 &= \frac{dx}{db}\frac{dy}{dc} - \frac{dy}{db}\frac{dx}{dc}\\
m_1 &= \frac{dz}{da}\frac{dy}{dc} - \frac{dy}{da}\frac{dz}{dc}\\
m_2 &= \frac{dx}{da}\frac{dz}{dc} - \frac{dz}{da}\frac{dx}{dc}\\
m_3 &= \frac{dy}{da}\frac{dx}{dc} - \frac{dx}{da}\frac{dy}{dc}\\
n_1 &= \frac{dy}{da}\frac{dz}{db} - \frac{dz}{da}\frac{dy}{db}\\
n_2 &= \frac{dz}{da}\frac{dx}{db} - \frac{dx}{da}\frac{dz}{db}\\
n_3 &= \frac{dx}{da}\frac{dy}{db} - \frac{dy}{da}\frac{dx}{db}
\end{aligned}
$$

richiamando altresì l' espressione della H data nella (4): e si osserva mediante l' attuale sostituzione l' identità delle nove equazioni

$$
(28)\qquad
\begin{aligned}
l_1 \frac{dx}{da} + m_1 \frac{dx}{db} + n_1 \frac{dx}{dc} &= \mathrm{H} \\
l_2 \frac{dx}{da} + m_2 \frac{dx}{db} + n_2 \frac{dx}{dc} &= 0 \\
l_3 \frac{dx}{da} + m_3 \frac{dx}{db} + n_3 \frac{dx}{dc} &= 0 \\
l_1 \frac{dy}{da} + m_1 \frac{dy}{db} + n_1 \frac{dy}{dc} &= 0 \\
l_2 \frac{dy}{da} + m_2 \frac{dy}{db} + n_2 \frac{dy}{dc} &= \mathrm{H} \\
l_3 \frac{dy}{da} + m_3 \frac{dy}{db} + n_3 \frac{dy}{dc} &= 0 \\
l_1 \frac{dz}{da} + m_1 \frac{dz}{db} + n_1 \frac{dz}{dc} &= 0 \\
l_2 \frac{dz}{da} + m_2 \frac{dz}{db} + n_2 \frac{dz}{dc} &= 0 \\
l_3 \frac{dz}{da} + m_3 \frac{dz}{db} + n_3 \frac{dz}{dc} &= \mathrm{H}\,.
\end{aligned}
$$

Indico con un apice la derivata totale della densità Γ pel tempo (indicazione mantenuta anche per altre quantità), e noto essere

$$
(29)\qquad \Gamma' = \frac{d\Gamma}{dx} u + \frac{d\Gamma}{dy} v + \frac{d\Gamma}{dz} w + \frac{d\Gamma}{dt}
$$

quando si considera $\Gamma(x, y, z, t)$ ridotta funzione delle tre coordinate e del tempo esplicito, come si è detto sul finire del N. 9. Le u, v, w stanno in luogo delle derivate $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ delle x, y, z pel tempo, derivate che dapprima funzioni di a, b, c, t si riguardano ridivenute funzioni di x, y, z, t, sempre pel giuoco dei valori (8), talchè si abbiano le equazioni identiche

$$
(30)\qquad \frac{dx}{dt} = u(x, y, z, t)\,; \quad \frac{dy}{dt} = v(x, y, z, t)\,; \quad \frac{dz}{dt} = w(x, y, z, t)\,:
$$

la $\frac{d\Gamma}{dt}$ indica la derivata parziale della $\Gamma(x, y, z, t)$ pel t solamente esplicito.

Dalla equazione (6) derivata logaritmicamente e totalmente pel tempo, abbiamo

$$(31) \qquad \frac{\Gamma'}{\Gamma} + \frac{H'}{H} = 0 ;$$

abbiamo poi dalla (4) e dalle (27)

$$(32) \qquad \begin{aligned} H' = & \; l_1 \frac{d^2 x}{da\,dt} + m_1 \frac{d^2 x}{db\,dt} + n_1 \frac{d^2 x}{dc\,dt} \\ & + l_2 \frac{d^2 y}{da\,dt} + m_2 \frac{d^2 y}{db\,dt} + n_2 \frac{d^2 y}{dc\,dt} \\ & + l_3 \frac{d^2 z}{da\,dt} + m_3 \frac{d^2 z}{db\,dt} + n_3 \frac{d^2 z}{dc\,dt} . \end{aligned}$$

Ora dalle (30) deduciamo prontamente le nove

$$\frac{d^2x}{dadt} = \frac{du}{dx}\frac{dx}{da} + \frac{du}{dy}\frac{dy}{da} + \frac{du}{dz}\frac{dz}{da}$$

$$\frac{d^2x}{dbdt} = \frac{du}{dx}\frac{dx}{db} + \frac{du}{dy}\frac{dy}{db} + \frac{du}{dz}\frac{dz}{db}$$

$$\frac{d^2x}{dcdt} = \frac{du}{dx}\frac{dx}{dc} + \frac{du}{dy}\frac{dy}{dc} + \frac{du}{dz}\frac{dz}{dc}$$

$$\frac{d^2y}{dadt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{da} + \frac{dv}{dy}\frac{dy}{da} + \frac{dv}{dz}\frac{dz}{da}$$

$$\frac{d^2y}{dbdt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{db} + \frac{dv}{dy}\frac{dy}{db} + \frac{dv}{dz}\frac{dz}{db}$$

$$\frac{d^2y}{dcdt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dc} + \frac{dv}{dy}\frac{dy}{dc} + \frac{dv}{dz}\frac{dz}{dc}$$

$$\frac{d^2z}{dadt} = \frac{dw}{dx}\frac{dx}{da} + \frac{dw}{dy}\frac{dy}{da} + \frac{dw}{dz}\frac{dz}{da}$$

$$\frac{d^2z}{dbdt} = \frac{dw}{dx}\frac{dx}{db} + \frac{dw}{dy}\frac{dy}{db} + \frac{dw}{dz}\frac{dz}{db}$$

$$\frac{d^2z}{dcdt} = \frac{dw}{dx}\frac{dx}{dc} + \frac{dw}{dy}\frac{dy}{dc} + \frac{dw}{dz}\frac{dz}{dc}$$

e questi valori sostituiti nel precedente di H' (equazione (32)) lo riducono

$$
\begin{aligned}
H' = & \frac{du}{dx}\left(l_1 \frac{dx}{da} + m_1 \frac{dx}{db} + n_1 \frac{dx}{dc}\right) \\
& + \frac{du}{dy}\left(l_1 \frac{dy}{da} + m_1 \frac{dy}{db} + n_1 \frac{dy}{dc}\right) \\
& + \frac{du}{dz}\left(l_1 \frac{dz}{da} + m_1 \frac{dz}{db} + n_1 \frac{dz}{dc}\right) \\
& + \frac{dv}{dx}\left(l_2 \frac{dx}{da} + m_2 \frac{dx}{db} + n_2 \frac{dx}{dc}\right) \\
& + \frac{dv}{dy}\left(l_2 \frac{dy}{da} + m_2 \frac{dy}{db} + n_2 \frac{dy}{dc}\right) \\
& + \frac{dv}{dz}\left(l_2 \frac{dz}{da} + m_2 \frac{dz}{db} + n_2 \frac{dz}{dc}\right) \\
& + \frac{d\omega}{dx}\left(l_3 \frac{dx}{da} + m_3 \frac{dx}{db} + n_3 \frac{dx}{dc}\right) \\
& + \frac{d\omega}{dy}\left(l_3 \frac{dy}{da} + m_3 \frac{dy}{db} + n_3 \frac{dy}{dc}\right) \\
& + \frac{d\omega}{dz}\left(l_3 \frac{dz}{da} + m_3 \frac{dz}{db} + n_3 \frac{dz}{dc}\right)
\end{aligned}
$$

il quale per le identiche equazioni (28) diventa a colpo d'occhio

$$H' = H\left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{d\omega}{dz}\right);$$

quindi l'antecedente equazione (31) risulta

$$(33) \qquad \frac{\Gamma'}{\Gamma} + \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{d\omega}{dz} = 0;$$

ossia moltiplicando per Γ e mettendo per Γ' il valore (26)

$$(34) \qquad \frac{d.\Gamma u}{dx} + \frac{d.\Gamma v}{dy} + \frac{d.\Gamma \omega}{dz} + \frac{d\Gamma}{dt} = 0.$$

È molto importante l'osservazione che questa equazione della continuità non contiene più alcuna traccia delle a, b, c variabili dello stato antecedente, le quali nondimeno fanno tanto giuoco nella dimostrazione.

15. Formiamoci a seconda degli stessi principj le equazioni della continuità anche per gli altri due sistemi lineare e superficiale.

Cominciando dal lineare; la formola (16) ci dà

$$\frac{\Gamma'}{\Gamma} + \frac{\frac{dx}{da}\frac{d^2x}{dadt} + \frac{dy}{da}\frac{d^2y}{dadt} + \frac{dz}{da}\frac{d^2z}{dadt}}{\left(\frac{dx}{da}\right)^2 + \left(\frac{dy}{da}\right)^2 + \left(\frac{dz}{da}\right)^2} = 0 .$$

Osserviamo che in questo caso le u, v, w rispettivamente eguali alle $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$, sono da considerarsi funzioni soltanto delle x, t:

quindi $$\frac{d^2x}{dadt} = \frac{du}{da} = \frac{du}{dx}\frac{dx}{da}, \qquad \text{e similmente}$$

$$\frac{d^2y}{dadt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{da}; \qquad \frac{d^2z}{dadt} = \frac{dw}{dx}\frac{dx}{da};$$

e rammentate anche le (15), la precedente formola ci si muterà nell' altra

$$(35) \qquad \frac{\Gamma'}{\Gamma}\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right\} + \frac{du}{dx} + \frac{dy}{dx}\frac{dv}{dx} + \frac{dz}{dx}\frac{dw}{dx} = 0$$

che è l' equazione cercata, la quale ora più non contiene se non quantità in relazione collo stato reale del sistema.

Pei sistemi superficiali: derivando pel tempo l' equazione (22) ove K ha il valore (24) e richiamando per abbreviare le ultime tre denominazioni scritte nelle (27) abbiamo

$$(36) \qquad \frac{\Gamma'}{\Gamma} + \frac{n_1 n_1' + n_2 n_2' + n_3 n_3'}{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2} = 0 .$$

Nel caso attuale le u, v, w, eguali rispettivamente alle $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$, si debbono considerare ridotte funzioni di x, y, t: abbiamo quindi primieramente

$$n'_1 = \frac{dy}{da}\frac{dw}{db} + \frac{dz}{db}\frac{dv}{da} - \frac{dz}{da}\frac{dv}{db} - \frac{dy}{db}\frac{dw}{da}$$

$$n'_2 = \frac{dz}{da}\frac{du}{db} + \frac{dx}{db}\frac{dw}{da} - \frac{dx}{da}\frac{dw}{db} - \frac{dz}{db}\frac{du}{da}$$

$$n'_3 = \frac{dx}{da}\frac{dv}{db} + \frac{dy}{db}\frac{du}{da} - \frac{dy}{da}\frac{du}{db} - \frac{dx}{db}\frac{dv}{da},$$

poi osservando essere

$$\frac{dw}{db} = \frac{dw}{dx}\frac{dx}{db} + \frac{dw}{dy}\frac{dy}{db}; \qquad \frac{dv}{da} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{da} + \frac{dv}{dy}\frac{dy}{da};$$

e così per altre quattro espressioni simili, tenuti d'occhio i valori di cui n_1, n_2, n_3 sono un'espressione compendiosa, ci risultano

$$n'_1 = -n_3\frac{dw}{dx} - n_2\frac{dv}{dx} + n_1\frac{dv}{dy}$$

$$n'_2 = \quad n_2\frac{du}{dx} - n_1\frac{du}{dy} - n_3\frac{dw}{dy}$$

$$n'_3 = \quad n_3\left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy}\right) \quad ;$$

e osservando inoltre che dalle equazioni (23) sciolte per $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$

si cavano $\qquad \frac{dz}{dx} = -\frac{n_1}{n_3}, \qquad \frac{dz}{dy} = -\frac{n_2}{n_3}$

da cui possono dedursi i valori di n_1, n_2 dati per n_3: fatte tutte le sostituzioni, la (36) si riduce

$$(37)\quad \begin{aligned} &\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left\{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right\} + \left\{1 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right\}\frac{du}{dx} \\ &- \frac{dz}{dx}\frac{dz}{dy}\left(\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx}\right) + \left\{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right\}\frac{dv}{dy} + \frac{dz}{dx}\frac{dw}{dx} + \frac{dz}{dy}\frac{dw}{dy} = 0. \end{aligned}$$

Questa è la cercata equazione della continuità pei sistemi superficiali, che non contiene se non quantità in relazione collo stato reale. Io la diedi per la prima volta fino dall'anno 1825, e il ch. Signor Dottor Pietro Maggi ne ha fatto un uso felice nella sua Memoria sulle linee di stringimento e di allargamento pubblicata in Verona l'anno 1835.

CAPO II.

Schiarimenti relativi al passaggio dall' equazione generale della Meccanica pei sistemi discreti a quella per le tre sorte di sistemi continui.

L' equazione generale della Meccanica relativa al moto e all'equilibrio di un sistema discreto di punti ove si considerino concentrate differenti masse finite, e in qualunque modo agenti gli uni sugli altri, o assoggettati a condizioni scritte in equazioni alle quali le coordinate di quei punti debbano sempre soddisfare: una tale equazione, dico, espressa mediante i simboli proprj del calcolo delle variazioni, è dimostrata in più libri con tal rigore che non può lasciar luogo ad alcun dubbio ragionevole. Citerò, oltre la M.ª A.ª, la Meccanica Celeste T. I. pag. 38: e forse per riguardo alla considerazione delle differenti masse, non dispiacerà vedere quanto io ne scrissi nella Memoria pubblicata fin dall'anno 1825: (pag. 42 e seguenti). Assumerò pertanto una tale equazione siccome una verità nota, e solo mi farò a descriverla per ben fissare le idee da annettersi ai differenti elementi analitici che la compongono. Ma pel passaggio da essa a quelle che si riferiscono alle tre sorte di sistemi continui, troppe cose furono lasciate sottintese, la di cui mancanza è maggiormente sensibile nel proposito di considerare i corpi come ammassi di molecole disgiunte: quindi taluno forse mi saprà buon grado d'aver qui riunite le opportune spiegazioni, visto che è poi dalle tre accennate riduzioni dell' equazione generale, che emergono i mezzi a trattare le più grandi e difficili questioni della Meccanica.

16. I punti fisici sono di numero n, ed

$$x_1,\ y_1,\ z_1;\quad x_2,\ y_2,\ z_2;\ \ldots\ldots\ x_n,\ y_n,\ z_n$$

esprimono le rispettive coordinate ortogonali alla fine di un tempo t;

$$X_1,\ Y_1,\ Z_1;\quad X_2,\ Y_2,\ Z_2;\ \ldots\ldots\ X_n,\ Y_n,\ Z_n$$

le rispettive componenti secondo i tre assi delle forze acceleratrici esterne alla fine dello stesso tempo t;

$$K_{1,2},\ K_{1,3}\ldots\ldots K_{2,3}\ldots\ldots \text{ e in generale } K_{i,j}$$

le forze acceleratrici interne che agiscono secondo le rette congiungenti i punti (1,2), (1,3), ... (2,3) .... e in generale (i,j);

$$m_1;\ m_2;\ \ldots\ldots\ m_n$$

le masse dei rispettivi punti fisici;

$$L=0,\ M=0;\ N=0;\ \text{ec.}$$

varie equazioni di condizione che hanno luogo fra le coordinate dei diversi punti.

L' equazione generale, di cui si disse, è la seguente

$$(1)\quad \begin{aligned} &S\,m\left\{\left(X-\frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x+\left(Y-\frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y+\left(Z-\frac{d^2z}{dt^2}\right)\delta z\right\}\\ &+S\,m_i m_j\,K\,\delta p+\lambda\,\delta L+\mu\,\delta M+\nu\,\delta N+\text{ec.}=0; \end{aligned}$$

il primo segno S significa la somma di tanti trinomj quanti se ne ottengono marcando successivamente il trinomio scritto, cogli indici 1, 2, 3, ... n dei diversi punti ai piedi delle lettere che lo compongono, eccettuate quelle che indicano operazioni cioè le d, δ. Il secondo segno S esprime la somma di tutti i termini introdotti dalle forze interne attive, essendo

$$p=\sqrt{(x_j-x_i)^2+(y_j-y_i)^2+(z_j-z_i)^2}.$$

Le lettere λ, μ, ν, ec. significano moltiplicatori indeterminati; la caratteristica δ è come nel calcolo delle variazioni.

Circa ai termini di terza specie portati nella equazione (1) dalle equazioni di condizione, può osservarsi che spesso non diversificano tra di loro se non pel passaggio da un punto all' altro in condizioni affatto simili, e che allora molti di essi possono abbracciarsi con un segno sommatorio, e invece di quella terza parte, si può scrivere

$$(2)\qquad S\,\lambda\,\delta L+S\,\mu\,\delta M+S\,\nu\,\delta N+\text{ec.}$$

17. È noto che l'equazione (1) si rompe in tante quante sono le variazioni indipendenti $\delta x_1, \delta y_1, \delta z_1; \delta x_2, \delta y_2, \delta z_2; \ldots,$ cioè $3n$; e che se mettiamo fra le $x_1, y_1, z_1, x_2,$ ec. un numero p di equazioni di condizione, lo spezzamento non si effettua più allo stesso modo, ma possono seguirsi due vie, le quali conducono ai medesimi risultamenti. Possono dette equazioni trattarsi, come vedesi nella terza parte della equazione generale (1); e allora le $\delta x_1, \delta y_1, \delta z_1, \delta x_2, \ldots$ si considerano ancora come se fossero fra di loro indipendenti, a motivo dei nuovi moltiplicatori introdotti i quali sono tanti, quante le anzidette equazioni fra le variabili. E si possono mediante le variate di dette equazioni di condizione determinare linearmente per le altre tante delle variazioni $\delta x_1, \delta y_1, \delta z_1, \delta x_2, \ldots$ quante sono quelle equazioni. Allora, fatta la sostituzione dei valori ottenuti, il numero delle residue variazioni indipendenti si riduce $3n-p$: e quindi $3n-p$ sono le equazioni che si ricavano col mettere i loro coefficienti a zero nella equazione generale; i risultamenti sono i medesimi che si avrebbero tenendo la prima strada e poi eliminando fra le equazioni ottenute i coefficienti indeterminati introdotti operando a quella maniera. È poi permesso adottare un metodo misto, vale a dire conservare alcune equazioni di condizione e trattarle come si vede nella terza parte dell' equazione generale (1), e per un altro numero di equazioni di condizione, contemplarle tenendo il secondo dei sopra descritti andamenti.

18. Prima di progredire spiegando le modificazioni prese dall'equazione (1) nei tre casi dei sistemi continui, è bene che ci tratteniamo alquanto in considerazioni relative alle quantità $X, Y, Z; \frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{d^2z}{dt^2}$, cui siamo soliti chiamare forze acceleratrici applicate, o forze acceleratrici attuali pel punto generico di un corpo; sia poi il sistema a tre dimensioni, o superficiale o lineare. Non c' è dubbio che queste stesse espressioni nella equazione generale (1) dei sistemi discreti, significano forze rapportate ad una forza unitaria applicata all' unità di

massa: ciò è tanto vero, che quando nei diversi punti del sistema discreto s' intendono concentrate diverse masse m_1, m_2, m_3...., queste stesse m_1, m_2, m_3,...., che sono numeri rapportati all' unità di massa, diventano moltiplicatori di quelle forze, come si vede nella (1). E qui giova rammentare che per la misura delle forze continue, noi cominciamo a convenire di chiamare unità di forza quella forza acceleratrice costante che fa percorrere all' unità di massa nell' unità di tempo, partendo dalla quiete, la mezza unità di spazio. Come poi faccia la detta forza unitaria a produrre un tale effetto sull' unità di massa, quando questa non è considerata siccome concentrata in un punto, ma occupante spazio (il che si avvera sempre nello stato naturale), vi sono due maniere per farcene un' immagine. Si può intendere la forza unitaria divisa in innumerabili forze elementari eguali applicate ai diversi punti fisici della massa unitaria, ovvero si può intendere detta massa ridotta solida, e applicata la forza ad un solo punto di essa, propagandosi il moto agli altri punti per effetto della rigidità del corpo. Denominiamo poi X una forza multipla X volte dell' anzidetta.

Ma quando parliamo di forze X, Y, Z applicate ai singoli punti di un corpo, che cosa dobbiamo intendere? È manifesto che se ognuna di tali forze fosse della grandezza di quelle che muovono l' unità di massa, poichè sempre maggiore d' ogni assegnabile è il numero delle molecole di un corpo, la somma di tutte quelle forze sarebbe per noi sempre una forza infinita. Adunque in tal caso esse sono forze simili a quelle forze elementari nelle quali dicemmo più sopra potersi intendere divisa la forza unitaria: cioè le lettere X, Y, Z debbono ancora intendersi numeri rapportati all'unità di forza applicata all'unità di massa, ma estremamente impiccoliti a motivo del fattore m, che si vede nell' equazione generale (1), e che in tal caso diventa piccolissimo. Importa assai conoscere l' espressione di questo fattore. Supponendo (ed è lecito il farlo senza nuocere alla generalità) che tutte le molecole del corpo siano eguali fra loro, il numero m esprimente la massa di ciascuna, è eguale

per tutte. Immaginiamo l'unità di massa distribuita nel cubo eguale all'unità di volume, come si è detto al N. 6 del Capo precedente, di maniera che tutte le molecole di essa massa siano nel verso dei tre lati del cubo fra loro distanti di intervalli eguali e piccolissimi espressi dalla lettera σ. Sia n il numero degli intervalli eguali fra molecola e molecola in un lato del cubo, talchè, per essere ogni spigolo del cubo eguale all' unità lineare, si abbia

$$1 = n\sigma; \tag{3}$$

il numero totale delle molecole nel detto cubo sarà $(n+1)^3$; quindi, essendo per mezzo dell'unità espressa la massa cioè la somma delle molecole in tutto il cubo, detta massa per una sola molecola avrà l' espressione $\frac{1}{(n+1)^3}$ ovvero $\frac{\sigma^3}{(1+\sigma)^3}$, avendo messo per n il suo valore cavato dalla (3): ma la massa di una molecola è altrimenti significata da m; dunque l'equazione

$$m = \frac{\sigma^3}{(1+\sigma)^3} = \sigma^3 - 3\sigma^4 + 6\sigma^5 - \text{ec.}; \tag{4}$$

della quale serie basterà tenere il primo termine, giacchè i seguenti essendo estremamente piccoli a fronte del primo, darebbero nell'equazione generale termini della stessa natura di quelli che al N. 7 dicemmo potersi francamente trascurare.

19. Forza elementare di diverso genere da quella ora descritta, occorre quando s'intende che una massa finita sia mossa, non da forze applicate a tutti i suoi punti, come nel caso della gravità, ma da forze applicate ai soli punti di una parte della sua superficie, come nel caso della pressione atmosferica sulla superficie dei corpi. Non impegnamoci per ora a voler concepire il modo col quale l' azione effettuata sui punti della superficie si trasmette a tutti gli altri punti della massa: ammettiamo il fatto, e immaginando il cubo, come sopra contenente l' unità di massa, mosso da tante forze elementari eguali applicate alle sole molecole che sono in una sola sua faccia, cerchiamo l' espressione di una di esse: vedremo così come debba interpretarsi in tal caso la lettera m che moltiplicasse un'espres-

sione di forza nella equazione generale. Essendo $(n+1)^2$ il numero delle molecole in una di quelle facce, un numero $(n+1)^2$ di forze elementari eguali produrrebbe lo stesso effetto della forza operante sull' unità di massa, quindi una di quelle è $\frac{1}{(n+1)^2}$ di questa. Pertanto il fattore che in tal caso impicciolisce le forze X, Y, Z è $\frac{1}{(n+1)^2} = \frac{\sigma^2}{(1+\sigma)^2}$, e si ha

$$(5) \qquad m = \frac{\sigma^2}{(1+\sigma)^2} = \sigma^2 - 2\sigma^3 + 3\sigma^4 - \text{ec.}$$

20. Altra forza elementare di diverso genere delle due sopra descritte è quella che si suppone produrre moto in una massa finita essendo applicata ai singoli punti di una sola linea tracciata sulla superficie di un corpo. Per averne l'espressione, immaginiamo ancora lo stesso cubo coll' unità di massa, mosso da tante forze elementari eguali applicate ai singoli punti di un suo lato, che sono di numero $n+1$. Si vede che un numero $n+1$ di tali forze elementari produce lo stesso effetto della forza operante sull' unità di massa, e che quindi una di quelle è $\frac{1}{n+1}$ di questa. Di tal maniera il fattore che impicciolisce le X, Y, Z è in tal caso $\frac{1}{n+1} = \frac{\sigma}{1+\sigma}$, e si ha

$$(6) \qquad m = \frac{\sigma}{1+\sigma} = \sigma - \sigma^2 + \sigma^3 - \text{ec.}$$

Finalmente si ha il caso di una forza X che produce moto nella unità di massa essendo applicata ad un solo suo punto, e allora non occorre più la considerazione di forze elementari: quella medesima ha il concetto che serve di base alle precedenti deduzioni.

21. Nelle questioni di moto o di equilibrio per corpi estesi, si presentano spesso a comporre il fenomeno forze di tutte quattro le differenti specie sopra descritte; però le lettere X, Y, Z, e qualunque altra espressione di forza significano sempre numeri rapportati a forze della quarta specie delle sunnominate, cioè muoventi masse finite essendo applicate ad un solo loro

punto. Per le altre tre specie i numeri X, Y, Z, e simili, s' intendono impiccioliti da fattori somministrati dalla lettera m che apparisce nell'equazione generale (1), giusta il canone seguente. « Quando si parla di forze applicate ai singoli punti di una « linea fisica, alla lettera m nella equazione generale devesi « sostituire la σ intervallo fra molecola e molecola nella dispo- « sizione antecedente ideale; quando si parla di forze applicate « ai singoli punti di una superficie, devesi alla m sostituire il « fattore σ^2; e interpretare la stessa m come avente il valore « σ^3, quando si tratta di forze applicate ai singoli punti fisici « di un corpo dotato delle tre dimensioni. »

22. Ciò che si è detto delle forze elementari di seconda e terza specie applicate a superficie o a linee fisiche, vale eziandio quando queste superficie o queste linee non si considerano nei corpi, ma astrattamente in quei sistemi che denominiamo superficiali o lineari. Già dicemmo (Cap. 1°, n. 11) che tali sistemi, rigorosamente parlando, non si danno, giacchè una terza dimensione nel caso di un velo materiale, e due altre dimensioni nel caso di un filo materiale, veramente non mancano: prova ne è il potersi le masse in questi due casi confrontare con quelle dei corpi a tre dimensioni. Siccome dunque un sistema lineare o un sistema superficiale non sono che supposizioni ammissibili per approssimazione, non deve far urto in tali casi un' altra correlativa supposizione, cioè che le molecole per essi siano di differente natura in paragone di quelle dei corpi a tre dimensioni. Pei sistemi lineari sono molecole con tali concentrazioni di massa secondo due dimensioni che la riunione di quel numero soltanto di esse che stanno con intervallo piccolissimo σ in una linea finita, basta per avere a dirittura una massa confrontabile colle masse finite; e nei sistemi superficiali sono molecole colla concentrazione di massa secondo una dimensione, di modo che si ottiene una massa finita raccogliendone quante ne stanno in una superficie estesa con intervalli molecolari per due versi come l' anzidetto. Pertanto in questi casi è anche più manifesto di quando si consi-

derano le linee o le superficie nei corpi, il doversi la m interpretare per σ e per σ^2. Infatti un numero $n+1$ di quelle molecole (sistema lineare) darà tanta massa quanta è l'unitaria, dunque la massa di una sola molecola è $\frac{1}{n+1} = \sigma$ — ec.; un numero $(n+1)^2$ (sistema superficiale) darà ancora tanta massa quanta è l'unitaria, dunque la massa di una molecola in questo secondo caso sarà $\frac{1}{(n+1)^2} = \sigma^2$ — ec. Solamente è da avvertire che dette molecole con masse concentrate possono per alcuni problemi non supporsi eguali fra loro, cioè può supporsi che il rapporto delle loro masse non sia eguale all'unità, ma espresso da un numero N: allora nella equazione generale (1) bisognerebbe fare $m = \sigma N$ pei sistemi lineari, ed $m = \sigma^2 N$ pei sistemi superficiali. Accennando la possibilità dell' introduzione di questo fattore N, gioverà prescinderne sulle prime per maggiore semplicità.

È anche possibile escogitare forze elementari di un ordine di piccolezza più elevato di quello per le forze della prima specie che cercammo spiegare al N. 18; siccome però una siffatta speculazione non occorre se non quando si cerca formarsi un concetto delle azioni molecolari, ci riserberemo di farne parola a luogo più opportuno.

23. S' introduce la continuità in un sistema quando si suppone che le coordinate di tutti i suoi punti dipendano da tre sole funzioni di una, o di due, o di tre variabili semplici (cui se è questione di moto si aggiunge anche il tempo) le quali mantengano sempre le stesse forme passando da un punto all' altro del sistema e soltanto mutino valore pel cangiar di valore che fanno quelle variabili semplici. Ciò verremo ora mettendo in chiaro per le tre sorte di sistemi continui. Introdurre per tal modo la continuità equivale al legare tutte le variabili esprimenti le coordinate dei diversi punti mediante tante equazioni di condizione quante sono esse variabili, meno tre. È questo un principio sottinteso nella Meccanica Analitica che giova ridurre

più esplicito, giacchè sta in esso veramente il mezzo col quale passare dall'equazione generale della Meccanica pei sistemi discreti a quelle pei continui.

§. I.

SISTEMI LINEARI.

24. Adottando per un tal genere di sistemi il concetto già dichiarato al N. 11 Capo precedente, porremo a significare le coordinate del punto generico le equazioni

$$(7) \qquad x=f(a,t); \quad y=\varphi(a,t); \quad z=\psi(a,t).$$

Le forme di funzioni espresse coi simboli f, φ, ψ rimangono le medesime percorrendo i diversi punti fisici del sistema. Se si immagina che il filo materiale cominci quando $a=l$, e finisca quando $a=k$, si deve intendere che le coordinate dei suoi diversi punti abbiano espressioni come segue

$$(8) \qquad \begin{aligned} x_1&=f(l,t); & x_2&=f(l+\sigma,t); & x_3&=f(l+2\sigma,t); \text{ ec.} \\ y_1&=\varphi(l,t); & y_2&=\varphi(l+\sigma,t); & y_3&=\varphi(l+2\sigma,t); \text{ ec.} \\ z_1&=\psi(l,t); & z_2&=\psi(l+\sigma,t); & z_3&=\psi(l+2\sigma,t); \text{ ec.} \end{aligned}$$

essendo rispettivamente $f(k,t)$, $\varphi(k,t)$, $\psi(k,t)$ i valori delle coordinate dell'ultimo punto.

Qui possiamo immaginare eliminata la l fra la prima e le seguenti equazioni della prima fila. Sia $l=p(x_1)$ il valore di l dedotto dalla prima equazione; risostituendolo in tutte quelle equazioni, esse diverranno

$$(9) \qquad x_1=f[p(x_1),t]; \; x_2=f[p(x_1)+\sigma,t]; \; x_3=f[p(x_1)+2\sigma,t]; \text{ ec.}$$

la prima sarà identica, cioè come se nòn fosse, le seguenti che hanno un significato, saranno tante quante le x dei diversi punti meno una. Allo stesso modo, se $l=q(y_1)$ sarà il valore di l cavato dalla prima equazione nella seconda fila delle (8), potremo scrivere

$$(10) \qquad y_1=\varphi[q(y_1),t]; \; y_2=\varphi[q(y_1)+\sigma,t]; \; y_3=\varphi[q(y_1)+2\sigma,t]; \text{ ec.}$$

e similmente

(11) $z_1=\psi[r(z_1),t]$; $z_2=\psi[r(z_1)+\sigma,t]$; $z_3=\psi(r(z_1)+2\sigma,t]$; ec.

avendo rappresentato per $l=r(z_1)$ il valore di l dedotto dalla prima equazione della terza fila.

Le equazioni (9), (10), (11), che incominciano tutte da una equazione identica, sono le equazioni di condizione fra le coordinate dei diversi punti, introdotte dall'ammettere la continuità, come dicemmo nel num.° precedente, e che sono tante quante le coordinate, meno tre. A taluno potrebbe sembrare che risultassero due altre equazioni di condizione

$$y_1=\varphi[p(x_1),t]; \quad z_1=\psi[p(x_1),t]$$

mettendo al luogo di l nelle espressioni per y_1, z_1 il valore della stessa l dedotto dalla prima equazione: ma sarebbe in inganno.

Si disse che le forme f, φ, ψ sono arbitrarie, ciascuna indipendentemente dalle altre due: stabilita la forma f per la prima fila delle equazioni (8), risulta veramente un legame fra le x dei diversi punti, come apparisce dalle (9), non già un legame fra le x e le y: l'arbitrio che sussiste nella forma φ anche quando è pronunciata la f (dicasi a un di presso della forma ψ per riguardo alle z) toglie quel vincolo di dipendenza che sembrerebbe apparire nelle due equazioni ultimamente scritte.

25. Passiamo a vedere come debba intendersi nel nostro caso la composizione delle variazioni δx_1, δy_1, δz_1, δx_2, ec. Se prendiamo le variate delle equazioni (9), (10), (11), abbiamo

$$\begin{aligned}
&\delta x_1=f'(p)\,p'(x_1)\,\delta x_1; \quad \delta x_2=f'(p+\sigma)\,p'(x_1)\,\delta x_1;\\
(12)\qquad &\delta y_1=\varphi'(q)\,q'(y_1)\,\delta y_1; \quad \delta y_2=\varphi'(q+\sigma)\,q'(y_1)\,\delta y_1; \text{ ec.}\\
&\delta z_1=\psi'(r)\,r'(z_1)\,\delta z_1; \quad \delta z_2=\psi'(r+\sigma)\,r'(z_1)\,\delta z_1;
\end{aligned}$$

in guisa che ponendo

(13) $p'(x_1)\,\delta x_1=\xi$; $q'(y_1)\,\delta y_1=\eta$; $r'(z_1)\,\delta z_1=\zeta$

e restituendo in luogo delle $p(x_1)$, $q(y_1)$, $r(z_1)$ la l che le eguaglia tutte e tre, otteniamo

$$(14)\quad \begin{array}{lll} \delta x_1 = f'(l)\,\xi\,; & \delta x_2 = f'(l+\sigma)\,\xi\,; & \delta x_3 = f'(l+2\sigma)\,\xi\,; \\ \delta y_1 = \varphi'(l)\,\eta\,; & \delta y_2 = \varphi'(l+\sigma)\,\eta\,; & \delta y_3 = \varphi'(l+2\sigma)\,\eta\,;\ \text{ec.} \\ \delta z_1 = \psi'(l)\,\zeta\,; & \delta z_2 = \psi'(l+\sigma)\,\zeta\,; & \delta z_3 = \psi'(l+2\sigma)\,\zeta\,; \end{array}$$

Vedesi dopo di ciò, che chiamando δx, δy, δz le variazioni delle coordinate x, y, z spettanti al punto generico, avremo

$$(15)\qquad \delta x = f'(a)\,\xi\,; \quad \delta y = \varphi'(a)\,\eta\,; \quad \delta z = \psi'(a)\,\zeta\,,$$

essendo le ξ, η, ζ quantità che non mutano di valore passando dal primo all'ultimo punto del sistema. Pertanto le equazioni (14), (15) ci insegnano che le variazioni contengono bensì tre quantità arbitrarie, cioè le δx_1, δy_1, δz_1 delle equazioni (13), ma non variano passando dalle coordinate di un punto del sistema a quelle di un altro punto se non alla maniera colla quale (equazioni (8)) variano le stesse coordinate.

26. Adottare per le x_1, y_1, z_1, x_2, ec., e per le δx_1, δy_1, δz_1, δx_2, ec. valori come quelli espressi nelle equazioni (8), (14) è in sostanza un seguire il secondo degli andamenti descritti al num°. 17, è cioè un adottare valori in forza dei quali riescano di loro natura già soddisfatte tutte le equazioni di condizione introdotte dalla continuità ed espresse colle (9), (10), (11): quest'ultime quindi non si dovranno più contemplare a parte.

È ora facile capire che il segno S nella prima parte della equazione generale (1) si cambia in una sommatoria estesa da $a = l$ fino ad $a = k$, ossia in un integrale finito definito (vedi i trattatisti, o il Vol. XX di questi Atti, pag. 632) esteso da $a = l$ sino ad $a = k + \sigma$, che può scriversi

$$(16)\quad \Sigma_l^{k+\sigma}\,\Delta a\,.\,\sigma \left\{ \left(X - \frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x + \left(Y - \frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y + \left(Z - \frac{d^2z}{dt^2}\right)\delta z \right\}$$

dove ho messo σ in luogo di m giusta il detto al num°. 21.

Abbiamo un teorema d'analisi (*) che ci somministra il mezzo di passare da un integrale finito definito ad un integrale continuo parimente definito, e può scriversi nella equazione

$$(17) \qquad \sigma \Sigma_l^{k+\sigma} \Delta a . \Omega = \int_l^k da . \Omega + \sigma \Psi$$

essendo Ω una funzione qualunque della variabile a e intendendosi nell'espressione $\sigma\Psi$ compendiati tutti i termini che facendosi sempre più piccoli finiscono coll'annullarsi insieme con σ.

Pertanto l'espressione (16) può cambiarsi nella equivalente

(18)

$$\int_l^k da . \left\{ \left(X - \frac{d^2 x}{dt^2} \right) \delta x + \left(Y - \frac{d^2 y}{dt^2} \right) \delta y + \left(Z - \frac{d^2 z}{dt^2} \right) \delta z \right\} + \sigma\Psi$$

e l'aggiunta $\sigma\Psi$ si dovrà trascurare per la ragione più volte accennata. Ed ecco come si adatta ad un sistema lineare la prima parte dell'equazione generale (1); ommetterò in questo luogo d'introdurre termini corrispondenti alla seconda parte di quella equazione generale, portati da forze interne attive, supponendo che tali forze non vi siano, e tanto per incominciare a dare un esempio e venire a qualche conclusione nota, tratterò il caso del filo flessibile ed inestensibile.

27. La condizione dell'inestendibilità del filo ci fa capire che la densità Γ colla quale la materia è distribuita nel filo, quantunque possa cambiare passando da un punto all'altro, resterà per ogni punto la stessa in qualunque ipotesi di curvatura e di movimento, ossia (analiticamente parlando) anche quando le x, y, z si mutano nelle $x + i\delta x$, $y + i\delta y$, $z + i\delta z$. Risulta quindi nulla la variazione della densità, e si ha l'equazione di condizione

$$(19) \qquad \delta \Gamma = 0 ;$$

ossia mettendo per Γ il suo valore (Capo 1°. equazione (16))

$$(20) \qquad \frac{dx}{da} \frac{d\delta x}{da} + \frac{dy}{da} \frac{d\delta y}{da} + \frac{dz}{da} \frac{d\delta z}{da} = 0 .$$

(*) Lacroix: *Traité* ec. T. III. pag. 98: ovvero Bordoni: *Lezioni* ec. T. II. p. 479.

Questa equazione di condizione deve intendersi replicata per ogni punto del sistema. Ora convien fissare un principio generale. Quando una equazione di condizione non muta passando da un punto all'altro del sistema se non pel mutare delle coordinate, non può che cambiare alla stessa maniera anche il coefficiente che nell' equazione generale meccanica ne moltiplica la variata. Nel caso attuale, se l'equazione si esprime per $L=0$, essa si adatta ai diversi punti mettendo per L (che è una funzione di a) prima $a=l$, poi $a=l+\sigma$, poi $a=l+2\sigma$, ec., talchè le diverse equazioni di condizione pei diversi punti possono indicarsi con

$$L_1=0\,;\quad L_2=0\,;\quad L_3=0\,;\ \text{ec.}$$

Queste introdurrebbero nella terza parte dell' equazione generale (1) i termini

$$\lambda_1\,\delta L_1+\lambda_2\,\delta L_2+\lambda_3\,\delta L_3+\text{ec.} \tag{21}$$

Ora si dice che i coefficienti λ_1, λ_2, λ_3, ec. non possono cambiare che come cambiano le L_1, L_2, L_3, ec., cioè debbono discendere tutti da una stessa funzione $\lambda(a)$, cosicchè si abbia

$$\lambda_1=\lambda(l)\,;\quad \lambda_2=\lambda(l+\sigma)\,;\quad \lambda_3=\lambda(l+2\sigma)\,;\ \text{ec.}$$

Ciò essendo, si fa manifesto che tutti i termini come nella somma qui sopra segnata (21), possono raccogliersi mediante una sommatoria; il che avevamo già previsto scrivendo l'espressione (2). Vi sono due modi per giungere a persuadersi l'esposto principio. Il primo è desunto dalla considerazione che quei coefficienti (come ha provato sì bene Lagrange pei sistemi discreti) rappresentano forze interne passive, cioè pressioni o tensioni che hanno luogo in quel punto pel quale si verifica l' equazione di condizione, e che quindi debbono cambiare da un punto all' altro unicamente pel cambiare che fanno le coordinate. L'altro mezzo è puramente analitico e consiste nell' osservare quel che avviene ne' sistemi discreti quando regna fra i loro punti una condizione dell' indole delle sopra indicate, per esempio la costanza delle distanze. Dalle equazioni spettanti

ad un punto si cava il valore del coefficiente che moltiplica la variata dell'equazione corrispondente, e da quelle spettanti ad un altro punto si cava il valore del coefficiente analogo, e si vede che tali valori non differiscono se non pei valori diversi delle coordinate. Ed anche senza pensare di aver condotto alla fine tali calcoli: ed anche quando il sistema è continuo alla maniera sopra descritta, si sente che se tutto ciò da cui dipende la determinazione del coefficiente λ non muta nei due casi se non per esservi al luogo della variabile a una volta la l, e un' altra volta la $l+\sigma$, i due valori del coefficiente non possono che differire alla stessa maniera. Questo ragionamento vale anche quando essendo più d' una le equazioni di condizione che si ripetono di punto in punto, sono anche più d'uno i rispettivi coefficienti: caso preveduto nello stendere l'espressione (2).

28. Nel caso attuale la sommatoria che comprende tutti i termini portati nell' equazione generale (1) dall' equazione di condizione (20), e che può tradursi in un integrale finito definito in corrispondenza al già detto per l'espressione (16), sarà

$$(22)\qquad \Sigma_l^{k+\sigma}\,\Delta a\,.\,\sigma\lambda\left(\frac{dx}{da}\,\frac{d\delta x}{da}+\frac{dy}{da}\,\frac{d\delta y}{da}+\frac{dz}{da}\,\frac{d\delta z}{da}\right);$$

dove ho messo $\sigma\lambda$ in luogo di λ, il che può sembrare arbitrario trattandosi di un coefficiente indeterminato, ma l' ho fatto appositamente, perchè siccome poco più sopra dicemmo, un tal coefficiente rappresenta una forza della stessa natura delle X, Y, Z, rapportata alla stessa unità di misura, quindi il numero che la significa deve essere attenuato, del pari che per le anzidette, dal coefficiente σ (rivedi il canone stabilito al num°. 21.).

L'espressione (22) si muta come la (16) in forza del teorema (17) nell'altra

$$(23)\qquad \int_l^k da\,.\,\lambda\left(\frac{dx}{da}\,\frac{d\delta x}{da}+\frac{dy}{da}\,\frac{d\delta y}{da}+\frac{dz}{da}\,\frac{d\delta z}{da}\right)+\sigma\Phi$$

essendo compendiati nella quantità $\sigma\Phi$ i termini che poi si debbono trascurare.

Riunendo le espressioni (18) e (23) e non essendovi nel presente caso altre condizioni da contemplare, l'equazione pel moto del filo inestendibile cavata dalla generale (1) sarà

$$(24)\quad \begin{aligned} &\int_l^k da \,.\, \left\{ \left(X - \frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x + \left(Y - \frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y + \left(Z - \frac{d^2z}{dt^2}\right)\delta z \right\} \\ &+ \int_l^k da \,.\, \lambda \left(\frac{dx}{da}\frac{d\delta x}{da} + \frac{dy}{da}\frac{d\delta y}{da} + \frac{dz}{da}\frac{d\delta z}{da} \right) = 0\,. \end{aligned}$$

Potrei qui trattenermi a far vedere le deduzioni che discendono da questa equazione; cominciando dal trasformare i termini sotto il secondo integrale per modo che le variazioni δx, δy, δz non siano affette da altre operazioni di derivazione (trasformazioni note nel calcolo delle variazioni) mi risulterebbero tre termini da compenetrarsi con quelli esistenti sotto il primo integrale, e avrei di più una quantità trinomiale che porterei ai limiti, essendo una quantità differenziale esatta sulla quale si eseguisce l'integrazione: annullando poi sotto il segno integrale i coefficienti totali delle δx, δy, δz, come Lagrange ha insegnato doversi fare, mi verrebbero tre equazioni che con molta facilità trasformerei nelle già conosciute. Potrei anche dire che per certi problemi sotto il primo integrale dell' equazione (24) conviene introdurre un fattore N(a) la cui origine dipende dalle riflessioni accennate verso il fine del num°. 22. Memore però di avere un lungo viaggio a percorrere, mi dispenso dallo stendere le indicate operazioni, essendo solo mio scopo in questo Capo, siccome dissi al principio di esso, dare le spiegazioni rimaste sottintese nella grand' opera di Lagrange: il che seguiterò a fare, colla intenzione d' invogliare sempre più i lettori a studiar finamente anche i più tenui passaggi nell'uso di un metodo il quale, vogliasi o non vogliasi, finirà col trionfare d'ogni contraria insistenza, e si stabilirà sovrano nella meccanica razionale, come il calcolo differenziale e integrale si è stabilito nell'analisi.

§. 2.

SISTEMI SUPERFICIALI.

29. Per dedurre dall'equazione meccanica (1) generale pei sistemi discreti quelle pur generali relative all'equilibrio e al moto di sistemi superficiali, limiteremo dapprima le nostre considerazioni ad un aggregato di molecole che nella disposizione antecedente ideale (rivedi il num°. 12) fossero configurate in un rettangolo; vedremo poi fra poco che questa limitazione può togliersi restando le più importanti conseguenze anche per quando la configurazione delle molecole nello stato antecedente si supponga in una superficie piana terminata da un contorno qualunque: ma giova sul principio evitare una complicazione non necessaria a comprendere quella riduzione che ci siamo proposto di schiarire. Nella supposizione pertanto del rettangolo, ammettiamo che le ascisse a cominciassero da $a=l$, e finissero con $a=k$, e le ordinate b cominciassero da $b=h$, e finissero con $b=i$. Passando alla considerazione delle coordinate x, y, z dello stato reale, i valori di tutte le x per quel aggregato di molecole potranno distribuirsi in una serie doppia che indicheremo dapprima con indici al piede come segue

$$(25)\qquad \begin{array}{lllll} x_{1,1}\,; & x_{2,1}\,; & x_{3,1}\,; & x_{4,1}\,; & \text{ec.} \\ x_{1,2}\,; & x_{2,2}\,; & x_{3,2}\,; & x_{4,2}\,; & \text{ec.} \\ x_{1,3}\,; & x_{2,3}\,; & x_{3,3}\,; & x_{4,3}\,; & \text{ec.} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{array}$$

poi coi valori corrispondenti dedotti da una sola funzione $f(a,b)$ alla maniera che soggiungiamo

$$(26)\qquad \begin{array}{l} f(l,h)\,;\; f(l+\sigma,h)\,;\; f(l+2\sigma,h)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots f(k,h) \\ f(l,h+\sigma)\,;\; f(l+\sigma,h+\sigma)\,;\; f(l+2\sigma,h+\sigma)\ldots\ldots\ldots f(k,h+\sigma) \\ f(l,h+2\sigma)\,;\; f(l+\sigma,h+2\sigma)\,;\; f(l+2\sigma,h+2\sigma)\ldots\ldots f(k,h+2\sigma) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f(l,i)\,;\; f(l+\sigma,i)\,;\; f(l+2\sigma,i)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots f(k,i)\,. \end{array}$$

Similmente dovremo immaginare che si faccia per le diverse y, e per le diverse z: cioè indicandone dapprima i valori con indici al piede e con serie doppie analoghe alla (25): poi rispettivamente con serie doppie dedotte per le y da una funzione $\varphi(a, b)$, e per le z da una funzione $\psi(a, b)$ in perfetta corrispondenza colla (26).

Ora vogliamo anche qui provare, come nel §. precedente, che dovendo le forme f, φ, ψ non mutarsi mai per tutto il sistema, vengono a introdursi tante equazioni di condizione quante sono le coordinate dei diversi punti, meno tre: e dedursene per conseguenza che le variazioni δx, δy, δz delle coordinate dei diversi punti mutano da un punto all'altro alla stessa maniera con cui mutano i valori delle coordinate nella serie doppia (26) e nelle altre due simili: non restare quindi che tre variazioni veramente indipendenti ed arbitrarie. Immaginiamo dalle due equazioni

$$x_{1,1} = f(l, h)\,; \quad y_{1,1} = \varphi(l, h)$$

cavati i valori inversi di l, h, che segneremo mediante le

$$l = p(x_{1,1},\, y_{1,1})\,; \quad h = q(x_{1,1},\, y_{1,1})\,, \tag{27}$$

e sostituiti in tutti i termini della serie doppia (26). Il confronto delle espressioni che risultano dopo tale sostituzione coi valori corrispondenti della serie doppia (25) darà tante equazioni fra varie coordinate dei diversi punti, quanti sono i punti: una sarà identica e le altre saranno equazioni di condizione. Prendendone le variate, e ponendo per abbreviare

$$(28)\quad \begin{cases} \xi = p'(x_{1,1})\,\delta x_{1,1} + p'(y_{1,1})\,\delta y_{1,1} \\ \eta = q'(x_{1,1})\,\delta x_{1,1} + q'(y_{1,1})\,\delta y_{1,1}\,; \end{cases}$$

poscia indicando con un apice in alto le derivate per p, e con un apice al basso quelle per q, avremo

$$
(29)\quad
\begin{aligned}
\delta x_{1,1} &= f'(p,q)\,\xi + f_1(p,q)\,\eta \\
\delta x_{2,1} &= f'(p+\sigma,q)\,\xi + f_1(p+\sigma,q)\,\eta \\
\delta x_{3,1} &= f'(p+2\sigma,q)\,\xi + f_1(p+2\sigma,q)\,\eta \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\delta x_{1,2} &= f'(p,q+\sigma)\,\xi + f_1(p,q+\sigma)\,\eta \\
\delta x_{2,2} &= f'(p+\sigma,q+\sigma)\,\xi + f_1(p+\sigma,q+\sigma)\,\eta \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

Presentemente rimettendo per p, q i valori dati dalle (27) si vedrà che queste variazioni (29) variano come i termini della serie doppia (26), essendo ξ, η quantità che rimangono le medesime per tutte. In maniera affatto simile colla sostituzione dei valori (27) nei termini della serie doppia simile alla (26) e formata mediante la funzione $\varphi(a,b)$, comporremo un altro numero di equazioni di condizione eguale a quello delle molecole: una però di tali equazioni sarebbe identica. Prendendone poi le variate, potremo provare che anche le variazioni $\delta y_{1,1}$; $\delta y_{2,1}$; $\delta y_{3,1}$; ..... $\delta y_{1,2}$; $\delta y_{2,2}$; ..... variano da punto a punto come le (29) e quindi come i termini della (26). Volendo da ultimo venire alle stesse conseguenze anche per un terzo numero di equazioni di condizione eguale al numero delle molecole, compresavi una identica, e per le variazioni $\delta z_{1,1}$; $\delta z_{2,1}$; $\delta z_{3,1}$; .... $\delta z_{1,2}$; $\delta z_{2,2}$ ...., converrà assumere le equazioni $x_{1,1}=f(l,h)$; $z_{1,1}=\psi(l,h)$ onde dedurne i valori inversi del l, h analogamente al già detto scrivendo le (27), e rifare per le x, e per le z il medesimo discorso sopra tenuto per le x e per le y. I valori di tutte le variazioni (29) e delle altre due serie corrispondenti conterranno le tre sole variazioni $\delta x_{1,1}$; $\delta y_{1,1}$; $\delta z_{1,1}$ rimaste assolutamente arbitrarie. Se a taluno paresse risultare pei sistemi superficiali dal principio della continuità un' altra equazione di condizione fra le coordinate, oltre quelle di numero eguale al triplo del numero delle molecole, meno tre, il suo dubbio potrebbe dissiparsi per mezzo di un ragionamento simile al praticato sul fine del num°. 24.

30. Assicurati così che tutte le quantità componenti il trinomio sottoposto al primo segno S nella equazione generale (1) variano da molecola a molecola alla maniera dei termini di una serie doppia, potremo invece di S mettere il segno di una doppia sommatoria o di un duplicato integrale finito, il quale sia definito in quanto ad a fra i limiti $a=l$, $a=k+\sigma$, e in quanto a b fra i limiti $b=h$, $b=i+\sigma$; avremo cioè invece di quella prima parte l'espressione

(30)
$$\Sigma_l^{k+\sigma}\Delta a\Sigma_h^{i+\sigma}\Delta b\,.\,\sigma^2\left\{\left(X-\frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x+\left(Y-\frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y+\left(Z-\frac{d^2z}{dt^2}\right)\delta z\right\}$$

nella quale ho introdotto il fattore σ^2 invece della lettera m, giusta l'esposto ai numeri 21, 22, e avrei anche potuto (in conformità al detto verso il fine del num°. 22.) far entrare un altro fattore N funzione di a, b, che ommetto non essendo necessario al mio intento.

Non riuscirà ora difficile capire che se la configurazione delle molecole nello stato antecedente non sarà un rettangolo ma una superficie piana limitata da un contorno fatto di linee qualsivogliono, siccome supponemmo anche al num.° 12., non avremo più i limiti dell' integrale finito duplicato (30) costanti e fra di loro indipendenti, ma che nel resto sussisteranno tutte le precedenti deduzioni. Vuolsi dire che in tal caso le diverse linee orizzontali della serie doppia equivalente, non saranno fatte di un egual numero di termini, un tal numero cambierà dipendentemente dal cambiare che fa la differenza dei valori estremi della a; invece della b poi vi sarà una funzione di a costante in ogni linea orizzontale (rivedi la (26)) ove a avrà il valore dell'ascissa per quel punto della linea di contorno che è insieme il primo di quella fila orizzontale. La somma di tutti i termini di una così fatta serie doppia equivarrà ancora ad un integrale duplicato: solamente i limiti di b saranno funzioni di a, e i limiti di a saranno i valori di questa variabile la cui differenza è la massima. Pertanto in questo caso più generale basterà indicare i segni integrali della espressione (30) scrivendo

$\Sigma \Delta a \, \Sigma \Delta b$, e intendendo che i limiti debbano essere opportunamente determinati all' oggetto di comprendere tutti i punti fisici del sistema.

Operata una tale sostituzione di segni integrali nella espressione (30), faremo un altro passo corrispondentemente al già fatto per passare dalla espressione (16) alla (18). L'applicazione del teorema (17) replicata due volte di seguito, avvertendo di scomporre il fattore σ^2 per dare un σ semplice a ciascuno dei due integrali, ci fa conoscere che la prima parte dell'equazione generale (1) si trasforma quando trattasi di un sistema superficiale, nella quantità seguente

(31)
$$\int da \int db \,.\, \left\{ \left(X - \frac{d^2 x}{dt^2}\right) \delta x + \left(Y - \frac{d^2 y}{dt^2}\right) \delta y + \left(Z - \frac{d^2 z}{dt^2}\right) \delta z \right\} + \sigma \Psi$$

intendendo compresi nell' aggiunta $\sigma\Psi$ tutti i termini che poi si debbono ommettere, e ritenendo che il doppio integrale continuo va definito secondo i limiti assegnati alle variabili dalle linee circoscriventi la materia nella precedente disposizione.

Potrei qui pure immaginare una condizione estensibile a tutti i punti del sistema e far vedere com' essa ci porga un altro integrale duplicato simile al precedente e da sommarsi con esso, in corrispondenza a quanto dissi quando mostrai che l' espressione (23) si sommava colla (18) per darci l' equazione (24). Ma ormai il lettore deve aver capito l' andamento da tenersi. A me basta aver dimostrato che il segno S della equazione generale (1) si cambia pei sistemi superficiali in un duplicato integrale continuo definito, come cambiavasi in un integrale definito semplice pei sistemi lineari; con quel di più che parevami opportuno onde condurci passo passo a penetrare nelle varie sue parti quel metodo ammirabile del quale mi sono fatto propugnatore.

§. 3.

SISTEMI A TRE DIMENSIONI.

31. Passando a dire dei sistemi a tre dimensioni, anche le equazioni generali dell'equilibrio e del moto per essi, possono dedursi dalla solita (1) pei sistemi discreti: solamente in questo caso quelle somme si tramutano in integrali triplicati, il che resta a vedere. Limiteremo dapprima le nostre considerazioni ad un aggregato di molecole le quali nella disposizione antecedente ideale presentassero la figura di un parallelepipedo rettangolo. In tale supposizione le molte x appartenenti a quelle molecole trasportate allo stato reale potranno distribuirsi in una serie tripla che indicheremo mediante un succedersi di serie doppie, primieramente con indici al piede, come segue

$$\begin{array}{llll}
x_{1,1,1}\,; & x_{2,1,1}\,; & x_{3,1,1}\,; & \text{ec.} \\
x_{1,2,1}\,; & x_{2,2,1}\,; & x_{3,2,1}\,; & \text{ec.} \\
x_{1,3,1}\,; & x_{2,3,1}\,; & x_{3,3,1}\,; & \text{ec.} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\hline
x_{1,1,2}\,; & x_{2,1,2}\,; & x_{3,1,2}\,; & \text{ec.} \\
x_{1,2,2}\,; & x_{2,2,2}\,; & x_{3,2,2}\,; & \text{ec.} \\
x_{1,3,2}\,; & x_{2,3,2}\,; & x_{3,3,2}\,; & \text{ec.} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\hline
x_{1,1,3}\,; & x_{2,1,3}\,; & x_{3,1,3}\,; & \text{ec.} \\
x_{1,2,3}\,; & x_{2,2,3}\,; & x_{3,2,3}\,; & \text{ec.} \\
x_{1,3,3}\,; & x_{2,3,3}\,; & x_{3,3,3}\,; & \text{ec.} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\hline
\text{ec.} & \text{ec.} & \text{ec.} &
\end{array} \qquad (32)$$

e poi mutando opportunamente i valori delle a, b, c in una stessa funzione $f(a, b, c)$, ritenendo che la variabile a cominci da $a = l$, e proceda per aumenti costanti σ fino ad $a = k$, la b prenda valori fra i limiti $b = h$, $b = i$, e la c fra i limiti $c = n$, $c = j$.

Quest' altra serie tripla i cui termini debbono intendersi uno ad uno egnagliati a termini corrispondenti della precedente (32), è la seguente

$$
\begin{array}{l}
f(l, h, n)\,;\ f(l+\sigma, h, n)\,;\ \ldots\ldots f(k, h, n) \\
f(l, h+\sigma, n)\,;\ f(l+\sigma, h+\sigma, n)\,;\ \ldots\ldots f(k, h+\sigma, n) \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
f(l, i, n)\,;\ f(l+\sigma, i, n)\,;\ \ldots\ldots f(k, i, n) \\
\hline
f(l, h, n+\sigma)\,;\ f(l+\sigma, h, n+\sigma)\,;\ \ldots\ldots f(k, h, n+\sigma) \\
f(l, h+\sigma, n+\sigma)\,;\ f(l+\sigma, h+\sigma, n+\sigma)\,;\ \ldots\ldots f(k, h+\sigma, n+\sigma) \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
f(l, i, n+\sigma)\,;\ f(l+\sigma, i, n+\sigma)\,;\ \ldots\ldots f(k, i, n+\sigma) \\
\hline
\end{array}
\tag{33}
$$

essendo l' ultima delle serie doppie di cui la tripla è composta

$$
\begin{array}{l}
f(l, h, j)\,;\ f(l+\sigma, h, j)\,;\ \ldots\ldots f(k, h, j) \\
f(l, h+\sigma, j)\,;\ f(l+\sigma, h+\sigma, j)\,;\ \ldots\ldots f(k, h+\sigma, j) \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
f(l, i, j)\,;\ f(l+\sigma, i, j)\,;\ \ldots\ldots f(k, i, j)\,.
\end{array}
$$

E quanto qui si è detto dei valori delle diverse x, potremo ripeterlo pei valori delle diverse y, indicandoli prima, come nella (32), per mezzo d' indici al piede, poi deducendoli tutti, come nella (33) da una stessa funzione $\varphi(a, b, c)$; così dei valori delle diverse z, deducendoli tutti nel secondo quadro da una stessa funzione $\psi(a, b, c)$.

Soggiungeremo, come nei casi simili degli altri due sistemi, che dovendo le forme f, ϕ, ψ non mutarsi per tutto il corpo, si hanno tante equazioni di condizione, quante sono le coordinate dei diversi punti, meno tre: e che quindi le variazioni δx, δy, δz cambiano da un punto all'altro alla stessa maniera che i valori delle coordinate nella serie tripla (33) e nelle due analoghe per le y, e per le z.

A veder chiaro quello che qui abbiamo asserito, immaginiamo che dalle tre equazioni

$$x_{1,1,1}=f(l,h,n)\,;\; y_{1,1,1}=\phi(l,h,n)\,;\; z_{1,1,1}=\psi(l,h,n)$$

siano stati dedotti i valori inversi

$$(34)\qquad \begin{aligned} l &= p\,(x_{1,1,1},\, y_{1,1,1},\, z_{1,1,1}) \\ h &= q\,(x_{1,1,1},\, y_{1,1,1},\, z_{1,1,1}) \\ n &= r\,(x_{1,1,1},\, y_{1,1,1},\, z_{1,1,1}) \end{aligned}$$

e sostituiti nelle espressioni di tutti i termini della (33). Allora il confronto delle (32), (33), termine per termine, ci darà tante equazioni fra varie coordinate di diversi punti, quanti sono tutti i punti fisici del sistema: una di tali equazioni sarà identica, e le altre saranno equazioni di condizione. Prendendone le variate, e ponendo per abbreviare

$$\begin{aligned} \xi &= p'(x_{1,1,1})\,\delta x_{1,1,1} + p'(y_{1,1,1})\,\delta y_{1,1,1} + p'(z_{1,1,1})\,\delta z_{1,1,1} \\ \eta &= q'(x_{1,1,1})\,\delta x_{1,1,1} + q'(y_{1,1,1})\,\delta y_{1,1,1} + q'(z_{1,1,1})\,\delta z_{1,1,1} \\ \zeta &= r'(x_{1,1,1})\,\delta x_{1,1,1} + r'(y_{1,1,1})\,\delta y_{1,1,1} + r'(z_{1,1,1})\,\delta z_{1,1,1} \end{aligned}$$

otterremo

$$(35)\qquad \begin{aligned} \delta x_{1,1,1} &= f'(p,q,r)\,\xi + f_{\prime}(p,q,r)\,\eta + {}'f(p,q,r)\,\zeta \\ \delta x_{2,1,1} &= f'(p+\sigma,q,r)\,\xi + f_{\prime}(p+\sigma,q,r)\,\eta + {}'f(p+\sigma,q,r)\,\zeta \\ \delta x_{3,1,1} &= f'(p+2\sigma,q,r)\,\xi + f_{\prime}(p+2\sigma,q,r)\,\eta + {}'f(p+2\sigma,q,r)\,\zeta \\ &\text{ec.} \qquad\qquad \text{ec.} \qquad\qquad \text{ec.} \end{aligned}$$

dove gli apici in f', $f_{\prime}$, $'f$ indicano derivate parziali per p, q, r rispettivamente.

In questi valori (35) delle variazioni $\delta x_{1,1,1}$, $\delta x_{2,1,1}$ ec. intendiamo risostituiti alle p, q, r i valori l, h, n che le uguagliano (equazioni (34)): vedremo che i secondi membri di dette equazioni (35) muteranno precisamente come i diversi valori delle x nelle espressioni (33). Lo stesso potremo dire delle variazioni delle y e delle variazioni delle z.

In conseguenza del fin qui detto tutti i trinomj che nella equazione generale (1) sono abbracciati dal primo segno sommatorio S, comporranno visibilmente una serie tripla, la quale potrà esprimersi mediante una tripla sommatoria o un integrale finito triplicato, come segue

$$(36)\qquad \Sigma_l^{l+\sigma}\Delta a\,\Sigma_h^{i+\sigma}\Delta b\,\Sigma_n^{j+\sigma}\Delta c\,.\,\sigma^3\left\{\left(X-\frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x+\left(Y-\frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y+\left(Z-\frac{d^2z}{dt^2}\right)\delta z\right\}$$

dove vedesi introdotto il fattore σ^3 in luogo della lettera m, di conformità al già dimostrato nei numeri 18, 21.

32. Diventa ora facile l'argomentare, in correlazione con quanto si disse al num°. 30 pei sistemi superficiali, che se la configurazione delle molecole nello stato antecedente ideale non sarà più quella di una sola porzione della materia foggiata in parallelepipedo rettangolo, ma presenterà un volume conterminato da superficie qualsivogliono, sussisterà ancora il ragionamento diretto a provare che la somma dei trinomj colle forze applicate a tutte le molecole, si può compendiare mediante un triplo integrale finito definito; però i limiti di tale integrale triplicato, invece di essere fra di loro indipendenti, come nella precedente espressione (36), saranno funzioni delle variabili che ancora restano dipendentemente dalla equazione della superficie che terminava il volume occupato dalla materia nello stato precedente. In tale supposizione converrà surrogare alla espressione (36) quest' altra

$$(37)\qquad \Sigma\Delta a\,\Sigma\Delta b\,\Sigma\Delta c\,.\,\sigma^3\left\{\left(X-\frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x+\left(Y-\frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y+\left(Z-\frac{d^2z}{dt^2}\right)\delta z\right\}$$

intendendo i limiti opportunamente determinati, come si è detto.

Ora conviene fare il passo per tradurre l' integrale triplicato finito in un simile integrale continuo, applicando tre volte di seguito il teorema scritto nella equazione (17) e avvertendo di scomporre il fattore σ^3 in maniera da dare un σ semplice a ciascuno dei tre integrali. Giungiamo per tal guisa all'espressione

$$(38)\quad \int da \int db \int dc \,.\, \left\{ \left(X - \frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x + \left(Y - \frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y + \left(Z - \frac{d^2z}{dt^2}\right)\delta z \right\} + \sigma\Psi$$

consej al solito di dover trascurare l' aggiunta $\sigma\Psi$, e di dover prendere i limiti dell'integrale triplicato quali li assegna la superficie circoscrivente la materia nella precedente disposizione.

Visto così come deve interpretarsi il segno S nella prima parte della equazione generale (1) quando il sistema è continuo a tre dimensioni, potrei aggiungere altri integrali triplicati provenienti da equazioni di condizione che si estendessero a tutti i punti del sistema: ed anche integrali duplicati che venissero introdotti nell' equazione generale del moto e dell'equilibrio da pressioni esercitate alla superficie del corpo. L' andamento da tenersi per simili aggiunte parmi abbastanza dichiarato dopo l' esposto nei paragrafi di questo Capo. Credo poi più conveniente trattare a parte alcune delle questioni per le quali si verifica quanto ora si è accennato.

CAPO III.

Del moto e dell' equilibrio di un corpo qualunque rigido.

Mi propongo di dare in questo Capo quelle equazioni spettanti al moto di un punto qualunque di un corpo rigido, che Lagrange ha ommesse, e delle quali dissi nel preambolo della Memoria, che se il nostro Autore le avesse date, come gli era facile usando de' suoi metodi, avrebbe prevenuto il meglio di quanto è stato trovato di poi. Per avviarci in tale ricerca seguendo l' andamento che io ho preso a difendere e raccomandare, ci è prima necessario esprimere per mezzo di equazioni di condizione la rigidità del corpo.

33. Chiarissima è l'idea della rigidità in un corpo: si suppone che per effetto di essa le distanze rispettive di tutti i punti fisici del corpo siano invariabili durante qualunque movimento. Questa idea si può associare mentalmente con quella di una qualunque distribuzione della materia, sia a densità costante, sia a densità variabile: assumeremo la seconda supposizione per maggiore generalità.

Immaginiamo tre assi rettangolari connessi invariabilmente col corpo per modo che l'accompagnino in tutti i suoi movimenti ulteriori; dette allora

$$p\,(a, b, c)\,; \quad q\,(a, b, c)\,; \quad r\,(a, b, c)$$

le coordinate di una molecola qualunque del corpo relativamente a tali assi, queste p, q, r saranno (precisamente come le x, y, z del num°. 3.) quelle funzioni delle a, b, c che esprimono la struttura del corpo nello stato reale; e le coordinate x, y, z della stessa molecola dopo un tempo t relativamente a tre assi fissi nello spazio, saranno funzioni lineari delle p, q, r date dalle equazioni

$$(1) \qquad \begin{aligned} x &= f + \alpha_1 p + \beta_1 q + \gamma_1 r \\ y &= g + \alpha_2 p + \beta_2 q + \gamma_2 r \\ z &= h + \alpha_3 p + \beta_3 q + \gamma_3 r \end{aligned}$$

essendo f, g, h; $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$; $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$; $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ dodici quantità funzioni del solo tempo t senza le a, b, c; cioè f, g, h le coordinate che alla fine del tempo t corrispondono al punto d'origine degli assi fissi nel corpo e mobili con esso, e $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$; $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$; $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ nove quantità angolari di cui ecco la significazione

$$(2) \qquad \begin{aligned} \alpha_1 &= \cos\,(p.x)\,; & \beta_1 &= \cos\,(q.x)\,; & \gamma_1 &= \cos\,(r.x) \\ \alpha_2 &= \cos\,(p.y)\,; & \beta_2 &= \cos\,(q.y)\,; & \gamma_2 &= \cos\,(r.y) \\ \alpha_3 &= \cos\,(p.z)\,; & \beta_3 &= \cos\,(q.z)\,; & \gamma_3 &= \cos\,(r.z)\,. \end{aligned}$$

Fra queste nove quantità si hanno le ventuna equazioni

$$(3)\qquad \begin{array}{ll} \alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2=1\,; & \alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_3=0 \\ \beta_1^2+\beta_2^2+\beta_3^2=1\,; & \alpha_1\gamma_1+\alpha_2\gamma_2+\alpha_3\gamma_3=0 \\ \gamma_1^2+\gamma_2^2+\gamma_3^2=1\,; & \beta_1\gamma_1+\beta_2\gamma_2+\beta_3\gamma_3=0 \end{array}$$

$$(4)\qquad \begin{array}{ll} \alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2=1\,; & \alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2+\gamma_1\gamma_2=0 \\ \alpha_2^2+\beta_2^2+\gamma_2^2=1\,; & \alpha_1\alpha_3+\beta_1\beta_3+\gamma_1\gamma_3=0 \\ \alpha_3^2+\beta_3^2+\gamma_3^2=1\,; & \alpha_2\alpha_3+\beta_2\beta_3+\gamma_2\gamma_3=0 \end{array}$$

$$(5)\qquad \begin{array}{lll} \alpha_1=\beta_2\gamma_3-\beta_3\gamma_2\,; & \alpha_2=\beta_3\gamma_1-\beta_1\gamma_3\,; & \alpha_3=\beta_1\gamma_2-\beta_2\gamma_1 \\ \beta_1=\alpha_3\gamma_2-\alpha_2\gamma_3\,; & \beta_2=\alpha_1\gamma_3-\alpha_3\gamma_1\,; & \beta_3=\alpha_2\gamma_1-\alpha_1\gamma_2 \\ \gamma_1=\alpha_2\beta_3-\alpha_3\beta_2\,; & \gamma_2=\alpha_3\beta_1-\alpha_1\beta_3\,; & \gamma_3=\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1 \end{array}$$

le quali però sono sostanzialmente soltanto sei, cioè le (3), o le (4), cavandosi tutte le altre da combinazioni delle medesime. Ciò è notissimo, ed anche è noto che la deduzione delle (4), (5) dalle (3) può farsi per solo processo analitico, come può vedersi nella prima Nota ch' io posi alla Memoria dell'anno 1832, citata nel preambolo di questa, e in una Memoria del Sig. Cavaliere Gaetano Giorgini inserita nel Tomo XXI degli Atti di questa Società.

34. Assumiamo per comodo le seguenti denominazioni

$$(6)\qquad \begin{aligned} t_1&=\left(\frac{dx}{da}\right)^2+\left(\frac{dy}{da}\right)^2+\left(\frac{dz}{da}\right)^2 \\ t_2&=\left(\frac{dx}{db}\right)^2+\left(\frac{dy}{db}\right)^2+\left(\frac{dz}{db}\right)^2 \\ t_3&=\left(\frac{dx}{dc}\right)^2+\left(\frac{dy}{dc}\right)^2+\left(\frac{dz}{dc}\right)^2 \\ t_4&=\frac{dx}{da}\frac{dx}{db}+\frac{dy}{da}\frac{dy}{db}+\frac{dz}{da}\frac{dz}{db} \\ t_5&=\frac{dx}{da}\frac{dx}{dc}+\frac{dy}{da}\frac{dy}{dc}+\frac{dz}{da}\frac{dz}{dc} \\ t_6&=\frac{dx}{db}\frac{dx}{dc}+\frac{dy}{db}\frac{dy}{dc}+\frac{dz}{db}\frac{dz}{dc} \end{aligned}$$

le quali fanno un gran giuoco, come apparirà dall'attuale Capo e dai successivi.

Dalle equazioni (1) derivate per a, b, c otteniamo le nove

$$
(7)\qquad
\begin{aligned}
\frac{dx}{da} &= \alpha_1 \frac{dp}{da} + \beta_1 \frac{dq}{da} + \gamma_1 \frac{dr}{da}\\
\frac{dy}{da} &= \alpha_2 \frac{dp}{da} + \beta_2 \frac{dq}{da} + \gamma_2 \frac{dr}{da}\\
\frac{dz}{da} &= \alpha_3 \frac{dp}{da} + \beta_3 \frac{dq}{da} + \gamma_3 \frac{dr}{da}\\
\frac{dx}{db} &= \alpha_1 \frac{dp}{db} + \beta_1 \frac{dq}{db} + \gamma_1 \frac{dr}{db}\\
\frac{dy}{db} &= \alpha_2 \frac{dp}{db} + \beta_2 \frac{dq}{db} + \gamma_2 \frac{dr}{db}\\
\frac{dz}{db} &= \alpha_3 \frac{dp}{db} + \beta_3 \frac{dq}{db} + \gamma_3 \frac{dr}{db}\\
\frac{dx}{dc} &= \alpha_1 \frac{dp}{dc} + \beta_1 \frac{dq}{dc} + \gamma_1 \frac{dr}{dc}\\
\frac{dy}{dc} &= \alpha_2 \frac{dp}{dc} + \beta_2 \frac{dq}{dc} + \gamma_2 \frac{dr}{dc}\\
\frac{dz}{dc} &= \alpha_3 \frac{dp}{dc} + \beta_3 \frac{dq}{dc} + \gamma_3 \frac{dr}{dc}
\end{aligned}
$$

La sostituzione di questi valori nei secondi membri delle (6) può sembrare sulle prime operazione alquanto prolissa, ma viene facilitata dalla simmetria, e si scorge senza difficoltà, che in virtù delle equazioni (3) risultano le sei

$$
(8)\qquad
\begin{aligned}
t_1 &= \left(\frac{dp}{da}\right)^2 + \left(\frac{dq}{da}\right)^2 + \left(\frac{dr}{da}\right)^2\\
t_2 &= \left(\frac{dp}{db}\right)^2 + \left(\frac{dq}{db}\right)^2 + \left(\frac{dr}{db}\right)^2\\
t_3 &= \left(\frac{dp}{dc}\right)^2 + \left(\frac{dq}{dc}\right)^2 + \left(\frac{dr}{dc}\right)^2\\
t_4 &= \frac{dp}{da}\frac{dp}{db} + \frac{dq}{da}\frac{dq}{db} + \frac{dr}{da}\frac{dr}{db}\\
t_5 &= \frac{dp}{da}\frac{dp}{dc} + \frac{dq}{da}\frac{dq}{dc} + \frac{dr}{da}\frac{dr}{dc}\\
t_6 &= \frac{dp}{db}\frac{dp}{dc} + \frac{dq}{db}\frac{dq}{dc} + \frac{dr}{db}\frac{dr}{dc}
\end{aligned}
$$

Queste equazioni, se ben si considerano, meritano molta attenzione. Esse c'insegnano primieramente che i sei trinomj t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6 sono sei quantità indipendenti dal tempo, cioè tali che la variabile t entrando nelle singole loro parti, esce nondimeno di per se stessa dal complesso di tutte. Ma ciò che più importa si è che *esse sono le cercate equazioni di condizione esprimenti la rigidità del corpo.* Basta infatti riflettere che i secondi loro membri (per essere p, q, r coordinate relative ad assi fissi nel corpo) sono quantità invariabili in qualunque ipotesi di movimento, e che perciò, prendendo le variate di tali equazioni, si ottengono le sei

$$(9)\quad \begin{array}{lll} \delta t_1 = 0\,; & \delta t_2 = 0\,; & \delta t_3 = 0 \\ \delta t_4 = 0\,; & \delta t_5 = 0\,; & \delta t_6 = 0 \end{array}$$

le quali sussistono per ogni punto fisico del corpo. Può notarsi che le equazioni (8) ovvero (9) sono veramente le equazioni di condizione significanti la rigidità del corpo, in quanto non contengono le dodici quantità $f, g, h\,;\ \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\,;\ \beta_1, \beta_2, \beta_3\,;\ \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ visibili nelle equazioni (1). Queste dodici quantità (che in virtù delle equazioni (3) si riducono a sei) possono avere valori arbitrarj, essendo noi liberi di piantare diversamente in mille modi gli assi fissi nel corpo: il che equivale a dire esservi infinite terne di assi fissi nel corpo rimpetto ai quali le coordinate p, q, r sono invariabili per una stessa molecola. Ma questo concetto che ci dà propriamente l' idea della rigidità, è un concetto il quale, con sott'occhio le equazioni (1), rimane nella nostra mente senza trasfondersi allo scritto, essendo quelle dodici lettere per se stesse mute e incapaci a ridircelo. Si trasfonde esso veramente allo scritto quando si hanno equazioni come le (8), (9) tra espressioni differenziali, le quali dice Lagrange (Leçons sur le calcul des fonctions. Paris 1806 in 8°. pag. 162-163) sono più generali delle equazioni primitive o integrali, ed equivalgono a tutte insieme tali equazioni primitive che non differirebbero fra loro se non pel valore delle costanti sparite nelle equazioni differenziali.

35. Le equazioni di condizione (9) sono della stessa natura di quelle (rivedi l'equazione (19) del Capo precedente numeri 27. 28) per le quali cercammo di stabilire un principio generale circa al modo d'introdurne la significazione nell'equazione generale della meccanica per mezzo di sommatorie che nel caso attuale si traducono in integrali triplicati. Riletti i citati numeri, e riassunto l'esposto nel §. 3. del Capo precedente, non si avrà alcuna difficoltà ad ammettere, che chiamando A, B, C, D, E, F sei coefficienti indeterminati funzioni delle a, b, c o delle x, y, z (rivedi le equazioni (7) e (8) del num°. 9.), l'equazione generale (1) nel caso del moto de' corpi rigidi si trasformerà nella seguente

$$\int da \int db \int dc \,.\, \left\{ \left(X - \frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x + \left(Y - \frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y + \left(Z - \frac{d^2z}{dt^2}\right)\delta z \right\}$$

(10)

$$+ \int da \int db \int dc \,.\, [\, A\delta t_1 + B\delta t_2 + C\delta t_3 + D\delta t_4 + E\delta t_5 + F\delta t_6 \,] + \Omega = 0$$

dove ho inteso di comprendere nella lettera Ω quei termini che venissero introdotti nell'equazione generale da forze applicate solamente a superficie esterne, o a linee, o a punti determinati del sistema: termini però i quali non potrebbero avere alcuna loro parte affetta da un segno d'integrale triplicato, come la parte scritta.

36. Prendansi per t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6 i valori dati dai secondi membri delle equazioni (6), e il polinomio sottoposto al secondo segno integrale della precedente equazione generale (10) si troverà equivalente alla quantità che segue

$$
(11)\quad
\begin{aligned}
&2A\left(\frac{dx}{da}\frac{d\delta x}{da}+\frac{dy}{da}\frac{d\delta y}{da}+\frac{dz}{da}\frac{d\delta z}{da}\right)\\
&+2B\left(\frac{dx}{db}\frac{d\delta x}{db}+\frac{dy}{db}\frac{d\delta y}{db}+\frac{dz}{db}\frac{d\delta z}{db}\right)\\
&+2C\left(\frac{dx}{dc}\frac{d\delta x}{dc}+\frac{dy}{dc}\frac{d\delta y}{dc}+\frac{dz}{dc}\frac{d\delta z}{dc}\right)\\
&+D\left(\frac{dx}{da}\frac{d\delta x}{db}+\frac{dy}{da}\frac{d\delta y}{db}+\frac{dz}{da}\frac{d\delta z}{db}+\right.\\
&\qquad\left.\frac{dx}{db}\frac{d\delta x}{da}+\frac{dy}{db}\frac{d\delta y}{da}+\frac{dz}{db}\frac{d\delta z}{da}\right)\\
&+E\left(\frac{dx}{da}\frac{d\delta x}{dc}+\frac{dy}{da}\frac{d\delta y}{dc}+\frac{dz}{da}\frac{d\delta z}{dc}+\right.\\
&\qquad\left.\frac{dx}{dc}\frac{d\delta x}{da}+\frac{dy}{dc}\frac{d\delta y}{da}+\frac{dz}{dc}\frac{d\delta z}{da}\right)\\
&+F\left(\frac{dx}{db}\frac{d\delta x}{dc}+\frac{dy}{db}\frac{d\delta y}{dc}+\frac{dz}{db}\frac{d\delta z}{dc}+\right.\\
&\qquad\left.\frac{dx}{dc}\frac{d\delta x}{db}+\frac{dy}{dc}\frac{d\delta y}{db}+\frac{dz}{dc}\frac{d\delta z}{db}\right).
\end{aligned}
$$

I ventisette termini dei quali questa quantità è composta, possono tutti subire una trasformazione analoga a quelle usate nel calcolo delle variazioni e diretta a ridurre la quantità (11) siccome risultante di due parti, la prima delle quali contenga le $\delta x, \delta y, \delta z$ non affette da alcuna operazione di derivazione, e la seconda consti di derivate esatte o per a o per b o per c. Le trasformazioni possono eseguirsi tutte sui due modelli

$$
(12)\quad
\begin{aligned}
2A\frac{dx}{da}\frac{d\delta x}{da} &= -\frac{d.\left(2A\frac{dx}{da}\right)}{da}.\delta x+\frac{d.\left(2A\frac{dx}{da}\delta x\right)}{da}\\
D\frac{dx}{da}\frac{d\delta x}{db} &= -\frac{d.\left(D\frac{dx}{da}\right)}{db}.\delta x+\frac{d.\left(D\frac{dx}{da}\delta x\right)}{db}
\end{aligned}
$$

dopo di che la quantità (11) prende la forma

$$(13)\quad \begin{aligned} &\left(\frac{dL_1}{da}+\frac{dM_1}{db}+\frac{dN_1}{dc}\right)\delta x\\ &+\left(\frac{dL_2}{da}+\frac{dM_2}{db}+\frac{dN_2}{dc}\right)\delta y\\ &+\left(\frac{dL_3}{da}+\frac{dM_3}{db}+\frac{dN_3}{dc}\right)\delta z+T \end{aligned}$$

essendo

$$(14)\quad \begin{aligned} L_1 &= -2A\frac{dx}{da}-D\frac{dx}{db}-E\frac{dx}{dc}\\ M_1 &= -D\frac{dx}{da}-2B\frac{dx}{db}-F\frac{dx}{dc}\\ N_1 &= -E\frac{dx}{da}-F\frac{dx}{db}-2C\frac{dx}{dc}\\ L_2 &= -2A\frac{dy}{da}-D\frac{dy}{db}-E\frac{dy}{dc}\\ M_2 &= -D\frac{dy}{da}-2B\frac{dy}{db}-F\frac{dy}{dc}\\ N_2 &= -E\frac{dy}{da}-F\frac{dy}{db}-2C\frac{dy}{dc}\\ L_3 &= -2A\frac{dz}{da}-D\frac{dz}{db}-E\frac{dz}{dc}\\ M_3 &= -D\frac{dz}{da}-2B\frac{dz}{db}-F\frac{dz}{dc}\\ N_3 &= -E\frac{dz}{da}-F\frac{dz}{db}-2C\frac{dz}{dc} \end{aligned}$$

$$(15)\quad \begin{aligned} T = &-\frac{d\,.\,(L_1\,\delta x+L_2\,\delta y+L_3\,\delta z)}{da}\\ &-\frac{d\,.\,(M_1\,\delta x+M_2\,\delta y+M_3\,\delta z)}{db}\\ &-\frac{d\,.\,(N_1\,\delta x+N_2\,\delta y+N_3\,\delta z)}{dc}\,. \end{aligned}$$

Sostituita la quantità (13) sotto il secondo segno integrale della equazione generale (10), e compenetrati i due integrali triplicati in un solo, è manifesto che sulle tre parti di cui è formata la quantità T (equazione (15)) può eseguirsi alcuna delle integrazioni per a, o per b, o per c, e che quindi queste parti vanno a mettersi sotto integrali duplicati. Esse allora vengono ad unirsi colle simili comprese (se pur vi sono) nella quantità Ω della equazione (10) sottoposte a segni d' integrali duplicati e provenienti da forze applicate a soli punti di una superficie. Quanto alla quantità che rimane sotto l' integrale triplicato, vi si debbono, secondo c' insegna il calcolo delle variazioni, annullare i tre coefficienti totali delle variazioni δx, δy, δz; così si hanno le tre equazioni pel moto del punto generico che sono

$$
(16) \qquad
\begin{aligned}
&X - \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dL_1}{da} + \frac{dM_1}{db} + \frac{dN_1}{dc} = 0 \\
&Y - \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dL_2}{da} + \frac{dM_2}{db} + \frac{dN_2}{dc} = 0 \\
&Z - \frac{d^2z}{dt^2} + \frac{dL_3}{da} + \frac{dM_3}{db} + \frac{dN_3}{dc} = 0 .
\end{aligned}
$$

37. Ora si vorrebbero tramutare queste equazioni (16) in altre che non contenessero traccia delle a, b, c, e non constassero che di quantità spettanti allo stato reale del corpo. A questo oggetto mi è necessaria una breve digressione per dimostrare un principio analitico già messo a pag. 205 del Tomo XXI di questi Atti. Ora ne darò una dimostrazione un poco diversa, tanto più volentieri in quanto è legata coll' altra di tre equazioni identiche che rassomigliano a quella della continuità, e possono venir utili anche altrimenti. Ecco in che consiste.

Se si ha un trinomio come

$$\frac{dL}{da} + \frac{dM}{db} + \frac{dN}{dc}$$

dove L, M, N sono funzioni qualunque delle a, b, c; esso può tradursi in un altro trinomio nel quale le derivate siano prese per le x, y, z: si ha cioè

$$\frac{dL}{da} + \frac{dM}{db} + \frac{dN}{dc} = \frac{1}{\Gamma}\left(\frac{dK_1}{dx} + \frac{dK_2}{dy} + \frac{dK_3}{dz}\right) \tag{17}$$

essendo le K_1, K_2, K_3 date per le L, M, N mediante le formole

$$\begin{aligned} K_1 &= \Gamma\left(L\frac{dx}{da} + M\frac{dx}{db} + N\frac{dx}{dc}\right) \\ K_2 &= \Gamma\left(L\frac{dy}{da} + M\frac{dy}{db} + N\frac{dy}{dc}\right) \\ K_3 &= \Gamma\left(L\frac{dz}{da} + M\frac{dz}{db} + N\frac{dz}{dc}\right). \end{aligned} \tag{18}$$

Per vedere la verità di questo principio, cominceremo a designare con lettere particolari le derivate parziali delle x, y, z per le a, b, c, come abbiamo fatto (n. 14. equazioni (30)) delle derivate parziali pel tempo: scrivendo

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{dx}{da};\ \vartheta_1 = \frac{dy}{da};\ \tau_1 = \frac{dz}{da} \\ \varepsilon_2 &= \frac{dx}{db};\ \vartheta_2 = \frac{dy}{db};\ \tau_2 = \frac{dz}{db} \\ \varepsilon_3 &= \frac{dx}{dc};\ \vartheta_3 = \frac{dy}{dc};\ \tau_3 = \frac{dz}{dc}; \end{aligned} \tag{19}$$

e intendendo queste quantità ridotte (mediante l' uso delle equazioni (8) num°. 9) funzioni di x, y, z, t. Dopo ciò seguendo un andamento affatto analogo a quello tenuto al num°. 14., troveremo primieramente l' equazione

$$\begin{aligned} \frac{dH}{da} = {} & l_1\frac{d^2x}{da^2} + m_1\frac{d^2x}{da\,db} + n_1\frac{d^2x}{da\,dc} \\ & + l_2\frac{d^2y}{da^2} + m_2\frac{d^2y}{da\,db} + n_2\frac{d^2y}{da\,dc} \\ & + l_3\frac{d^2z}{da^2} + m_3\frac{d^2z}{da\,db} + n_3\frac{d^2z}{da\,dc} \end{aligned}$$

poi, sostituendo le denominazioni assunte nella prima fila delle precedenti equazioni (19), ci verranno per esprimere i valori

delle derivate seconde $\frac{d^2x}{da^2}$, $\frac{d^2x}{da\,db}$, ec., come in quel luogo per le derivate simili, nove equazioni le quali non differiranno nei secondi membri da quelle ivi scritte se non per esservi le lettere ε_1, ϑ_1, τ_1 invece di u, v, w. Arriveremo quindi all'equazione analoga alla colà ottenuta,

$$\frac{dH}{da} = H\left(\frac{d\varepsilon_1}{dx} + \frac{d\vartheta_1}{dy} + \frac{d\tau_1}{dz}\right)$$

la quale per effetto della (6) num°. 9 si muta nella

$$\frac{d\Gamma}{da} = -\Gamma\left(\frac{d\varepsilon_1}{dx} + \frac{d\vartheta_1}{dy} + \frac{d\tau_1}{dz}\right). \tag{20}$$

Con processo analitico in tutto somigliante troveremo le altre due equazioni

$$\begin{aligned} \frac{d\Gamma}{db} &= -\Gamma\left(\frac{d\varepsilon_2}{dx} + \frac{d\vartheta_2}{dy} + \frac{d\tau_2}{dz}\right) \\ \frac{d\Gamma}{dc} &= -\Gamma\left(\frac{d\varepsilon_3}{dx} + \frac{d\vartheta_3}{dy} + \frac{d\tau_3}{dz}\right). \end{aligned} \tag{21}$$

Avendo poi altrimenti manifestamente

$$\frac{d\Gamma}{da} = \frac{d\Gamma}{dx}\varepsilon_1 + \frac{d\Gamma}{dy}\vartheta_1 + \frac{d\Gamma}{dz}\tau_1$$

$$\frac{d\Gamma}{db} = \frac{d\Gamma}{dx}\varepsilon_2 + \frac{d\Gamma}{dy}\vartheta_2 + \frac{d\Gamma}{dz}\tau_2$$

$$\frac{d\Gamma}{dc} = \frac{d\Gamma}{dx}\varepsilon_3 + \frac{d\Gamma}{dy}\vartheta_3 + \frac{d\Gamma}{dz}\tau_3$$

la sostituzione di questi valori nelle (20), (21) le riduce alle tre somiglianti all'equazione della continuità:

$$\begin{aligned} \frac{d.\Gamma\varepsilon_1}{dx} + \frac{d.\Gamma\vartheta_1}{dy} + \frac{d.\Gamma\tau_1}{dz} &= 0 \\ \frac{d.\Gamma\varepsilon_2}{dx} + \frac{d.\Gamma\vartheta_2}{dy} + \frac{d.\Gamma\tau_2}{dz} &= 0 \\ \frac{d.\Gamma\varepsilon_3}{dx} + \frac{d.\Gamma\vartheta_3}{dy} + \frac{d.\Gamma\tau_3}{dz} &= 0. \end{aligned} \tag{22}$$

Ora prendasi una funzione qualunque L di a, b, c, che per la sostituzione dei valori (8) num°. 9 può anche intendersi ridotta funzione di x, y, z: avremo

$$\frac{dL}{da} = \frac{dL}{dx}\frac{dx}{da} + \frac{dL}{dy}\frac{dy}{da} + \frac{dL}{dz}\frac{dz}{da}.$$

A motivo delle denominazioni (19) (prima fila), non sarà alterata la precedente equazione scrivendola

$$\frac{dL}{da} = \frac{1}{\Gamma}\left(\frac{dL}{dx}.\Gamma\varepsilon_1 + \frac{dL}{dy}.\Gamma\vartheta_1 + \frac{dL}{dz}.\Gamma\tau_1\right).$$

Di più: se prendiamo la prima delle equazioni (22), moltiplicandola per $\frac{L}{\Gamma}$, non avremo difficoltà a capire che non si altera l'equazione precedente aggiungendo al suo secondo membro l'espressione

$$\frac{1}{\Gamma}\left(L\frac{d.\Gamma\varepsilon_1}{dx} + L\frac{d.\Gamma\vartheta_1}{dy} + L\frac{d.\Gamma\tau_1}{dz}\right).$$

Così vedremo risultare

$$\frac{dL}{da} = \frac{1}{\Gamma}\left(\frac{d.\Gamma L\varepsilon_1}{dx} + \frac{d.\Gamma L\vartheta_1}{dy} + \frac{d.\Gamma L\tau_1}{dz}\right). \tag{23}$$

Chiamate M, N due altre funzioni di a, b, c, come la L, in maniera affatto simile, facendo uso delle altre denominazioni (19) e delle altre due equazioni (22), troveremo

$$(24)\quad \begin{cases} \dfrac{dM}{db} = \dfrac{1}{\Gamma}\left(\dfrac{d.\Gamma M\varepsilon_2}{dx} + \dfrac{d.\Gamma M\vartheta_2}{dy} + \dfrac{d.\Gamma M\tau_2}{dz}\right) \\ \dfrac{dN}{dc} = \dfrac{1}{\Gamma}\left(\dfrac{d.\Gamma N\varepsilon_3}{dx} + \dfrac{d.\Gamma N\vartheta_3}{dy} + \dfrac{d.\Gamma N\tau_3}{dz}\right). \end{cases}$$

Sommando le equazioni (23), (24), compenetrando nel secondo membro le derivate relative alla stessa variabile, risostituendo alle ε_1, ϑ_1, τ_1, ε_2, ec. le derivate equivalenti (equazioni (19)), e adottando per compendio le espressioni (18), si vedrà risultare l'equazione (17) in cui si legge il principio analitico enunciato.

38. Ora, mediante l'uso del principio espresso nelle equazioni (17), (18), vedesi a colpo d'occhio che ponendo

$$
(25)\qquad
\begin{aligned}
P_1 &= \Gamma\left(L_1 \frac{dx}{da} + M_1 \frac{dx}{db} + N_1 \frac{dx}{dc}\right)\\
P_2 &= \Gamma\left(L_1 \frac{dy}{da} + M_1 \frac{dy}{db} + N_1 \frac{dy}{dc}\right)\\
P_3 &= \Gamma\left(L_1 \frac{dz}{da} + M_1 \frac{dz}{db} + N_1 \frac{dz}{dc}\right)\\
Q_1 &= \Gamma\left(L_2 \frac{dx}{da} + M_2 \frac{dx}{db} + N_2 \frac{dx}{dc}\right)\\
Q_2 &= \Gamma\left(L_2 \frac{dy}{da} + M_2 \frac{dy}{db} + N_2 \frac{dy}{dc}\right)\\
Q_3 &= \Gamma\left(L_2 \frac{dz}{da} + M_2 \frac{dz}{db} + N_2 \frac{dz}{dc}\right)\\
R_1 &= \Gamma\left(L_3 \frac{dx}{da} + M_3 \frac{dx}{db} + N_3 \frac{dx}{dc}\right)\\
R_2 &= \Gamma\left(L_3 \frac{dy}{da} + M_3 \frac{dy}{db} + N_3 \frac{dy}{dc}\right)\\
R_3 &= \Gamma\left(L_3 \frac{dz}{da} + M_3 \frac{dz}{db} + N_3 \frac{dz}{dc}\right)
\end{aligned}
$$

le equazioni (16) si mutano nelle seguenti

$$
(26)\qquad
\begin{aligned}
&\Gamma\left(X - \frac{d^2x}{dt^2}\right) + \frac{dP_1}{dx} + \frac{dP_2}{dy} + \frac{dP_3}{dz} = 0\\
&\Gamma\left(Y - \frac{d^2y}{dt^2}\right) + \frac{dQ_1}{dx} + \frac{dQ_2}{dy} + \frac{dQ_3}{dz} = 0\\
&\Gamma\left(Z - \frac{d^2z}{dt^2}\right) + \frac{dR_1}{dx} + \frac{dR_2}{dy} + \frac{dR_3}{dz} = 0
\end{aligned}
$$

le quali sono quelle che si cercavano colle derivate espresse relativamente alle coordinate x, y, z dello stato reale.

Potremo poi avere immediatamente i valori delle nove quantità P_1, P_2, P_3; Q_1, Q_2, Q_3; R_1, R_2, R_3 dati per le sei A, B, C, D, E, F, sostituendo nelle equazioni (25) alle nove quantità L_1, M_1, N_1; L_2, M_2, N_2; L_3, M_3, N_3 i valori somministratici dalle equazioni (14). Chiaminsi per abbreviare (I), (II), (III), (IV), (V), (VI), sei quantità di cui scrivo i valori

$$(\mathrm{I}) = -2A\left(\frac{dx}{da}\right)^2 - 2B\left(\frac{dx}{db}\right)^2 - 2C\left(\frac{dx}{dc}\right)^2 - 2D\frac{dx}{da}\frac{dx}{db} - 2E\frac{dx}{da}\frac{dx}{dc} - 2F\frac{dx}{db}\frac{dx}{dc}$$

$$(\mathrm{II}) = -2A\left(\frac{dy}{da}\right)^2 - 2B\left(\frac{dy}{db}\right)^2 - 2C\left(\frac{dy}{dc}\right)^2 - 2D\frac{dy}{da}\frac{dy}{db} - 2E\frac{dy}{da}\frac{dy}{dc} - 2F\frac{dy}{db}\frac{dy}{dc}$$

$$(\mathrm{III}) = -2A\left(\frac{dz}{da}\right)^2 - 2B\left(\frac{dz}{db}\right)^2 - 2C\left(\frac{dz}{dc}\right)^2 - 2D\frac{dz}{da}\frac{dz}{db} - 2E\frac{dz}{da}\frac{dz}{dc} - 2F\frac{dz}{db}\frac{dz}{dc}$$

$$(27)\quad (\mathrm{IV}) = -2A\frac{dx}{da}\frac{dy}{da} - 2B\frac{dx}{db}\frac{dy}{db} - 2C\frac{dx}{dc}\frac{dy}{dc} - D\left(\frac{dx}{da}\frac{dy}{db} + \frac{dx}{db}\frac{dy}{da}\right) - E\left(\frac{dx}{da}\frac{dy}{dc} + \frac{dx}{dc}\frac{dy}{da}\right) - F\left(\frac{dx}{db}\frac{dy}{dc} + \frac{dx}{dc}\frac{dy}{db}\right)$$

$$(\mathrm{V}) = -2A\frac{dx}{da}\frac{dz}{da} - 2B\frac{dx}{db}\frac{dz}{db} - 2C\frac{dx}{dc}\frac{dz}{dc} - D\left(\frac{dx}{da}\frac{dz}{db} + \frac{dx}{db}\frac{dz}{da}\right) - E\left(\frac{dx}{da}\frac{dz}{dc} + \frac{dx}{dc}\frac{dz}{da}\right) - F\left(\frac{dx}{db}\frac{dz}{dc} + \frac{dx}{dc}\frac{dz}{db}\right)$$

$$(\mathrm{VI}) = -2A\frac{dy}{da}\frac{dz}{da} - 2B\frac{dy}{db}\frac{dz}{db} - 2C\frac{dy}{dc}\frac{dz}{dc} - D\left(\frac{dy}{da}\frac{dz}{db} + \frac{dy}{db}\frac{dz}{da}\right) - E\left(\frac{dy}{da}\frac{dz}{dc} + \frac{dy}{dc}\frac{dz}{da}\right) - F\left(\frac{dy}{db}\frac{dz}{dc} + \frac{dy}{dc}\frac{dz}{db}\right)$$

e le indicate sostituzioni ci porgeranno

$$P_1 = \Gamma(\mathrm{I});\ P_2 = \Gamma(\mathrm{IV});\ P_3 = \Gamma(\mathrm{V})$$

$$(28) \qquad Q_1 = \Gamma(\mathrm{IV});\ Q_2 = \Gamma(\mathrm{II});\ Q_3 = \Gamma(\mathrm{VI})$$

$$R_1 = \Gamma(\mathrm{V});\ R_2 = \Gamma(\mathrm{VI});\ R_3 = \Gamma(\mathrm{III})$$

dalle quali ci viene insegnato sussistere fra le nove quantità P_1, P_2, P_3, Q_1, ec. le tre relazioni

$$(29) \qquad P_2 = Q_1;\ P_3 = R_1;\ Q_3 = R_2.$$

Chi confronterà le ottenute equazioni (26), (29) coi risultati datici dai moderni geometri (*), troverà che per vie diversissime siamo giunti alle medesime conseguenze. Taluno forse mi obbjetterà che queste equazioni essendo qui dimostrate pel solo caso de' corpi rigidi, hanno una estensione assai minore di quella loro concessa dai sullodati Geometri francesi. Ad una tal obbjezione risponderà il Capo seguente, ove si vedrà da che parte stia la maggiore generalità.

39. Non tacerò che questa nostra analisi supponendo in numero di sei le equazioni di condizione fra le coordinate x, y, z del punto generico, non sembra accordarsi con quel passo della Meccanica Analitica (T. I. pag. 86) ove si restringe in generale a tre il numero di sì fatte equazioni. Io tengo per fermo però che Lagrange in quel luogo non ebbe di mira il caso nel quale le equazioni di condizione sono alle derivate parziali per variabili di cui le x, y, z si considerino funzioni: potendo allora benissimo dette equazioni essere più di tre, senza che le ultime siano conseguenze necessarie delle tre prime. L'ufficio delle ultime è in tal caso di determinare le funzioni arbitrarie introdotte dall' integrazione delle prime, di far cioè cosa a cui le prime non bastano; e perciò quelle non possono essere mere combinazioni di queste. Ammesso ciò, non è nemmeno

(*) *Cauchy*. Exercices de Mathématiques. T. II. pag. 111; Tom. III. pag. 166. *Poisson*. Mémoires de l' Institut de France. T. VIII. pag. 387; T. X. p. 573. Journal de l' Ecole Polyt. Cahier XX. pag. 54, ec.

più in tal caso applicabile il corollario che si abbiano sempre tante equazioni quante ne abbisognano per determinare i valori delle coordinate generiche x, y, z, e di tutti i coefficienti indeterminati introdotti secondo il metodo. Del resto tengo poi in serbo una risposta atta a guadagnarmi il suffragio anche di chi credesse sussistere sempre senza alcuna eccezione l'addotta sentenza del nostro Autore. Se nell' impianto di un problema meccanico secondo i metodi del nostro testo, si ommettono alcune delle essenziali equazioni di condizione, non si esprimono tutti i dati della questione, e si viene a conseguenze erronee. Non è di eguale importanza il guardarsi dall' usare qualche equazione di condizione di più del bisogno, la quale sia conseguenza di altre parimenti adoperate. Lagrange ha provato per via d'esempj (M. A. T. I. pag. 135 e altrove) che in tal caso nella pratica del metodo (il quale è poi quello che si segue anche nel calcolo delle variazioni) non ne risulta errore a motivo del compenetrarsi che fanno, pel giuoco de' coefficienti indeterminati i termini superflui cogli altri esistenti in forza delle equazioni necessarie. Ciò intendasi detto unicamente a sempre maggior guarentigia della verità delle precedenti deduzioni: la mia opinione è che nel caso attuale tutte e sei le equazioni di condizione dovevano essere contemplate.

40. Aggiungerò per ragioni che il lettore comprenderà da se stesso fra poco, una maniera di dimostrare speditamente tre formole note e di grande effetto nella trattazione del moto di un corpo solido per quella parte che il Signor Giorgini (nella Memoria più sopra citata) chiama geometrica sull' esempio di alcuni illustri francesi. Derivando pel tempo le equazioni (1) num°. 33. abbiamo, giusta l'adottata massima di scrivere cogli apici le derivate totali prese riguardo al tempo;

$$u = f' + \alpha'_1 p + \beta'_1 q + \gamma'_1 r$$

$$(30) \qquad v = g' + \alpha'_2 p + \beta'_2 q + \gamma'_2 r$$

$$w = h' + \alpha'_3 p + \beta'_3 q + \gamma'_3 r \,.$$

Dalle stesse equazioni (1) moltiplicate rispettivamente e successivamente prima per α_1, α_2, α_3, poi per β_1, β_2, β_3, da ultimo per γ_1, γ_2, γ_3 e ogni volta sommate, si ottengono in virtù delle (3) le equazioni inverse che sono

$$(31)\qquad \begin{aligned} p &= \alpha_1(x-f) + \alpha_2(y-g) + \alpha_3(z-h) \\ q &= \beta_1(x-f) + \beta_2(y-g) + \beta_3(z-h) \\ r &= \gamma_1(x-f) + \gamma_2(y-g) + \gamma_3(z-h)\,. \end{aligned}$$

Poniamo questi valori di p, q, r nelle precedenti (30) ed otterremo

$$(32)\qquad \begin{aligned} u = f' &+ (\alpha_1\alpha'_1 + \beta_1\beta'_1 + \gamma_1\gamma'_1)(x-f) \\ &+ (\alpha_2\alpha'_1 + \beta_2\beta'_1 + \gamma_2\gamma'_1)(y-g) \\ &+ (\alpha_3\alpha'_1 + \beta_3\beta'_1 + \gamma_3\gamma'_1)(z-h) \\ v = g' &+ (\alpha_1\alpha'_2 + \beta_1\beta'_2 + \gamma_1\gamma'_2)(x-f) \\ &+ (\alpha_2\alpha'_2 + \beta_2\beta'_2 + \gamma_2\gamma'_2)(y-g) \\ &+ (\alpha_3\alpha'_2 + \beta_3\beta'_2 + \gamma_3\gamma'_2)(z-h) \\ w = h' &+ (\alpha_1\alpha'_3 + \beta_1\beta'_3 + \gamma_1\gamma'_3)(x-f) \\ &+ (\alpha_2\alpha'_3 + \beta_2\beta'_3 + \gamma_2\gamma'_3)(y-g) \\ &+ (\alpha_3\alpha'_3 + \beta_3\beta'_3 + \gamma_3\gamma'_3)(z-h)\,. \end{aligned}$$

Queste equazioni ci danno a dirittura le tre velocità u, v, w espresse per le coordinate x, y, z e per quantità funzioni del solo tempo che non cambiano passando da un punto all' altro del corpo. Volendo ridurle alle forme conosciute, poniamo per abbreviazione

$$(33)\qquad \begin{aligned} \varsigma_1 &= \alpha_2\alpha'_3 + \beta_2\beta'_3 + \gamma_2\gamma'_3 \\ \varsigma_2 &= \alpha_3\alpha'_1 + \beta_3\beta'_1 + \gamma_3\gamma'_1 \\ \varsigma_3 &= \alpha_1\alpha'_2 + \beta_1\beta'_2 + \gamma_1\gamma'_2\,. \end{aligned}$$

Derivando ora per t le equazioni (4) num°. 33, otterremo

$$
(34)\qquad
\begin{aligned}
&\alpha_1 \alpha'_1 + \beta_1 \beta'_1 + \gamma_1 \gamma'_1 = 0\\
&\alpha_2 \alpha'_2 + \beta_2 \beta'_2 + \gamma_2 \gamma'_2 = 0\\
&\alpha_3 \alpha'_3 + \beta_3 \beta'_3 + \gamma_3 \gamma'_3 = 0\\
&\alpha_2 \alpha'_1 + \beta_2 \beta'_1 + \gamma_2 \gamma'_1 = -\varsigma_3\\
&\alpha_1 \alpha'_3 + \beta_1 \beta'_3 + \gamma_1 \gamma'_3 = -\varsigma_2\\
&\alpha_3 \alpha'_2 + \beta_3 \beta'_2 + \gamma_3 \gamma'_2 = -\varsigma_1 .
\end{aligned}
$$

Col mezzo di queste ultime nove equazioni le (32) si riducono a colpo d'occhio

$$
(35)\qquad
\begin{aligned}
u &= f' + \varsigma_2 (z-h) - \varsigma_3 (y-g)\\
v &= g' + \varsigma_3 (x-f) - \varsigma_1 (z-h)\\
w &= h' + \varsigma_1 (y-g) - \varsigma_2 (x-f)
\end{aligned}
$$

e diverrebbero ancora assai più semplici se le f, g, h fossero zero, cioè se il punto d'origine delle x, y, z fosse un punto fisso del corpo intorno a cui esso potesse volgersi liberamente. Sogliono i meccanici chiamare le ς_1, ς_2, ς_3 velocità angolari intorno agli assi delle x, y, z: importa ritenere (come si fa manifesto pei valori (33)) che queste velocità angolari non dipendono dalle coordinate dei diversi punti del corpo per rapporto agli assi mobili con esso.

41. Le equazioni (35) che danno le tre velocità del punto generico cognite per quanto spetta alla loro composizione in x, y, z, e soltanto incognite per rapporto a funzioni del solo tempo, sono poi quelle che combinate colle equazioni meccaniche porgono l'intera soluzione del problema. Ognun vede però quanto la soluzione anzidetta sia avanzata in virtù delle sole equazioni (35) indipendenti da qualunque principio meccanico, e come le equazioni meccaniche non facciano che portarvi un compimento, il quale viene facilitato dall'uso di altre nove eleganti equazioni che si trovano (oltre le equazioni di posizione (33)) fra le velocità angolari ς_1, ς_2, ς_3, e i nove coseni α_1, β_1, γ_1, α_2, ec. Non è mia intenzione ritessere qui una tale

trattazione del moto di un corpo solido, già condotta a fine da insigni autori. Il lettore conosce lo scopo ch' io mi sono proposto. Soltanto, vedendole in qualche relazione collo scopo medesimo, soggiungerò tre equazioni che si deducono dalle (35) derivandole ancora pel tempo, e sostituendo alle u, v, w che si generano durante l'operazione, gli stessi valori (35). Dopo varie riduzioni che si presentano senza difficoltà, si giunge alle tre

$$(36)\quad \begin{aligned} u' &= f'' - (\varsigma_2^2 + \varsigma_3^2)(x-f) - (\varsigma'_3 - \varsigma_1\varsigma_2)(y-g) + (\varsigma'_2 + \varsigma_1\varsigma_3)(z-h) \\ v' &= g'' + (\varsigma'_3 + \varsigma_1\varsigma_2)(x-f) - (\varsigma_1^2 + \varsigma_3^2)(y-g) - (\varsigma'_1 - \varsigma_2\varsigma_3)(z-h) \\ w' &= h'' - (\varsigma'_2 - \varsigma_1\varsigma_3)(x-f) + (\varsigma'_1 + \varsigma_2\varsigma_3)(y-g) - (\varsigma_1^2 + \varsigma_2^2)(z-h). \end{aligned}$$

Siccome le u', v', w' equivalgono rispettivamente alle $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$, $\frac{d^2z}{dt^2}$, i trovati valori potranno sostituirsi nelle equazioni meccaniche (26), e così (richiamate anche le (29)) contribuire alla determinazione delle quantità P_1, P_2, P_3, Q_1, ec. Conviene però che il lettore attenda quanto siamo per dire in generale nel Capo seguente intorno a quantità che tengono il posto delle nove anzidette.

42. Terminerò il Capo attuale col mostrare che lo stesso andamento tenuto qui sopra al num°. 40. vale all' oggetto di trovare il valore delle variazioni $\delta x, \delta y, \delta z$ attribuibili alle coordinate x, y, z di ciascun punto del corpo in forza di una circostanza particolare degnissima di osservazione e che produce notabili effetti, come vedremo nel Capo seguente. Qualunque sia il sistema, invariabile o variabile, non c' è in generale una ragione per cui, avendone riferito il moto a tre assi ortogonali presi a piacere, non potessimo riferirlo anche a tre altri assi ortogonali comunque posti nello spazio rimpetto ai primi. Supponiamo di aver fatto il primo riferimento, e che allora le coordinate del punto generico fossero p, q, r (funzioni poi queste di a, b, c, t secondo le idee del Capo primo); facendo il secondo riferimento, le coordinate, che denomineremo x, y, z, possono essere date per le p, q, r mediante le equazioni (1) num°. 33. Suppo-

niamo di più che le anzidette coordinate x, y, z prendano aumenti indeterminati $i\delta x$, $i\delta y$, $i\delta z$ (i è il coefficiente indeterminato che si riduce piccolo quanto si vuole secondo lo spirito del calcolo delle variazioni) in conseguenza di uno spostarsi arbitrario dei secondi assi rispetto ai primi, il che torna lo stesso che dire, ammettendo che crescano degli aumenti indeterminati $i\delta f$, $i\delta\alpha_1$, ec. tutte le dodici quantità f, g, h, α_1, ec. delle equazioni (1), tra le quali regnano le sei equazioni di condizione (3) ovvero (4) num°. 33. Possiamo cercare i valori delle variazioni δx, δy, δz per un sistema qualunque in maniera analoga a quella con cui cercammo i valori delle velocità u, v, w per un corpo solido. Pertanto invece delle (30) avremo le tre

$$\delta x = \delta f + \delta\alpha_1 p + \delta\beta_1 q + \delta\gamma_1 r$$
$$\delta y = \delta g + \delta\alpha_2 p + \delta\beta_2 q + \delta\gamma_2 r$$
$$\delta z = \delta h + \delta\alpha_3 p + \delta\beta_3 q + \delta\gamma_3 r$$

le quali, dopo avervi sostituiti i valori di p, q, r datici dalle (31) ci diventeranno, in corrispondenza colle (32),

$$(37)\quad \begin{aligned}
\delta x = \delta f &+ (\alpha_1\delta\alpha_1 + \beta_1\delta\beta_1 + \gamma_1\delta\gamma_1)(x-f) \\
&+ (\alpha_2\delta\alpha_1 + \beta_2\delta\beta_1 + \gamma_2\delta\gamma_1)(y-g) \\
&+ (\alpha_3\delta\alpha_1 + \beta_3\delta\beta_1 + \gamma_3\delta\gamma_1)(z-h) \\
\delta y = \delta g &+ (\alpha_1\delta\alpha_2 + \beta_1\delta\beta_2 + \gamma_1\delta\gamma_2)(x-f) \\
&+ (\alpha_2\delta\alpha_2 + \beta_2\delta\beta_2 + \gamma_2\delta\gamma_2)(y-g) \\
&+ (\alpha_3\delta\alpha_2 + \beta_3\delta\beta_2 + \gamma_3\delta\gamma_2)(z-h) \\
\delta z = \delta h &+ (\alpha_1\delta\alpha_3 + \beta_1\delta\beta_3 + \gamma_1\delta\gamma_3)(x-f) \\
&+ (\alpha_2\delta\alpha_3 + \beta_2\delta\beta_3 + \gamma_2\delta\gamma_3)(y-g) \\
&+ (\alpha_3\delta\alpha_3 + \beta_3\delta\beta_3 + \gamma_3\delta\gamma_3)(z-h) .
\end{aligned}$$

Poscia in riscontro delle (33) stabiliremo le denominazioni

$$\varsigma_1 = \alpha_2 \delta\alpha_3 + \beta_2 \delta\beta_3 + \gamma_2 \delta\gamma_3$$
$$\varsigma_2 = \alpha_3 \delta\alpha_1 + \beta_3 \delta\beta_1 + \gamma_3 \delta\gamma_1$$
$$\varsigma_3 = \alpha_1 \delta\alpha_2 + \beta_1 \delta\beta_2 + \gamma_1 \delta\gamma_2 .$$

In appresso le variate delle equazioni (4) ci daranno

$$\alpha_1 \delta\alpha_1 + \beta_1 \delta\beta_1 + \gamma_1 \delta\gamma_1 = 0$$
$$\alpha_2 \delta\alpha_2 + \beta_2 \delta\beta_2 + \gamma_2 \delta\gamma_2 = 0$$
$$\alpha_3 \delta\alpha_3 + \beta_3 \delta\beta_3 + \gamma_3 \delta\gamma_3 = 0$$
$$\alpha_2 \delta\alpha_1 + \beta_2 \delta\beta_1 + \gamma_2 \delta\gamma_1 = -\varsigma_3$$
$$\alpha_1 \delta\alpha_3 + \beta_1 \delta\beta_3 + \gamma_1 \delta\gamma_3 = -\varsigma_2$$
$$\alpha_3 \delta\alpha_2 + \beta_3 \delta\beta_2 + \gamma_3 \delta\gamma_2 = -\varsigma_1 .$$

Ora in virtù di queste ultime nove equazioni, adottando anche di mettere

$$(38) \quad \omega_1 = \delta f - \varsigma_2 h + \varsigma_3 g ; \quad \omega_2 = \delta g - \varsigma_3 f + \varsigma_1 h ; \quad \omega_3 = \delta h - \varsigma_1 g + \varsigma_2 f$$

le precedenti (37) si muteranno nelle

$$(39) \quad \begin{aligned} \delta x &= \omega_1 + \varsigma_2 z - \varsigma_3 y \\ \delta y &= \omega_2 + \varsigma_3 x - \varsigma_1 z \\ \delta z &= \omega_3 + \varsigma_1 y - \varsigma_2 x ; \end{aligned}$$

che sono quelle che ci eravamo proposto di trovare, e che ci verranno utili nel Capo seguente. Si osservi sui valori delle sei quantità ω_1, ω_2, ω_3, ς_1, ς_2, ς_3, ch' esse non dipendono dalle coordinate variabili del sistema, ma solo dalle dodici quantità esprimenti l'arbitrio della posizione dei secondi assi rispetto ai primi. Siccome poi fra tali dodici quantità sei rimangono assolutamente arbitrarie, potremo ritenere arbitrarie e indipendenti fra loro le stesse sei ω_1, ω_2, ω_3, ς_1, ς_2, ς_3.

CAPO IV.

Del moto e dell' equilibrio di un corpo qualunque.

43. Dico qualunque quel corpo che può mutare di forma, cangiandosi per effetto di moti intestini le posizioni relative delle sue molecole. Lagrange trattò nella sua M. A. varie questioni che si riferivano a sistemi variabili di simil natura: trattò dell' equilibrio di fili e di superficie estensibili e contrattili, trattò dell' equilibrio e del moto de' liquidi e de' fluidi elastici. A tal fine egli adottò un principio generale (§. 9. della Sez. II^a, e 6. della IV^a), mediante il quale l' espressione analitica dell' effetto di forze interne attive riesce affatto analoga a quella che risulta per le forze passive quando si hanno equazioni di condizione: il che si ottiene assumendo dei coefficienti indeterminati e moltiplicando con essi le variate di quelle stesse funzioni che rimangono costanti per corpi rigidi, o inestensibili, o liquidi. Se ci conformassimo ad un tal metodo, potremmo a dirittura generalizzare i risultamenti ai quali siamo giunti nel capitolo precedente: io però preferisco di astenermene, giacchè la mia ammirazione pel grande Geometra non m' impedisce di riconoscere come in quel principio rimanga tuttavia alcun che di oscuro e di non dimostrato. Cerchiamo quindi di conseguire lo stesso intento altrimenti, anche a motivo dell' impegno in cui siamo entrati di voler dedurre tutte le equazioni meccaniche per qualunque corpo dall'equazione generalissima (1) num^o. 16. spettante ai sistemi discreti. E qui ci si presentano due vie. La prima di rinvenire, anche pel caso di corpi qualunque, estensibili, elastici, fluidi, equazioni di condizione che ne esprimano la natura, in quella guisa che le equazioni (8) del num^o. 34. esprimevano quella de' corpi rigidi, e quindi trattare ogni sorta di forze interne al modo delle passive, ossia mediante la terza parte della anzidetta equazione generale (1) num^o. 16. L' altra strada che potrebbe seguirsi sarebbe di studiare i termini

introdotti dalle forze interne attive usando della seconda parte della mentovata equazione generale. Mi attenni a quest'ultima nella Memoria inserita nel Tomo XXI dei volumi Sociali, ed ora farò vedere nel Capitolo VI, che un tale andamento si può di molto abbreviare, rendendolo insieme più sicuro. Per le ragioni poi addotte nel preambolo dell' attuale Memoria credo più filosofico il primo dei descritti andamenti, il quale però presenta alcune non lievi difficoltà.

Queste difficoltà vengono dal dover trovare in generale equazioni di condizione per esprimere i legami interni fra le molecole dei corpi, di qualunque natura essi siano. Dopo lunghe ricerche credo di aver ottenuto l' intento mercè le seguenti considerazioni. Vi ha nella Meccanica un fatto che ben merita l' attenzione del geometra, ed è che le stesse sei equazioni le quali sussistono per l' equilibrio e pel moto di un corpo solido libero (cioè non avente punti fissi od obbligati a stare sopra linee o superficie determinate) (M. A. Tom. I. pag. 170.) si estendono altresì ai corpi liberi non solidi (M. A. T. I. p. 257., e seguenti), essendo quelle che contengono i due principj generali della conservazione del moto del centro di gravità, e della conservazione delle aree. Io avea bisogno di una generalizzazione simile per estendere le equazioni (26), (29) del Capo precedente, dimostrate pei corpi solidi, anche ad altri corpi qualsivogliono. Mi posi quindi ad analizzare sottilmente il metodo per mezzo del quale si arriva alle equazioni generali contenenti i detti due principj, ed a cercare la ragione per cui in tal caso quello che vale pei corpi solidi, vale anche pei non solidi. Ora credo di non poter far meglio che dimostrare al lettore essere le medesime le considerazioni che conducono all' anzidetto risultamento già ammesso dai geometri, e all' altro ch' io ho di mira.

44. Supponiamo di essere giunti a trovare le accennate equazioni di condizione generali che esprimano la natura del corpo, qualunque esso sia, e che valgano per ogni punto del medesimo; si capisce che invece dell' equazione (10) num°. 35. particolare pe' corpi rigidi avremo

$$(1)\quad \int da \int db \int dc \,.\, \left\{ \left(X - \frac{d^2 x}{dt^2} \right) \delta x + \ldots . \right\} + \int da \int db \int dc . G + \Omega = 0$$

indicando con G il complesso dei termini introdotti dalle equazioni di condizione che non conosciamo, e che nel luogo citato era significato dal sestinomio

$$A\delta t_1 + B\delta t_2 + C\delta t_3 + D\delta t_4 + E\delta t_5 + F\delta t_6 .$$

Ma queste equazioni di condizione che non conosciamo, possono risultarci note cambiando le variabili a cui si riferiscono gli integrali alla maniera che son per dire.

Non immaginiamo le x, y, z funzioni immediatamente delle $a, b, c, t,$ ma prima funzioni di tre altre p, q, r a motivo di un riferimento successivo del corpo a due diverse terne di assi ortogonali, come sopra si è insinuato al num°. 42. L'artificio che ottiene l'intento sta nell'usare di queste coordinate intermedie $p, q, r,$ ed eseguire in due volte la trasformazione degli integrali. La prima volta invece di trasformare gl' integrali presi per a, b, c in altri presi per x, y, z (come al num°. 10, Capo 1°.), li trasformeremo in integrali presi per p, q, r: e passeremo poscia dalle p, q, r alle x, y, z.

45. A tal fine ci conviene premettere un principio analitico che nel caso attuale ed anche in altri apre l'adito a serie ed utili speculazioni intorno ai diversi gradi di composizione nei quali è duopo considerare le quantità per ottener ciò che altrimenti non si potrebbe.

Se le x, y, z si riguardano funzioni di a, b, c in quanto sono prima funzioni delle p, q, r le quali sono poi funzioni delle $a, b, c,$ il sestinomio H (equazione (4) num. 9. Capo 1°.) composto colle derivate delle x, y, z prese immediatamente per le a, b, c (saltata la considerazione intermedia delle p, q, r) eguaglia il prodotto di due simili sestinomj H_1, H_2, il primo dei quali è fatto colle x, y, z derivate per le $p, q, r,$ e il secondo colle p, q, r derivate per le a, b, c: abbiamo cioè l'equazione

$$(2)\qquad H = H_1 H_2$$

essendo

$$(3)\qquad H_1 = \frac{dx}{dp}\frac{dy}{dq}\frac{dz}{dr} - \frac{dx}{dq}\frac{dy}{dp}\frac{dz}{dr} + \frac{dx}{dq}\frac{dy}{dr}\frac{dz}{dp} - \frac{dx}{dr}\frac{dy}{dq}\frac{dz}{dp} + \frac{dx}{dr}\frac{dy}{dp}\frac{dz}{dq} - \frac{dx}{dp}\frac{dy}{dr}\frac{dz}{dq}$$

$$(4)\qquad H_2 = \frac{dp}{da}\frac{dq}{db}\frac{dr}{dc} - \frac{dp}{db}\frac{dq}{da}\frac{dr}{dc} + \frac{dp}{db}\frac{dq}{dc}\frac{dr}{da} - \frac{dp}{dc}\frac{dq}{db}\frac{dr}{da} + \frac{dp}{dc}\frac{dq}{da}\frac{dr}{db} - \frac{dp}{da}\frac{dq}{dc}\frac{dr}{db}.$$

La dimostrazione del principio esposto si conseguisce sostituendo nell'espressione del sestinomio H i valori desunti da nove equazioni, delle quali le prime tre sono

$$(5)\qquad \begin{aligned} \frac{dx}{da} &= \frac{dx}{dp}\frac{dp}{da} + \frac{dx}{dq}\frac{dq}{da} + \frac{dx}{dr}\frac{dr}{da} \\ \frac{dy}{da} &= \frac{dy}{dp}\frac{dp}{da} + \frac{dy}{dq}\frac{dq}{da} + \frac{dy}{dr}\frac{dr}{da} \\ \frac{dz}{da} &= \frac{dz}{dp}\frac{dp}{da} + \frac{dz}{dq}\frac{dq}{da} + \frac{dz}{dr}\frac{dr}{da} \end{aligned}$$

e poi seguono altre tre colle derivate per b, ed altre tre colle derivate per c, ad ottener le quali basta cambiare nelle precedenti (5) prima la lettera a colla b, poi la stessa a colla c. Siccome però le operazioni sono prolisse, descriverò un andamento buono a tenersi per non deviare in lungaggini le quali potrebbero togliere la lena di arrivare fino alla fine.

Primieramente si osserva che il valore di H datoci dalla equazione (4) num°. 9., può scriversi senza alterazione

$$(6)\qquad H = \frac{dz}{da}\left(\frac{dx}{db}\frac{dy}{dc} - \frac{dx}{dc}\frac{dy}{db}\right) + \frac{dz}{db}\left(\frac{dx}{dc}\frac{dy}{da} - \frac{dx}{da}\frac{dy}{dc}\right) + \frac{dz}{dc}\left(\frac{dx}{da}\frac{dy}{db} - \frac{dx}{db}\frac{dy}{da}\right).$$

Ora mediante le equazioni (5) e le sei seguenti ommesse per brevità, ma che il lettore farà bene a costruirsi secondo l' indicazione, convien trovare i valori dei tre binomj

$$(7)\qquad \frac{dx}{da}\frac{dy}{db}-\frac{dx}{db}\frac{dy}{da}\,;\quad \frac{dx}{dc}\frac{dy}{da}-\frac{dx}{da}\frac{dy}{dc}\,;\quad \frac{dx}{db}\frac{dy}{dc}-\frac{dx}{dc}\frac{dy}{db}\,.$$

Basterà però cercare colla materiale sostituzione soltanto il primo, e così ottenere mercè riduzioni che si presentano da se stesse

$$(8)\qquad \begin{aligned} \frac{dx}{da}\frac{dy}{db}-\frac{dx}{db}\frac{dy}{da} &= \\ &\left(\frac{dx}{dp}\frac{dy}{dq}-\frac{dx}{dq}\frac{dy}{dp}\right)\left(\frac{dp}{da}\frac{dq}{db}-\frac{dp}{db}\frac{dq}{da}\right)\\ &+\left(\frac{dx}{dr}\frac{dy}{dp}-\frac{dx}{dp}\frac{dy}{dr}\right)\left(\frac{dp}{db}\frac{dr}{da}-\frac{dp}{da}\frac{dr}{db}\right)\\ &+\left(\frac{dx}{dq}\frac{dy}{dr}-\frac{dx}{dr}\frac{dy}{dq}\right)\left(\frac{dq}{da}\frac{dr}{db}-\frac{dq}{db}\frac{dr}{da}\right)\,; \end{aligned}$$

il valore del binomio successivo si avrà dal precedente mettendo c per b nei secondi fattori e cambiando loro i segni: e parimenti si dedurrà il valore del terzo de' binomj (7) ponendo c per a nell'ultima equazione (8) e cambiando i segni ai due membri.

Avendo così sott'occhio queste tre equazioni (quanto alla seconda ed alla terza il lettore se le scriva), si passi a moltiplicarle rispettivamente per le tre seguenti

$$(9)\qquad \begin{aligned} \frac{dz}{dc} &= \frac{dz}{dp}\frac{dp}{dc}+\frac{dz}{dq}\frac{dq}{dc}+\frac{dz}{dr}\frac{dr}{dc}\\ \frac{dz}{db} &= \frac{dz}{dp}\frac{dp}{db}+\frac{dz}{dq}\frac{dq}{db}+\frac{dz}{dr}\frac{dr}{db}\\ \frac{dz}{da} &= \frac{dz}{dp}\frac{dp}{da}+\frac{dz}{dq}\frac{dq}{da}+\frac{dz}{dr}\frac{dr}{da} \end{aligned}$$

e poscia sommarle: vedremo prodursi per tal modo nel primo membro il valore di H quale è scritto nella antecedente (6).

La moltiplicazione dei secondi membri facciasi in tre volte, cioè primieramente come se nelle equazioni (9) non vi fossero

che i primi termini dei trinomj: si troverà che i coefficienti totali dei termini

$$\frac{dz}{dp}\left(\frac{dx}{dp}\frac{dy}{dq}-\frac{dx}{dq}\frac{dy}{dp}\right);\quad \frac{dz}{dp}\left(\frac{dx}{dr}\frac{dy}{dp}-\frac{dx}{dp}\frac{dy}{dr}\right)$$

si riducono identicamente zero, e che quello del termine $\frac{dz}{dp}\left(\frac{dx}{dq}\frac{dy}{dr}-\frac{dx}{dr}\frac{dy}{dq}\right)$ equivale al sestinomio H_2. Progredendo nella moltiplicazione, facciasi come se le equazioni (9) avessero nei secondi membri i soli secondi termini dei trinomj: troveremo anche qui che due coefficienti totali riescono zero, e che in quello del termine $\frac{dz}{dq}\left(\frac{dx}{dr}\frac{dy}{dp}-\frac{dx}{dp}\frac{dy}{dr}\right)$ ritorna il sestinomio H_2. Finalmente l'operare cogli ultimi termini delle equazioni (9) ci mostrerà nulli due altri coefficienti totali, ed eguale al sestinomio H_2 il coefficiente totale di $\frac{dz}{dr}\left(\frac{dx}{dp}\frac{dy}{dq}-\frac{dx}{dq}\frac{dy}{dp}\right)$. Dopo ciò raccogliendo i tre fattori di H_2 nei tre termini rimasti, si vedrà che la loro somma riproduce il sestinomio H_1 (equazione (3)), e che per tal guisa resta dimostrata l'equazione (2).

Il principio analitico espresso nella equazione (2) può essere generalizzato. Se le x, y, z si considerassero funzioni di a, b, c, in quanto prima lo fossero delle ξ, η, ζ, le quali fossero funzioni delle p, q, r, che da ultimo lo fossero delle a, b, c; il sestinomio fatto delle x, y, z colle derivate prese direttamente per a, b, c, si proverebbe eguale al prodotto di tre simili sestinomj, dei quali il primo tra le x, y, z colle derivate per ξ, η, ζ, il secondo tra le ξ, η, ζ colle derivate per p, q, r, e il terzo tra le p, q, r colle derivate per a, b, c. Basta per la dimostrazione sopprimere da prima la considerazione delle ξ, η, ζ servendosi della equazione (2), poi in virtù della stessa equazione mostrare che al sestinomio H_1 può sostituirsi il prodotto di quello tra le x, y, z colle derivate per ξ, η, ζ, e di quello tra le ξ, η, ζ colle derivate per p, q, r. Così si progredirebbe se si volesse immaginare un più inoltrato comprendimento di funzioni entro funzioni. Questo principio ci fa conoscere la possibilità di considerare le coordinate x, y, z come quantità

fatte di altre, e queste di altre, e via via, spingendo innanzi a piacere il grado di composizione. E sta qui, se io non fallo, il mezzo per isciogliere il nodo della questione. Havvi tal grado di composizione delle dette quantità nel quale riescono riconoscibili quelle equazioni di condizione, che più non lo sono in tal altro: conviene coglierle dove sono e adattarvi le rimanenti quantità: ciò abbiamo già accennato superiormente, e si farà più manifesto per quel che segue.

46. Premetteremo che nel caso in cui tra le x, y, z e le p, q, r sianvi le equazioni (1) num°. 33, abbiamo

$$(10)\qquad \begin{array}{lll} \frac{dx}{dp}=\alpha_1; & \frac{dx}{dq}=\beta_1; & \frac{dx}{dr}=\gamma_1 \\ \frac{dy}{dp}=\alpha_2; & \frac{dy}{dq}=\beta_2; & \frac{dy}{dr}=\gamma_2 \\ \frac{dz}{dp}=\alpha_3; & \frac{dz}{dq}=\beta_3; & \frac{dz}{dr}=\gamma_3 \end{array}$$

e che quindi il sestinomio H_1 (equazione (3)) diventa tale che può scriversi

$$\alpha_1(\beta_2\gamma_3-\gamma_2\beta_3)+\beta_1(\gamma_2\alpha_3-\alpha_2\gamma_3)+\gamma_1(\alpha_2\beta_3-\beta_2\alpha_3),$$

la quale espressione a motivo di tre fra le nove equazioni (5) del num°. 33. si può mutare in quella del trinomio $\alpha^2_1+\beta^2_1+\gamma^2_1$, che è equivalente all'unità per la prima delle (4) num°. 33.

Pertanto l'equazione (2) ci dà nel caso attuale $H=H_2$, e l'equazione (6) num°. 9. del Capo 1° ci fornisce

$$(11)\qquad H_2\Gamma=1.$$

In vista di quest'ultima possiamo scrivere senza alterazione l'equazione generale (1) del presente Capo al modo che segue

$$(12)\qquad \begin{array}{l} \int da\int db\int dc\,.\,H_2\Gamma\left\{\left(X-\frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x+\ldots\ldots\right\} \\ +\int da\int db\int dc\,.\,H_2\Gamma G+\Omega=0; \end{array}$$

e adesso, osservato il valore di H_2 (equazione (4)) e rammentato il teorema per la trasformazione degli integrali triplicati

di cui abbiamo fatto cenno più volte (per es. al num°. 10. del Capo 1°.), potremo nella precedente (12) passare dagli integrali per a, b, c a quelli per p, q, r, cambiandola colla seguente

$$\int dp \int dq \int dr . \Gamma \left\{ \left(X - \frac{d^2 x}{dt^2}\right) \delta x + \ldots\ldots \right\} \quad (13)$$
$$+ \int dp \int dq \int dr . \Gamma G + \Omega = 0$$

dove bisogna intendere che anche per entro alle espressioni indicate colle lettere Γ, G, Ω sia eliminata ogni traccia delle a, b, c, sostituendo mentalmente a queste i loro valori in p, q, r per effetto delle equazioni inverse indicate al num°. 9. del Capo 1°, e segnate (8); fatta riflessione che nel caso attuale le p, q, r tengono il luogo colà tenuto dalle x, y, z.

47. Nella testè scritta equazione generale (13), la seconda parte esprime il complesso dei termini introdotti dalle equazioni di condizione, non più tra le x, y, z e le a, b, c, ma tra le x, y, z e le p, q, r. Ma quest' ultime equazioni ci sono note, giacchè in vista delle precedenti (10) e delle equazioni (3) num°. 33, abbiamo

$$\left(\frac{dx}{dp}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dp}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dp}\right)^2 = 1$$
$$\left(\frac{dx}{dq}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dq}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dq}\right)^2 = 1$$
$$\left(\frac{dx}{dr}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dr}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dr}\right)^2 = 1 \quad (14)$$
$$\frac{dx}{dp}\frac{dx}{dq} + \frac{dy}{dp}\frac{dy}{dq} + \frac{dz}{dp}\frac{dz}{dq} = 0$$
$$\frac{dx}{dp}\frac{dx}{dr} + \frac{dy}{dp}\frac{dy}{dr} + \frac{dz}{dp}\frac{dz}{dr} = 0$$
$$\frac{dx}{dq}\frac{dx}{dr} + \frac{dy}{dq}\frac{dy}{dr} + \frac{dz}{dq}\frac{dz}{dr} = 0\,;$$

equazioni a derivate parziali che non contenendo le dodici quantità f, g, h, α_1, ec., sono più generali delle loro integrali (le (1) del num°. 33.), come si disse in un caso analogo al

num°. 34.: appartengono a tutti i possibili sistemi di assi da prendersi per le x, y, z, ed esprimono veramente l'arbitrio in cui siamo nel collocarli relativamente ai primi delle p, q, r. Si può sempre più ribadire la stessa massima con altre parole dicendo che nelle equazioni (1) del num°. 33. è lecito supporre che le dodici quantità f, g, h, α_1, ec. mutino di valore quante volte ci aggrada, ma che tutti i differenti valori delle x, y, z originati da tali cambiamenti debbono sempre soddisfare alle medesime (14).

Assumeremo pertanto le (14) come le equazioni di condizione da usarsi per formare la seconda parte dell'equazione generale (13), e circa l'essere in un numero che pare soverchio, ci riporteremo alle osservazioni fatte più sopra al num°. 39. Quella seconda parte presenterà così sotto il segno d'integrale triplicato una espressione analoga alla (11) del Capo precedente, cioè

$$(15)\quad \begin{aligned}
&2\,\mathrm{A}\left(\frac{dx}{dp}\frac{d\delta x}{dp}+\frac{dy}{dp}\frac{d\delta y}{dp}+\frac{dz}{dp}\frac{d\delta z}{dp}\right)\\
&+2\,\mathrm{B}\left(\frac{dx}{dq}\frac{d\delta x}{dq}+\frac{dy}{dq}\frac{d\delta y}{dq}+\frac{dz}{dq}\frac{d\delta z}{dq}\right)\\
&+2\,\mathrm{C}\left(\frac{dx}{dr}\frac{d\delta x}{dr}+\frac{dy}{dr}\frac{d\delta y}{dr}+\frac{dz}{dr}\frac{d\delta z}{dr}\right)\\
&+\mathrm{D}\left(\frac{dx}{dp}\frac{d\delta x}{dq}+\frac{dy}{dp}\frac{d\delta y}{dq}+\frac{dz}{dp}\frac{d\delta z}{dq}+\right.\\
&\qquad\left.\frac{dx}{dq}\frac{d\delta x}{dp}+\frac{dy}{dq}\frac{d\delta y}{dp}+\frac{dz}{dq}\frac{d\delta z}{dp}\right)\\
&+\mathrm{E}\left(\frac{dx}{dp}\frac{d\delta x}{dr}+\frac{dy}{dp}\frac{d\delta y}{dr}+\frac{dz}{dp}\frac{d\delta z}{dr}+\right.\\
&\qquad\left.\frac{dx}{dr}\frac{d\delta x}{dp}+\frac{dy}{dr}\frac{d\delta y}{dp}+\frac{dz}{dr}\frac{d\delta z}{dp}\right)\\
&+\mathrm{F}\left(\frac{dx}{dq}\frac{d\delta x}{dr}+\frac{dy}{dq}\frac{d\delta y}{dr}+\frac{dz}{dq}\frac{d\delta z}{dr}+\right.\\
&\qquad\left.\frac{dx}{dr}\frac{d\delta x}{dq}+\frac{dy}{dr}\frac{d\delta y}{dq}+\frac{dz}{dr}\frac{d\delta z}{dq}\right);
\end{aligned}$$

avendo preso, secondo il metodo, sei coefficienti indeterminati A, B, C, D, E, F, e moltiplicato con essi le variate delle equazioni (14), intendendovi compenetrato (appunto perchè sono arbitrarj) il fattore Γ visibile nella seconda parte della (13). Per quest' ultima ragione ed anche per altre che lo studioso potrà desumere dalle cose che seguono, riterremo che le A, B, C, D, E, F qui adottate, supposto pure che si ritornasse dalla considerazione di un corpo qualunque a quella di un corpo rigido, tengono bensì il posto delle simili quantità indicate nell' espressione (11) del num°. 36, ma non sono identicamente le medesime.

48. Ora possono percorrersi due strade analogamente a quanto si è detto al num°. 17.: possono assumersi per le variazioni δx, δy, δz tali valori particolari che soddisfacciano alle variate di tutte le equazioni di condizione (14), nel qual caso la parte (15) introdotta da tali equazioni dovrà sparire da per se stessa; e può ritenersi la parte (15), lasciando alle variazioni δx, δy, δz l' intera e piena loro generalità. Seguasi il primo andamento, prendendo per le δx, δy, δz i valori (39) scritti alla fine del Capo precedente, valori nati appunto dalla considerazione dell' arbitrio in cui siamo nel porre i secondi assi rimpetto ai primi, che ci condusse alle equazioni (14): tutta la quantità (15) dovrà sparire da per se stessa. Che veramente la sostituzione dei valori (39) num°. 42. renda identicamente nulli i trinomj e sestinomj per cui nella espressione (15) sono moltiplicate le quantità 2A, 2B, 2C, D, E, F, è un fatto analitico che può facilmente verificarsi: basta rammentarsi che le sei arbitrarie ω_1, ω_2, ω_3, ς_1, ς_2, ς_3 sono indipendenti dalle p, q, r, e che quindi nelle derivazioni le prime tre svaniscono, e le seguenti vanno trattate come costanti.

Se di più supponiamo che il corpo sia libero, talchè nella equazione generale (13) manchi l' ultima parte espressa dalla lettera Ω, si vede che quando le variazioni δx, δy, δz prendono gli anzidetti valori, nella equazione generale non rimane che la prima parte. Vedesi inoltre che una tal prima parte può

scomporsi in sei termini tutti moltiplicati per alcuna delle sei indeterminate ω_1, ω_2, ω_3, ς_1, ς_2, ς_3, le quali essendo costanti per riguardo alle p, q, r, escono dai segni integrali. L'assoluto arbitrio poi di queste sei indeterminate fa sì che l'equazione qual fu ridotta si scomponga in altre sei, ponendo eguale a zero ciascuno dei coefficienti di dette sei indeterminate. I primi membri di tali sei equazioni sono affetti da segni integrali presi per le variabili p, q, r, ma facilmente si traducono ad essere integrali presi per le x, y, z; bastando a questo fine introdurre in ciascuno come coefficiente della Γ il sestinomio H_1 (equazione (3)) che al cominciare del num°. 46. dimostrammo eguale all'unità, e richiamare il principio analitico più volte usato per simili trasformazioni, principio che già ci fece fare il primo passo per ridurci dalla (12) alla (13), cioè dalle a, b, c alle p, q, r, e che ora ci fa fare il secondo, come si è accennato alla fine del num°. 44. Abbiamo pertanto le sei

$$(16)\quad \begin{aligned}
&\int dx \int dy \int dz \,.\, \Gamma\left(X - \frac{d^2x}{dt^2}\right) = 0\\
&\int dx \int dy \int dz \,.\, \Gamma\left(Y - \frac{d^2y}{dt^2}\right) = 0\\
&\int dx \int dy \int dz \,.\, \Gamma\left(Z - \frac{d^2z}{dt^2}\right) = 0\\
&\int dx \int dy \int dz \,.\, \Gamma\left\{ x\left(Y - \frac{d^2y}{dt^2}\right) - y\left(X - \frac{d^2x}{dt^2}\right)\right\} = 0\\
&\int dx \int dy \int dz \,.\, \Gamma\left\{ z\left(X - \frac{d^2x}{dt^2}\right) - x\left(Z - \frac{d^2z}{dt^2}\right)\right\} = 0\\
&\int dx \int dy \int dz \,.\, \Gamma\left\{ y\left(Z - \frac{d^2z}{dt^2}\right) - z\left(Y - \frac{d^2y}{dt^2}\right)\right\} = 0\,.
\end{aligned}$$

Sono queste le sei equazioni che contengono i due principj della conservazione del moto del centro di gravità, e delle aree. La precedente dimostrazione fa vedere ch'esse sussistono veramente non solo pe' corpi solidi, ma per ogni sorta di corpi, elastici ed anche fluidi, purchè liberi (*). In fatti essa è dedotta

(*) Poisson. Traité de Mécanique. T. 2.^{me} pag. 447.
Laplace. Système du Monde. Liv. 4. Chap. X, Liv. 5. Chap. VI.

unicamente dal riferimento del corpo a due diversi sistemi di assi ortogonali: e l' arbitrio nel porre i secondi assi relativamente ai primi, sta sempre lo stesso qualunque sia il corpo.

49. Ma potevasi tenere anche il secondo degli andamenti menzionati al principio del numero precedente, conservando tutta la quantità (15) e lasciando alle δx, δy, δz tutta la generalità loro propria. Allora si ha ad operare molto similmente a quanto si è praticato al num°. 36.: anzi e per le trasformazioni indicate nelle equazioni (12) di quel numero, e per la susseguente espressione (13) che ne raccoglie i risultati, non si ha a fare che uno scambio di lettere. Solamente nelle nove equazioni a riscontro di quelle (14), invece delle derivate $\frac{dx}{dp}$, $\frac{dx}{dq}$, $\frac{dx}{dr}$, $\frac{dy}{dp}$, ec. metteremo i valori angolari somministratici dalle (10) del precedente num°. 46. Per tal modo ci persuaderemo che la quantità (15) num°. 47. si trasforma senza alterazione di valore nella seguente

$$\begin{aligned}&\left(\frac{dL_1}{dp}+\frac{dM_1}{dq}+\frac{dN_1}{dr}\right)\delta x\\ (17)\qquad &+\left(\frac{dL_2}{dp}+\frac{dM_2}{dq}+\frac{dN_2}{dr}\right)\delta y\\ &+\left(\frac{dL_3}{dp}+\frac{dM_3}{dq}+\frac{dN_3}{dr}\right)\delta z+T\end{aligned}$$

essendo state adottate nuove denominazioni di quantità di cui si espongono i valori

$$\begin{aligned}L_1&=-2A\alpha_1-D\beta_1-E\gamma_1\\ M_1&=-D\alpha_1-2B\beta_1-F\gamma_1\\ N_1&=-E\alpha_1-F\beta_1-2C\gamma_1\\ L_2&=-2A\alpha_2-D\beta_2-E\gamma_2\\ (18)\qquad M_2&=-D\alpha_2-2B\beta_2-F\gamma_2\\ N_2&=-E\alpha_2-F\beta_2-2C\gamma_2\\ L_3&=-2A\alpha_3-D\beta_3-E\gamma_3\\ M_3&=-D\alpha_3-2B\beta_3-F\gamma_3\\ N_3&=-E\alpha_3-F\beta_3-2C\gamma_3\end{aligned}$$

$$(19)\quad \begin{aligned} T = &- \frac{d\,.\,(L_1\,\delta x + L_2\,\delta y + L_3\,\delta z)}{dp} \\ &- \frac{d\,.\,(M_1\,\delta x + M_2\,\delta y + M_3\,\delta z)}{dq} \\ &- \frac{d\,.\,(N_1\,\delta x + N_2\,\delta y + N_3\,\delta z)}{dr}\,. \end{aligned}$$

In appresso col medesimo ragionamento scritto verso il fine del num°. 36. proveremo, che prescindendo sulle prime dall' esaminare le conseguenze derivanti dalla quantità (19) influente solo ai limiti del corpo, si hanno intanto le equazioni relative al moto di un punto qualunque interno, che sono

$$(20)\quad \begin{aligned} &\Gamma\left(X - \frac{d^2x}{dt^2}\right) + \frac{dL_1}{dp} + \frac{dM_1}{dq} + \frac{dN_1}{dr} = 0 \\ &\Gamma\left(Y - \frac{d^2y}{dt^2}\right) + \frac{dL_2}{dp} + \frac{dM_2}{dq} + \frac{dN_2}{dr} = 0 \\ &\Gamma\left(Z - \frac{d^2z}{dt^2}\right) + \frac{dL_3}{dp} + \frac{dM_3}{dq} + \frac{dN_3}{dr} = 0\,. \end{aligned}$$

50. Ora restano a tradursi le derivate differenziali per p, q, r in differenziali per x, y, z, in corrispondenza al già fatto per le equazioni (16) del num°. 36. Qui però bisogna osservare che il principio analitico per sì fatta trasformazione esposto nelle equazioni (17), (18) del num°. 37., riceve nel caso attuale una semplificazione. Conviene da prima scrivere di nuovo quelle equazioni mettendo H, $\frac{1}{H}$ in luogo di $\frac{1}{\Gamma}$, Γ (equazione (6) num°. 9. Capo 1°.), poi notare che il sestinomio H fra le x, y, z derivate per a, b, c si cambia nell' H_1 fra le x, y, z derivate per p, q, r (equazione (3) di questo Capo), il quale H_1 al cominciare del num°. 46. fu dimostrato eguale all' unità. Messi inoltre in luogo delle derivate $\frac{dx}{dp}$, $\frac{dx}{dq}$, ec. i valori angolari datici dalle equazioni (10) num°. 46., concchiuderemo che il principio analitico del num°. 37. adattato al caso attuale, viene espresso mediante la formola

$$\frac{dL}{dp} + \frac{dM}{dq} + \frac{dN}{dr} = \frac{dK_1}{dx} + \frac{dK_2}{dy} + \frac{dK_3}{dz} \tag{21}$$

essendo

$$\begin{aligned} K_1 &= L\alpha_1 + M\beta_1 + N\gamma_1 \\ K_2 &= L\alpha_2 + M\beta_2 + N\gamma_2 \\ K_3 &= L\alpha_3 + M\beta_3 + N\gamma_3 . \end{aligned} \tag{22}$$

L'applicazione tre volte ripetuta di questa formola alle equazioni (20) le cangia nelle

$$\begin{aligned} \Gamma\left(X - \frac{d^2x}{dt^2}\right) + \frac{d\Lambda}{dx} + \frac{d\Sigma}{dy} + \frac{d\Phi}{dz} &= 0 \\ \Gamma\left(Y - \frac{d^2y}{dt^2}\right) + \frac{d\Sigma}{dx} + \frac{d\Xi}{dy} + \frac{d\Psi}{dz} &= 0 \\ \Gamma\left(Z - \frac{d^2z}{dt^2}\right) + \frac{d\Phi}{dx} + \frac{d\Psi}{dy} + \frac{d\Pi}{dz} &= 0 \end{aligned} \tag{23}$$

avendo assunte per abbreviare le denominazioni

$$\begin{aligned} \Lambda &= -2\alpha^2_1 A - 2\beta^2_1 B - 2\gamma^2_1 C - 2\alpha_1\beta_1 D - 2\alpha_1\gamma_1 E - 2\beta_1\gamma_1 F \\ \Xi &= -2\alpha^2_2 A - 2\beta^2_2 B - 2\gamma^2_2 C - 2\alpha_2\beta_2 D - 2\alpha_2\gamma_2 E - 2\beta_2\gamma_2 F \\ \Pi &= -2\alpha^2_3 A - 2\beta^2_3 B - 2\gamma^2_3 C - 2\alpha_3\beta_3 D - 2\alpha_3\gamma_3 E - 2\beta_3\gamma_3 F \\ \Sigma &= -2\alpha_1\alpha_2 A - 2\beta_1\beta_2 B - 2\gamma_1\gamma_2 C \\ &\quad - (\alpha_1\beta_2 + \beta_1\alpha_2) D - (\alpha_1\gamma_2 + \gamma_1\alpha_2) E - (\beta_1\gamma_2 + \gamma_1\beta_2) F \\ \Phi &= -2\alpha_1\alpha_3 A - 2\beta_1\beta_3 B - 2\gamma_1\gamma_3 C \\ &\quad - (\alpha_1\beta_3 + \beta_1\alpha_3) D - (\alpha_1\gamma_3 + \gamma_1\alpha_3) E - (\beta_1\gamma_3 + \gamma_1\beta_3) F \\ \Psi &= -2\alpha_2\alpha_3 A - 2\beta_2\beta_3 B - 2\gamma_2\gamma_3 C \\ &\quad - (\alpha_2\beta_3 + \beta_2\alpha_3) D - (\alpha_2\gamma_3 + \gamma_2\alpha_3) E - (\beta_2\gamma_3 + \gamma_2\beta_3) F . \end{aligned} \tag{24}$$

Il sistema di queste equazioni (23), (24) è d'una generalità ed importanza quale meglio che con parole prevenienti è provata dalle applicazioni.

51. Il secondo passo dalle coordinate intermedie p, q, r alle attuali x, y, z, invece di farlo sulle equazioni (20) possiamo effettuarlo a dirittura nella equazione generale (13): anzi ci è necessario di far così quando vi sono anche forze particolari applicate alla superficie del corpo. A questo fine osserveremo che l'espressione (17) equivalente alla (15) la quale fu dimostrata rappresentare tutta la quantità sottoposta al secondo integrale nella (13), può ridursi fra derivate per le x, y, z mediante il principio analitico scritto nelle equazioni (21), (22).

Per la parte che riguarda i tre coefficienti delle δx, δy, δz, la riduzione si pratica come più sopra per venire alle (23), ed essa si cangia nella

$$(25)\qquad \begin{aligned} &\left(\frac{d\Lambda}{dx}+\frac{d\Sigma}{dy}+\frac{d\Phi}{dz}\right)\delta x \\ +&\left(\frac{d\Sigma}{dx}+\frac{d\Xi}{dy}+\frac{d\Psi}{dz}\right)\delta y \\ +&\left(\frac{d\Phi}{dx}+\frac{d\Psi}{dy}+\frac{d\Pi}{dz}\right)\delta z \end{aligned}$$

avendo le Λ, Ξ, ec. i valori (24). Quanto alla parte residua nella espressione (17), cioè alla T, si noti (equazione (19)) ch' essa è ancora un trinomio di cui può effettuarsi la trasformazione per mezzo della formola (21). Facciasi, e raccogliendo i coefficienti totali delle δx, δy, δz, e sostituendo i valori (18), si troverà a motivo delle denominazioni (24) essere

$$(26)\qquad \begin{aligned} \mathrm{T} = &-\frac{d.(\Lambda\delta x+\Sigma\delta y+\Phi\delta z)}{dx} \\ &-\frac{d.(\Sigma\delta x+\Xi\delta y+\Psi\delta z)}{dy} \\ &-\frac{d.(\Phi\delta x+\Psi\delta y+\Pi\delta z)}{dz}. \end{aligned}$$

La somma delle due espressioni (25), (26) è quella che va posta sotto il secondo integrale della (13). Cambieremo poi gli integrali per p, q, r in quelli per x, y, z come al num°. 48. introducendo sotto i segni il fattore H_1 che non altera i valori per essere eguale alla unità, e facendo uso del solito teorema.

Riuniti i due primi termini della (13) mediante un solo segno d' integrale triplicato, se si annullano i coefficienti totali delle δx, δy, δz, esclusa la quantità T, veggonsi ritornare le equazioni (23). Ma v' è la quantità T ridotta all'espressione (26) fatta di tre parti, sopra ciascuna delle quali può eseguirsi alcuna delle integrazioni per x o per y o per z. Eseguiscansi tali integrazioni, e si avranno nella equazione generale (13) i termini

$$(27)\qquad \begin{aligned} &-\int dx \int dy \,.\, (\Phi\delta x + \Psi\delta y + \Pi\delta z) \\ &-\int dx \int dz \,.\, (\Sigma\delta x + \Xi\delta y + \Psi\delta z) \\ &-\int dy \int dz \,.\, (\Lambda\delta x + \Sigma\delta y + \Phi\delta z) \end{aligned}$$

intorno ai quali vi è bisogno di qualche spiegazione. Veramente stando a quanto praticò Lagrange in un caso simile (M. A. T. 1.° pag. 212.) i precedenti integrali duplicati invece di tre dovrebbero essere sei, avendosene due di segno contrario per ogni integrazione effettuata, espressi mediante la convenzione di marcare con uno o due tratti le quantità spettanti a limiti opposti. Ma Lagrange stesso nel luogo citato ha fatto conoscere che tali integrali a due a due possono concentrarsi in un solo, intendendo che la terza variabile, oltre le due per le quali è indicata l' integrazione (nel primo dei precedenti sarebbe la z) prenda tutti i valori somministrati dalla equazione della superficie conterminante il corpo, cioè tanto quelli rispondenti ad un limite, come quelli rispondenti al limite opposto. Allora i segni si aggiustano da se stessi a motivo di un' altra supposizione sottintesa che apparirà più chiara per ciò che ora soggiungeremo.

Oltre la parte (27) venutaci in conseguenza di integrazioni eseguite, può esservene nell' equazione generale (13) un' altra affetta da segno d' integrale duplicato, compresa nell' ultimo termine Ω, proveniente da una forza applicata ai punti della superficie del corpo, e che ora è bene mettere in evidenza. Chiamate λ, μ, ν le tre componenti di questa forza parallele ai tre assi per un punto qualunque (x, y, z) della superficie, raccoglieremo tutti i trinomj

$$\lambda \delta x + \mu \delta y + \nu \delta z$$

spettanti ai diversi punti della superficie stessa mediante un integrale duplicato preso per rapporto a due variabili semplici di cui le x, y, z si considerino funzioni (equazione (31) num°. 30.), indi passeremo ad un integrale duplicato per le x, y, come già praticammo altrove (equazione (26) num°. 12.). Ci risulterà allora l' espressione

$$(28) \qquad \int dx \int dy \,.\, (\Gamma) \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2} \left(\lambda \delta x + \mu \delta y + \nu \delta z\right)$$

dove ho indicato con (Γ) la densità che regna fra le molecole alla superficie. Qui però convien fare una osservazione, ed è che siccome una pressione sulla superficie del corpo opera sempre dal di fuori verso il di dentro, girando tutt' all' intorno di esso corpo, ad ogni pressione diretta per un verso ne corrisponde una di segno contrario. Per questa circostanza la precedente espressione integrale (28) dovrebbe essere scomposta in due parti simili di cui l' una si assumesse positiva, l' altra negativa: il che si tralascia di fare, tenendo la cosa per sottintesa. È per la ragione analoga che i due integrali duplicati i quali, come sopra dicemmo, avrebbero dovuto prendere il posto di ciascuno degli espressi nella quantità (27), hanno potuto compendiarsi in un solo; di guisa che devesi ritenere che la parte espressa nella (27) corrisponde alla parte espressa nella (28), e la negativa sottintesa di quella corrisponderebbe alla negativa sottintesa di questa. Pertanto dopo una tale dichiarazione tutta la parte dell' equazione generale (13) affetta da segni d' integrali duplicati può ritenersi rappresentata dalla somma delle due quantità (27), (28).

52. Ma ciò non basta ancora per dedurre le equazioni che si verificano soltanto alla superficie del corpo. Nella quantità (27) si veggono tre integrali duplicati dove le variabili semplici non sono sempre le stesse: il primo suppone che la terza variabile z diventi quella funzione di x, y che risulta sciogliendo per essa l' equazione della superficie, il secondo suppone invece

dedotta dalla stessa equazione la y in funzione di x, z, ed il terzo suppone funzione delle altre due la x. Conviene adunque trasformare i due integrali secondo e terzo per modo che siano anch' essi presi considerando le x, y variabili semplici, il che io ho già fatto altrove in un caso più particolare (Vedi Giornale dell' I. R. Istituto Lombardo. T. VI, pag. 337.). Richiamiamo la teorica per la trasformazione di un integrale duplicato

$$\int dp \int dq \,.\, \mathrm{P}(p, q) \tag{29}$$

quando si vogliono mutare le variabili p, q in altre r, s in virtù di due equazioni

$$p = p(r, s)\,; \quad q = q(r, s)\,. \tag{30}$$

L' integrale trasformato equivalente al precedente (29) è

$$\int dr \int ds \,.\, \mathrm{P}\Big(p(r,s),\; q(r,s)\Big)\left(\frac{dp}{dr}\frac{dq}{ds} - \frac{dp}{ds}\frac{dq}{dr}\right). \tag{31}$$

Il teorema è dimostrato da tutti i Trattatisti, e noi pure ne facemmo in questa Memoria replicatamente uso dove parlammo dei sistemi continui superficiali.

Cominciamo pertanto a trasformare il terzo degli integrali (27), prendendo nelle formole (29), (31)

$$p = y\,,\; q = z\,; \quad r = x\,,\; s = y\,,$$

e adottando in luogo delle (30) le due equazioni

$$y = y\,; \quad z = z(x, y)$$

delle quali la prima è identica. Vedremo facilmente che ci viene

$$\begin{aligned} &\int dy \int dz \,.\, (\Lambda\delta x + \Sigma\delta y + \Phi\delta z) = \\ &- \int dx \int dy \,.\, \frac{dz}{dx}\,(\Lambda\delta x + \Sigma\delta y + \Phi\delta z)\,. \end{aligned} \tag{32}$$

Similmente per trasformare il secondo degli integrali (27), prenderemo nelle formole (29), (31)

$$p = x\,,\; q = z\,; \quad r = y\,,\; s = x\,,$$

surrogando alle equazioni (30) le seguenti

$$x = x\,; \quad z = z\,(x, y)$$

e così otterremo

$$(33) \qquad \begin{aligned} &\int dx \int dz \,.\, (\Sigma\delta x + \Xi\delta y + \Psi\delta z) = \\ &- \int dx \int dy \,.\, \tfrac{dz}{dy}\, (\Sigma\delta x + \Xi\delta y + \Psi\delta z)\,. \end{aligned}$$

Adesso per effetto delle equazioni (32), (33) tutti i quattro integrali duplicati di cui consta la somma delle quantità (27), (28) vengono ridotti colle stesse variabili semplici; e quindi quella somma può portare un solo segno d'integrale duplicato, e scriversi

$$(34) \qquad \begin{aligned} &\int dx \int dy \,.\, \Big\{ \Big(\lambda(\Gamma)\sqrt{1 + \left(\tfrac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\tfrac{dz}{dy}\right)^2} - \Phi + \tfrac{dz}{dx}\,\Lambda + \tfrac{dz}{dy}\,\Sigma\Big)\,\delta x \\ &\quad + \Big(\mu(\Gamma)\sqrt{1 + \left(\tfrac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\tfrac{dz}{dy}\right)^2} - \Psi + \tfrac{dz}{dx}\,\Sigma + \tfrac{dz}{dy}\,\Xi\Big)\,\delta y \\ &\quad + \Big(\nu(\Gamma)\sqrt{1 + \left(\tfrac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\tfrac{dz}{dy}\right)^2} - \Pi + \tfrac{dz}{dx}\,\Phi + \tfrac{dz}{dy}\,\Psi\Big)\,\delta z \Big\}\,. \end{aligned}$$

Non essendovi da estrarre altro integrale duplicato dall'ultima parte Ω dell'equazione generale (13), i coefficienti totali delle variazioni δx, δy, δz nella precedente espressione (34), giusta i principj del calcolo delle variazioni, debbono essere zero. Di qui tre equazioni che si verificano alla superficie del corpo, e dalle quali possono dedursi importanti teoremi. Ne vedremo uno nel Capo seguente pel caso particolare che il corpo sia un fluido.

53. Prima di lasciare queste considerazioni sulle quantità ai limiti, dirò che da esse può facilmente cavarsi tutta quella dottrina che diede argomento a varie Memorie del Sig. Cauchy inserite ne' suoi primi *Esercizj di Matematica*. Ci è lecito in fatti immaginare per entro alla massa del corpo e per la durata di un solo istante di tempo (quando trattasi di moto) un parallelepipedo rettangolo grande o piccolo come più piace, e

restringerci a riguardare il moto o l' equilibrio di esso solo, astraendolo col pensiero dall' equilibrio o dal moto di tutto il resto del corpo, e intendendo supplito l'effetto di tutta la materia circostante col mezzo di pressioni esercitate sulle sei facce di quel parallelepipedo. Allora in virtù delle tre equazioni che sul fine del num°. precedente insegnammo a dedurre e che in tale particolare supposizione diventano assai più semplici, troveremo tre equazioni fra le componenti λ, μ, ν, parallele agli assi, della pressione per un punto qualunque di una faccia, e le sei quantità Λ, Ξ, Π, Σ, Φ, Ψ nelle quali le variabili x, y, z abbiano assunti i valori proprj delle coordinate di quel punto. Ma se per detto punto prendasi quello di un angolo del parallelepipedo, appartenendo esso contemporaneamente a tre facce, le equazioni anzidette cresceranno a maggior numero. Oltre le tre componenti λ, μ, ν della pressione per quel punto considerato siccome appartenente ad una faccia, avremo tre simili componenti di un' altra pressione, considerando il punto come appartenente ad un' altra faccia, e così tre altre per la terza faccia. Le sei quantità però Λ, Ξ, ec. saranno sempre le stesse, giacchè esse non dipendono che dai valori delle coordinate del punto, le quali non mutano in qualunque faccia il punto si consideri. Eliminando quindi queste sei quantità fra le nove equazioni che risultano, si giunge a tre relazioni fra le dette componenti. Di più: può immaginarsi un altro parallelepipedo rettangolo diverso dal precedente, ma avente comune con esso il vertice di un angolo, cioè il punto (x, y, z): allora si ottengono altre nove equazioni, considerando lo stesso punto come appartenente a tre facce del nuovo parallelepipedo: ma le sei quantità Λ, Ξ, ec. rimangono sempre immutate. Di qui altre relazioni fra le pressioni sulle facce del nuovo parallelepipedo e quelle sulle facce dell' antico. Questi teoremi hanno qualche merito: noterò il vantaggio di potere per mezzo delle ideate pressioni fissare un significato, cioè dare una rappresentazione meccanica (sebbene con un po' di stento) a ciascuna delle sei quantità Λ, Ξ, ec. La nostra analisi però cammina indipenden-

temente dai mentovati teoremi, e quindi essi riescono per noi di molto minore importanza che pel ricordato Geometra. Mi dispenserò pertanto dal farne l'esposizione che mi condurrebbe un po' in lungo, e mi basterà aver indicato il principio da cui dedurli per via piana e diretta; essendo mio proposito, come dissi più volte, far vedere che i metodi di Lagrange arrivano (e meglio che gli altri) a tutto, e solo si rifiutano di dar ciò che altrimenti si può provare non essere esattamente vero. Intanto prego il lettore a voler por mente che il verificarsi dei teoremi fra le pressioni alla superficie dei corpi nel moto del pari che nell'equilibrio, è verità non chiaramente dimostrabile se non col nostro metodo. Qui infatti si vede subito che l'espressione (34) rimane la stessa in ambi i casi: il passaggio dall'equilibrio al moto introduce mutazione nelle sole quantità sottoposte all'integrale triplicato, cioè in luogo delle X, Y, Z, introduce i binomj

$$X - \frac{d^2 x}{dt^2}, \quad Y - \frac{d^2 y}{dt^2}, \quad Z - \frac{d^2 z}{dt^2}:$$

quindi le equazioni che si verificano a parte, perchè desunte dall'integrale duplicato (34), rimangono le medesime.

54. Ripigliamo ora le equazioni (23), (24) estensibili a tutta la massa del corpo, e troveremo che ci diranno importanti verità, se sapremo opportunamente interrogarle. Prima però ci conviene spingere più innanzi le considerazioni intorno alle molecole dei corpi, che al num°. 4. lasciammo imperfette, e intorno al modo con cui esse agiscono le une sulle altre. Tali azioni possono essere di due sorte: alcune provenienti da forze interne attive che produrrebbero un effetto quand' anche non vi fossero forze esterne applicate, per esempio, da attrazioni od elasticità: alcune provenienti da queste forze esterne le quali, applicate a certe molecole, si propagano eziandio alle altre, come pressioni sopra superficie ed anche forze simili alla gravità, essendo evidente nel maggior numero dei casi, che ciascuna molecola non risente della sola gravità propria, ma altresì di quella propria delle altre. Di qualunque natura siano

sì fatte azioni è facile capire, per le cose che ora diremo, dipendere esse principalmente dalla posizione rispettiva delle molecole, poi anche dalla loro figura. Stando alla nostra maniera di vedere esposta nel preambolo della Memoria, non dobbiamo fare ipotesi sulla natura delle forze molecolari. Però abbiamo ammesso le molecole disgiunte, e quel solo che di esse disse Newton (*), cioè che quantunque di una piccolezza immensamente al di sotto della portata de' nostri sensi, pure sono nei diversi corpi di differenti figure, e inalterabili da forze meccaniche. Ciò premesso, distinguiamo con diligenza le azioni reciproche delle molecole dipendentemente soltanto dalla collocazione delle une rispetto alle altre, e le azioni che dipendono inoltre dalle figure individuali: il che può anche dirsi più brevemente, distinguiamo ciò che deriva dalle molecole considerate *fra loro* da ciò che deriva dalle molecole considerate in *se stesse*. Una così fatta distinzione è fondamentale. A ravvisare le azioni della prima specie, immaginiamo le molecole omogenee e di figura sferica, e comprenderemo senza difficoltà che quelle azioni non possono essere alterate voltando ogni molecola per guisa che la parte di sopra venga di sotto, o la parte a sinistra passi a destra, purchè i centri delle sfere rimangano agli stessi posti. A ravvisare le azioni della seconda specie, immaginiamo le molecole di figura diversa dalla sferica, per esempio, prismatica o piramidale: e ci si farà manifesto, che quand' anche fossero eguali le distanze del centro di gravità di una molecola dai centri simili di due vicine, l'azione della prima sopra quella delle seconde cui rivolgesse una base o la punta, sarebbe diversa dall' azione sopra l' altra cui presentasse invece una faccia.

Se le azioni molecolari sono della sola prima specie, cioè non dipendenti dalla figura, le loro espressioni analitiche avranno questa proprietà, che date in funzioni delle coordinate delle diverse molecole riferite a tre assi rettangolari, e poi in funzione

(*) Optica. Lib. III. Quaestio XXXI.

delle coordinate delle stesse molecole riferite a tre altri assi rettangolari, saranno nei due casi di egnale struttura, e non differiranno se non per la diversità delle lettere adoperate ad esprimere le coordinate. La cosa è per se stessa evidente, considerato l'arbitrio nostro nel dare le denominazioni alle quantità, ma può anche vedersi partitamente negli elementi analitici dai quali conosciamo dover essere composte quelle espressioni. Di fatto le distanze ρ, ρ_1, ρ_2, ec. di una molecola (p, q, r) dalle molecole (p_1, q_1, r_1), (p_2, q_2, r_2), ec. quando il riferimento è agli assi delle p, q, r, sono date dai radicali

$$(35) \qquad \rho = \sqrt{(p_1-p)^2+(q_1-q)^2+(r_1-r)^2}\,; \quad \rho_1 = \sqrt{(p_2-p)^2+(q_2-q)^2+(r_2-r)^2}\,; \text{ ec.}$$

e lo sono dai radicali

$$(36) \qquad \rho = \sqrt{(x_1-x)^2+(y_1-y)^2+(z_1-z)^2}\,; \quad \rho_1 = \sqrt{(x_2-x)^2+(y_2-y)^2+(z_2-z)^2}\,; \text{ ec.}$$

quando il riferimento è agli assi delle x, y, z. I coseni degli angoli che la direzione di ciascuna delle ρ, ρ_1, ρ_2, ec. fa coi tre assi ortogonali, hanno i valori

$$(37) \qquad \frac{p_1-p}{\rho}, \quad \frac{q_1-q}{\rho}, \quad \frac{r_1-r}{\rho}\,; \quad \frac{p_2-p}{\rho_1}, \quad \text{ec.}$$

nel primo caso, mettendo per ρ, ρ_1, ec. i radicali (35); e i valori

$$\frac{x_1-x}{\rho}, \quad \frac{y_1-y}{\rho}, \quad \frac{z_1-z}{\rho}\,; \quad \frac{x_2-x}{\rho_1}, \quad \text{ec.}$$

nel secondo caso, mettendo per ρ, ρ_1, ec. i radicali (36). A motivo poi di un teorema notissimo, anche i coseni degli angoli fatti dalle rette ρ, ρ_1, ρ_2, ec. fra loro, che nel primo caso sono espressi dalle formole

$$(38) \qquad \cos.\rho.\rho_1 = \frac{(p_1-p)(p_2-p)+(q_1-q)(q_2-q)+(r_1-r)(r_2-r)}{\rho\rho_1}\,; \quad \text{ec.}$$

lo sono nel secondo mediante formole costrutte affatto similmente colle x, y, z.

Se poi sussistono fra le molecole azioni della seconda specie, azioni cioè alle quali prende parte la figura delle molecole

stesse, allora non è più vero che per cambiare le loro espressioni analitiche riferite agli assi delle p, q, r in quelle riferite agli assi delle x, y, z, basti sostituire in esse le x, y, z alle p, q, r: conviene cambiare altri elementi analitici. Per veder ciò chiaramente, immaginiamo anche una sola molecola di figura prismatica, della quale uno spigolo faccia cogli assi delle p, q, r angoli di coseni a_1, a_2, a_3: questi coseni entreranno nell' espressione dell' azione ch' essa molecola fa o riceve dalle circostanti: ed è manifesto, perchè se stando al loro posto tutte le molecole circostanti, essa mutasse la direzione di quello spigolo, l'azione vicendevole muterebbe. Adunque nelle espressioni delle azioni reciproche molecolari debbono entrare tante quantità a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, ec. pei valori delle quali venga fissata interamente la posizione di ciascuna molecola relativamente ai tre assi: il loro intervento in termini che si suppongono non trascurabili, significa che si è tenuto conto di quella parte di azione che è dovuta alla figura delle molecole diversa dalla sferica. Tali coseni a_1, a_2, a_3, a_4, ec. sono per natura affatto diversi da quelli sopra marcati colle formole (37): non si possono tradurre in espressioni fatte colle sole coordinate delle diverse molecole: possono essere differenti e di numero grandissimo, se le molecole entrano a comporre il corpo alla rinfusa sotto qualsivoglia direzione dei loro spigoli od assi, ma possono essere anche in pochissimo numero, se s' immagina che le molecole siano tutte disposte uniformemente, cioè abbiano i loro spigoli od assi fra loro paralleli, come credesi che avvenga ne' corpi cristallizzati. In conseguenza del fin qui detto si capisce che quando si passa a riferire il corpo agli assi delle x, y, z, nelle formole esprimenti le azioni delle molecole i coseni a_1, a_2, a_3,... dovranno essere cambiati con altri b_1, b_2, b_3,.... di diverso valore; giacchè è evidente che le direzioni degli spigoli od assi delle molecole prismatiche, piramidali, ellissoidali, ec., faranno cogli assi delle x, y, z angoli diversi da quelli che facevano cogli assi delle p, q, r. Ecco il di più da aggiungersi al cambiamento delle coordinate, che bastava nel

primo caso. Per altro ai coseni b_1, b_2, b_3, b_4,.... possono poi intendersi sostituiti valori equivalenti fatti dei primi coseni a_1, a_2, a_3,.... e dei nove coseni α_1, β_1, γ_1, α_2, ec. che fissano la posizione dei secondi assi rispetto ai primi: ciò in virtù del teorema di geometria analitica più sopra ricordato.

55. Ora vogliamo provare che le sei quantità 2A, 2B, 2C, D, E, F significano rapporto agli assi delle p, q, r ciò stesso che le sei Λ, Ξ, Π, Σ, Φ, Ψ significano rapporto agli assi delle x, y, z; però prescindendo dal segno, il che non fa difetto, essendo sempre in nostro arbitrio supporre originariamente cambiato il segno a quelle prime, con che renderemo positivi anche i secondi membri delle (24). A tale intendimento partiremo dalle equazioni (20) le quali partecipano d'entrambi i riferimenti alle due terne di assi, giacchè i trinomj che terminano i primi membri di quelle equazioni sono fatti di derivate per le p, q, r, e i primi termini, oltre le derivate seconde delle x, y, z pel tempo, contengono le X, Y, Z componenti della forza esterna parallele agli assi di queste coordinate. Quando siamo passati dalle (20) alle (23) abbiamo nelle prime trasformati que' trinomj, adesso convien trasformarne i primi termini. Chiamate P, Q, R, le tre componenti della forza esterna parallele agli assi delle p, q, r, avremo dalla teorica della composizione delle forze e dalle denominazioni (2) del num°. 33.

$$(39)\qquad \begin{aligned} X &= \alpha_1 P + \beta_1 Q + \gamma_1 R \\ Y &= \alpha_2 P + \beta_2 Q + \gamma_2 R \\ Z &= \alpha_3 P + \beta_3 Q + \gamma_3 R\,. \end{aligned}$$

Avremo altresì dalle equazioni (1) del num°. 33.

$$(40)\qquad \begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= \alpha_1 \frac{d^2p}{dt^2} + \beta_1 \frac{d^2q}{dt^2} + \gamma_1 \frac{d^2r}{dt^2} \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= \alpha_2 \frac{d^2p}{dt^2} + \beta_2 \frac{d^2q}{dt^2} + \gamma_2 \frac{d^2r}{dt^2} \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= \alpha_3 \frac{d^2p}{dt^2} + \beta_3 \frac{d^2q}{dt^2} + \gamma_3 \frac{d^2r}{dt^2}\,. \end{aligned}$$

Prendansi questi valori ultimamente ottenuti (39), (40), e si sostituiscano insieme coi (18) nelle equazioni (20): operando con diligenza noteremo che si giunge a tre risultati i quali possono essere compendiati sotto le forme

$$\begin{aligned} &\alpha_1 S + \beta_1 U + \gamma_1 W = 0 \\ (41) \qquad &\alpha_2 S + \beta_2 U + \gamma_2 W = 0 \\ &\alpha_3 S + \beta_3 U + \gamma_3 W = 0 \end{aligned}$$

dove le S, U, W hanno valori che dopo poche linee porremo per disteso. Si moltiplichino rispettivamente per α_1, α_2, α_3 le ultime equazioni (41), indi si sommino: si moltiplichino da capo rispettivamente per β_1, β_2, β_3, e parimenti si sommino: e si operi una terza volta similmente moltiplicando per le γ_1, γ_2, γ_3. In conseguenza delle equazioni (3) del num°. 33. ci risulteranno le equazioni

$$S = 0; \quad U = 0; \quad W = 0$$

le quali, mettendo per S, U, W i valori testè accennati e che abbiamo sospeso di scrivere, saranno

$$\begin{aligned} &\Gamma\left(P - \frac{d^2p}{dt^2}\right) - \frac{d\,.\,2A}{dp} - \frac{dD}{dq} - \frac{dE}{dr} = 0 \\ (42) \qquad &\Gamma\left(Q - \frac{d^2q}{dt^2}\right) - \frac{dD}{dp} - \frac{d\,.\,2B}{dq} - \frac{dF}{dr} = 0 \\ &\Gamma\left(R - \frac{d^2r}{dt^2}\right) - \frac{dE}{dp} - \frac{dF}{dq} - \frac{d\,.\,2C}{dr} = 0\,. \end{aligned}$$

Ecco le equazioni che stanno a riscontro delle (23) e che si appoggiano unicamente agli assi delle p, q, r, come le (23) si appoggiano unicamente agli assi delle x, y, z. Vedesi dal confronto di queste (42) colle (23) l'asserita corrispondenza delle sei quantità, a meno della differenza dei segni.

56. Diciamo inoltre che le mentovate sei quantità in ambi i casi sono le espressioni analitiche contenenti l'effetto complessivo di tutte le azioni interne sopra il punto generico (p, q, r) ovvero (x, y, z). Qui potremmo giovarci di quanto è scritto in

più luoghi della M. A. intorno ai coefficienti che moltiplicano le variate delle equazioni di condizione, che cioè può darsi loro una rappresentazione di forze: e veramente le sei quantità A, B, C, D, E, F (espressione (15) num°. 47) furono coefficienti introdotti a questa maniera. Ma non mi pare che ciò sia necessario: ho già insinuato nel preambolo della Memoria che il grande vantaggio dei metodi lagrangiani sta appunto nel prestarsi ad esprimere analiticamente i fatti, senza esigere che si vada a scrutinare la struttura interna di quelle quantità che ne significherebbero le cause, struttura la quale ci resterà sempre occulta, come ci occorrerà di meglio dichiarare nel Capo VI; di guisa che non abbisognano se non di ciò a cui la mente umana arriva con sicurezza, e fanno senza di ciò intorno a cui non potremo mai dire niente di certo. Se le forze interne tra le molecole non sussistessero, queste sarebbero punti fisici affatto liberi, e le equazioni del loro moto si avrebbero dai soli primi termini delle equazioni (23) o (42), ommessi quei trinomj colle derivate parziali. Tali trinomj invece esistono (e lo abbiamo provato) quando vi sono le azioni vicendevoli molecolari: essi adunque raccolgono l'espressione dei loro effetti: il che ci basta, senza imbarazzarci del come.

Ammesso che le sei quantità 2A, 2B, 2C, D, E, F contengano le espressioni analitiche degli effetti delle forze interne, quando il corpo è riferito agli assi delle p, q, r: e che lo stesso debba dirsi delle sei $\Lambda, \Xi, \Pi, \Sigma, \Phi, \Psi$, quando il riferimento è agli assi delle x, y, z, potremo applicare ad esse tutto quanto al num°. 54. dicemmo dover avvenire di quelle espressioni; che cioè quando non esistono azioni dipendenti dalla figura delle molecole, le prime si muteranno nelle seconde col mutare delle p, q, r nelle x, y, z: e che quando vi hanno anche quelle azioni di seconda specie, bisognerà inoltre mutare certe quantità $a_1, a_2, a_3 \ldots$ particolari alle prime in altre $b_1, b_2, b_3, \ldots$ particolari alle seconde. Se non che, può qui sorgere una difficoltà che è bene di prevenire e di togliere, anche all'oggetto di formarci qualche idea un po' più adequata intorno alla natura

di dette sei quantità. Esse, quali appajono nelle equazioni (42), (23), sono funzioni delle sole coordinate p, q, r ovvero x, y, z del punto generico, mentre in quelle quantità (35), (38), che sopra dicemmo dover costituire come gli elementi analitici delle espressioni delle forze interne, entravano anche le coordinate p_1, q_1, r_1; p_2, q_2, r_2, ec. di altre molecole. Rispondo che deve appunto essere così per la ragione che le sei quantità 2A, 2B, ec. rappresentano il complesso di tutte le azioni delle molecole circostanti su quella che ha per coordinate p, q, r. Se si trattasse di una sola espressione dell'azione elementare fra la molecola (p, q, r) e un' altra qualunque (ξ, η, ζ), certamente vi dovrebbero entrare tanto le prime che le seconde coordinate, ma trattandosi del complesso di tutte le azioni simili, le variabili ξ, η, ζ debbono (restando ferme le p, q, r) prendere successivamente i valori delle coordinate di tutte le molecole del corpo, ed esaurire per intero la loro variabilità, talchè più non compajano. Quelle sei quantità vestono il significato di veri integrali definiti triplicati presi per le variabili ξ, η, ζ, e aventi per limiti i valori di queste variabili ai limiti del corpo. Ciò apparirà più chiaro nel Capo VI. Può anche erigersi qualche altra difficoltà, di cui ci pare più opportuno riserbare l'esposizione al Capo seguente.

Dopo il fin qui detto avremo nozioni più chiare intorno alle quantità che compongono le equazioni (24), appunto come si richiede per poterne trarre profitto. Nei primi membri le Λ, Ξ, ec. sono funzioni delle x, y, z e di quei coseni b_1, b_2, b_3... che intervengono nel solo caso che si tien conto della figura delle molecole: nei secondi membri le 2A, 2B, 2C, D, E, F sono funzioni dei coseni a_1, a_2, a_3.... corrispondenti ai b_1, b_2, b_3.... anzidetti, e delle p, q, r alle quali sono stati sostituiti (come risulta dal num°. 50.) i loro valori (31) num°. 40., fatti colle x, y, z. Sotto questo aspetto richiameremo la composizione delle quantità che entrano nelle equazioni (24), in un luogo del Capo seguente onde dedurne una importantissima conseguenza. Qui ci gioverà immaginare che nei primi membri, per entro alle

quantità Λ, Ξ, ec. siano stati sostituiti ai coseni b_1, b_2, b_3.... i loro valori equivalenti espressi cogli a_1, a_2, a_3.... e cogli altri α_1, β_1, γ_1, α_2, ec., siccome dicemmo alla fine del num°. 54.: e che dappertutto le x, y, z abbiano ripresi i valori (1) del num°. 33. fatti colle p, q, r. Vediamo allora mentalmente che nei secondi membri le sei quantità 2A, 2B, ec. ritornano funzioni delle p, q, r e delle a_1, a_2, a_3.... quali ce le dà immediatamente il riferimento del corpo ai primi assi. Ed ecco il vero punto di vista di dove riconoscere il grande vantaggio che verremo a ritrarre dalle equazioni (24). Quelle nove quantità α_1, β_1, γ_1, α_2, ec., le quali, secondo l' ultimo concetto stanno dentro le Λ, Ξ, ec. mischiate colle a_1, a_2, a_3... e colle p, q, r, nei secondi membri sono esplicite, non entrando per niente a formare le espressioni 2A, 2B, 2C, D, E, F. Possiamo quindi dar loro valori particolari a fine di modificare opportunamente le quantità dei primi membri, ossia (ciò che vale lo stesso) possiamo appoggiarci agli assi delle p, q, r per andare in cerca di altri assi delle x, y, z dotati di proprietà speciali.

57. Un' idea che suggerisce per la prima si è di determinare le α_1, β_1, γ_1, α_2, ec. in maniera che una delle sei quantità formanti i primi membri delle equazioni (24), per esempio la Λ, riesca massima o minima. Rammentandoci che abbiamo l'equazione di condizione $\alpha^2_1 + \beta^2_1 + \gamma^2_1 = 1$ (prima delle (4) num°. 33.), la ridurremo col secondo membro zero, ne moltiplicheremo il primo membro per un coefficiente indeterminato λ, e aggiungendo il prodotto alla quantità Λ, tratteremo tal somma come se le α_1, β_1, γ_1 fossero fra di loro indipendenti; così arriveremo alle equazioni

$$
(43) \qquad \begin{aligned}
2A\alpha_1 + D\beta_1 + E\gamma_1 &= \lambda\alpha_1 \\
D\alpha_1 + 2B\beta_1 + F\gamma_1 &= \lambda\beta_1 \\
E\alpha_1 + F\beta_1 + 2C\gamma_1 &= \lambda\gamma_1 .
\end{aligned}
$$

Dividendole tutte per uno dei coseni da determinarsi, per esempio per α_1, si possono dalle tre equazioni eliminare i due rapporti

$\frac{\beta_1}{\alpha_1}$, $\frac{\gamma_1}{\alpha_1}$, e allora si ottiene per determinar λ l'equazione del terzo grado

$$(44)\quad \begin{aligned} &\lambda^3 - 2(A+B+C)\lambda^2 + (4AB+4AC+4BC-D^2-E^2-F^2)\lambda \\ &+ 2AF^2 + 2BE^2 + 2CD^2 - 8ABC - 2DEF = 0 \end{aligned}$$ (*)

già nota (quanto alla forma) in meccanica, e trattata da varj autori.

La stessa ricerca poteva istituirsi a fine di render massima o minima la Ξ, visto il suo valore datoci dalla seconda delle (24), avvertendo che fra le α_2, β_2, γ_2 sussiste un'equazione di condizione che si legge nella seconda delle equazioni (4) num°. 33. Saremmo per tal guisa giunti alle equazioni

$$(45)\quad \begin{aligned} 2A\alpha_2 + D\beta_2 + E\gamma_2 &= \mu\alpha_2 \\ D\alpha_2 + 2B\beta_2 + F\gamma_2 &= \mu\beta_2 \\ E\alpha_2 + F\beta_2 + 2C\gamma_2 &= \mu\gamma_2 \end{aligned}$$

essendo qui la μ il moltiplicatore introdotto dall' equazione di condizione. E la stessa ricerca istituita per rendere massima o minima la Π ci avrebbe porte le equazioni

$$(46)\quad \begin{aligned} 2A\alpha_3 + D\beta_3 + E\gamma_3 &= \nu\alpha_3 \\ D\alpha_3 + 2B\beta_3 + F\gamma_3 &= \nu\beta_3 \\ E\alpha_3 + F\beta_3 + 2C\gamma_3 &= \nu\gamma_3 \end{aligned}$$

in cui la ν fa le veci delle λ, μ nelle simili.

Siccome le (45) non diversificano dalle (43) se non per esservi le α_2, β_2, γ_2 in luogo delle α_1, β_1, γ_1, e la μ in luogo della λ, è evidente che, eliminate le α_2, β_2, γ_2, arriveremo alla stessa equazione di terzo grado (44), colla sola differenza

(*) Che questa equazione cubica abbia sempre tutte tre le sue radici reali, ne abbiamo una bella e recente dimostrazione di un geometra tedesco Signor Kummer, tradotta in italiano e illustrata dal celebre Signor Jacobi. (Vedi Giornale arcadico di Roma: Tomi XCVIII, XCIX.)

che l'incognita sarà la μ invece della λ: e lo stesso accadrà eliminando le α_3, β_3, γ_3 dalle (46). Da ciò non dobbiamo conchiudere che le λ, μ, ν siano fra loro eguali, ma che corrispondono alle tre radici dell'equazione (44). Per ogni terna di equazioni (43), (45), (46), aggiunta la relativa equazione di condizione, si possono ricavare i valori dei tre coseni, e quindi determinare tutte le nove quantità α_1, β_1, γ_1, α_2, ec. in funzioni delle sei 2A, 2B, 2C, D, E, F. Questo calcolo è già stato fatto da altri (si può consultare Cauchy, Leçons sur l'application du calcul infinitésimal à la Géometrie. T. I. pag. 241): ed anche senza giovarsi di altri sussidj, si capisce subito come deve essere condotto. Dove parmi che il cammino possa essere di molto abbreviato, è quando si tratta di venire alla conseguenza che le tre rette determinanti gli angoli di coseni α_1, β_1, γ_1, α_2, ec. sono poi fra loro ad angolo retto, vale a dire costituiscono un sistema di assi ortogonali: il che analiticamente si riduce a provare che essendovi fra le dette nove quantità le prime tre equazioni delle (4) num°. 33., nel nostro caso sussistono anche le seconde tre. Ecco una via facile per giungere a tal conclusione. Si moltiplichino rispettivamente per α_1, β_1, γ_1 le equazioni (45), e quindi si sommino; nel far la somma de' primi membri si raccolgano i coefficienti totali delle α_2, β_2, γ_2, e vi si sostituiscano i valori dati dalle equazioni (43): avremo un' equazione che potremo scrivere

$$(\lambda-\mu)(\alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2+\gamma_1\gamma_2)=0.$$

Facciasi la stessa operazione sulle equazioni (46), e conseguiremo l'altra equazione

$$(\nu-\lambda)(\alpha_1\alpha_3+\beta_1\beta_3+\gamma_1\gamma_3)=0.$$

Si moltiplichino poi rispettivamente le (46) non più per α_1, β_1, γ_1, ma per α_2, β_2, γ_2, e sommandole e sostituendo ai coefficienti totali delle α_3, β_3, γ_3 i valori dati dalle equazioni (45), otterremo la terza

$$(\mu-\nu)(\alpha_2\alpha_3+\beta_2\beta_3+\gamma_2\gamma_3)=0.$$

Ora, se i valori delle tre radici λ, μ, ν dell' equazione (44) sono fra loro diversi (senza di che non avremo più tre rette distinte, ma una sola), i primi fattori nei primi membri delle tre ultime equazioni non possono essere zero: conviene pertanto che lo siano i secondi fattori: il che prova ciò che era in questione.

Osservisi che la somma dei primi membri delle (45) moltiplicati rispettivamente per α_1, β_1, γ_1 riproduce (equazioni (24)) il valore della quantità $-\Sigma$: la somma simile dei primi membri delle (46) moltiplicati per gli stessi coseni, presenta quello della quantità $-\Phi$: e l'altra simile delle stesse (46) moltiplicate per α_2, β_2, γ_2, il valore della quantità $-\Psi$. E siccome abbiamo già provato che queste somme sono zero, emerge la bella proprietà dell' annullarsi le quantità Σ, Φ, Ψ per quei tre assi ortogonali pei quali le Λ, Ξ, Π hanno le proprietà analitiche spettanti al massimo o al minimo.

58. Abbiamo trovato, pel corpo qualunque che consideriamo, tre assi ortogonali dotati della descritta insigne proprietà, appoggiandoci ad assi delle p, q, r arbitrariamente posti nello spazio, e mediante i valori delle sei quantità 2A, 2B, 2C, D, E, F legate ai detti assi. Se fossimo partiti da assi presi nello spazio in posizione affatto diversa, saremmo arrivati agli stessi assi pel corpo, aventi quella proprietà? Rispondo che sì: e ciò è cosa degna di molta attenzione. C' è dell' arbitrario nel mezzo che si adopera per la determinazione degli anzidetti assi nel corpo, ma l'arbitrario sparisce quando si ottiene il fine. Così si prova che gli assi ortogonali dotati di quella proprietà sono unici per ogni molecola nel corpo alla fine del tempo t, e inerenti alla natura del corpo stesso. Dissi alla fine del tempo t, il che torna come dire sono assi istantanei: giacchè le quantità 2A, 2B, ec. da cui vedemmo dipendere gli angoli che ne fissano la posizione, sono, generalmente parlando, funzioni del tempo.

Descriverò e non esporrò il calcolo atto a dimostrare l'asserita proposizione: credo potermi prendere un tal comodo per due ragioni: la prima, che l' esposizione riescirebbe lunga, a

danno di quell' economia di spazio alla quale mi tengo obbligato in questa Memoria: la seconda, che malgrado la sua prolissità il calcolo è facile, ed il lettore intelligente non avrà bisogno che di pazienza se gli venga voglia di stenderlo.

Chiamo (I) il sistema arbitrariamente posto degli assi p, q, r; e (III) il sistema degli assi trovati mediante le equazioni (43), (45), (46), dove converrà accentare tutte le nove quantità α_1, β_1, γ_1, α_2, ec., le quali non sono ora più le generali, avendo ricevuta la determinazione portata dalle stesse equazioni: queste α'_1, β'_1, γ'_1, α'_2, ec. significano le relazioni angolari fra (III) ed (I). Chiamo (II) un altro sistema di assi ortogonali diverso da quello delle p, q, r, comunque posto nello spazio relativamente ad esso sistema (I): e per rapporto a questo nuovo sistema (II) indico con 2A', 2B', 2C', D', E', F' le solite sei quantità. Chiamo altresì (IV) il sistema degli assi ortogonali ottenuto partendo da (II) col mezzo di equazioni fatte come le (43), (45), (46): dove bisognerà esprimere con lettere diverse, per esempio con l'_1, m'_1, n'_1, l'_2, ec., i soliti nove coseni, che significheranno fra (IV) e (II) quello che α'_1, β'_1, γ'_1, α'_2, ec. significano fra (III) e (I). Se vogliamo riferire anche il sistema (IV) direttamente al sistema (I), ci è necessario designare con nuove lettere α''_1, β''_1, γ''_1, α''_2, ec. i nove coseni portati da questa diretta relazione. Ma possiamo fare un tal riferimento in un' altra maniera: mettere nelle nove equazioni simili alle (43), (45), (46), fra (IV) e (II), per 2A', 2B', 2C', D', E', F' gli stessi valori delle Λ, Ξ, Π, Σ, Φ, Ψ offertici dalle equazioni (24), giacchè sono valori per assi in qualsivoglia modo collocati rispetto a quelli delle p, q, r: e mettere per l'_1, m'_1, n'_1, l'_2, ec. i valori equivalenti datici dalla Geometria analitica e formati cogli α_1, β_1, γ_1, α_2, ec. fra (II) e (I) e cogli α''_1, β''_1, γ''_1, α''_2, ec. fra (IV) ed (I). Allora, mediante un processo di calcolo che è il medesimo praticato al num°. 55. per passare dalle equazioni (41) alle tre seguenti, otterremo nove equazioni finali che non diversificheranno dalle (43), (45), (46) se non per esservi le α''_1, β''_1, γ''_1, α''_2, ec. in luogo delle α'_1, β'_1, γ'_1, α'_2, ec.

Ma queste nove quantità ricevono appunto la determinazione dei loro valori dalle dette nove equazioni: dunque i valori sono i medesimi: dunque il sistema (IV) coincide col sistema (III).

59. Si può provare tenendo dietro a quanto ha scritto il Sig. Cauchy in un caso analogo nell' opera superiormente citata, che i tre assi del corpo contraddistinti dalla proprietà di cui parliamo, coincidono coi tre assi di una elissoide espressa dalla equazione

$$A\xi^2 + B\eta^2 + C\zeta^2 + D\xi\eta + E\xi\zeta + F\eta\zeta = \tfrac{1}{2}.$$

È ben certo che secondo la diversa natura dei corpi presi ad esame, i suddetti assi debbono presentare altre proprietà speciali meccaniche e fisiche, diventando in qualche caso i medesimi per tutte le molecole: e che la strada per venirne in cognizione non può essere che quella d' insistere sull'analisi della quale si è cercato di mettere qui più in chiaro i principj.

60. Sul fine di questo Capo porrò due osservazioni generali.

La prima tende a sdebitarmi di una promessa incorsa fino dal num°. 7. Cap. I., quando dissi potersi prendere la disposizione delle molecole di un liquido invece di quella delle molecole ai vertici di picciolissimi cubi, purchè la densità dei due ammassi resti costante ed eguale in entrambi. Si ha una riconferma di quanto là si è asserito, riguardando la composizione delle quantità analitiche rappresentanti le coordinate dei punti del sistema, sotto quel punto di vista che abbiamo cercato di indicare verso la fine del num°. 45, dove sponemmo il principio analitico di que' sestinomj che si moltiplicano successivamente. Ivi dicemmo che quel grado di composizione può spingersi innanzi a piacimento, e si può anche da un grado più spinto retrocedere ad uno che lo sia meno. Se quindi ci accomoda pel meccanismo del calcolo assumere quale ultimo termine di confronto, non le coordinate spettanti alla distribuzione del liquido, ma quelle spettanti alla distribuzione dei cubi, possiamo farlo, come pure ci è lecito retrocedere mentalmente da questa a quella per fissare le idee sopra un fatto esistente

in natura. Quantunque ci sia ignoto il modo con cui vengono espresse le une per le altre le coordinate spettanti a queste due composizioni, l'ignoranza non ci nuoce: andando su o giù di un grado per la scala di que' sestinomj, gl' integrali triplicati possono intendersi analogamente cambiati, e l' effetto rimane il medesimo. Si mediti sui trapassi da coordinate a coordinate praticati dopo quel num°. 45, e si capirà la verità della nostra asserzione.

Passando alla seconda riflessione, inviterò il lettore a volgere un colpo d'occhio a quel principio uno, di dove emanano tutte le equazioni che comprendono innumerabili verità. Un tal principio sta nel riferimento simultaneo di un qualunque sistema a due terne di assi ortogonali: esso può adoperarsi in due maniere e in entrambe produce grandiosi effetti. Si adopera in una prima maniera per rischiarare quanto già dicevasi intorno ai moti minimi compatibili colle equazioni di condizione a fine di dimostrare il principio delle velocità virtuali, ed anche gli altri della conservazione del moto del centro di gravità, e delle aree. Invece di concepire in tal caso le δx, δy, δz dei diversi punti del sistema come velocità virtuali o spazietti infinitesimi descritti in virtù di quel moto fittizio (il quale fu poi altresì detto dopo Carnot un moto geometrico), è assai più naturale e non ha nulla di misterioso il ravvisarle quali aumenti che prendono le coordinate degli anzidetti punti quando il sistema si riferisce ad altri tre assi ortogonali vicinissimi ai primi, come se questi si fossero di pochissimo spostati. Tutti sanno che noi acquistiamo l' idea del moto osservando relazioni di distanze: quelle coordinate tanto possono mutare per un movimento del sistema, stando fermi gli assi, come per un movimento degli assi, stando fermo il sistema. Intendendo la relazione al secondo modo, si viene a supplire ai così detti moti geometrici, e allora si capisce chiaro come gli aumenti delle coordinate abbiano luogo senza alterazioni nelle azioni reciproche delle parti del sistema le une sulle altre. Questa maniera di veder la cosa è indotta, senza alcuno sforzo, dal riflettere

essere arbitraria nello spazio la posizione degli assi cui si riferisce un sistema, sia in moto, sia in equilibrio: che era giusto di fare attenzione anche ad un sì fatto arbitrio, il quale, messo a calcolo, dovea pur condurre a qualche risultato diverso da quelli che si ottengono quando ad esso arbitrio non si bada. In virtù di un tal moto degli assi le δx, δy, δz dei diversi punti assumono i valori dati dalle equazioni (39) num°. 42. i quali sono quei valori particolari che soddisfanno a tutte le equazioni di condizione esprimenti gli effetti delle forze interne, siccome vedemmo al num°. 48.

Il riferimento simultaneo del sistema a due terne di assi ortogonali giuoca poi efficacemente in un'altra maniera, essendo due i metodi con cui si possono trattare le equazioni di condizione, giusta l'esposto al num°. 17. Cap. II. Qui s'intende parlare di quel metodo che lascia alle δx, δy, δz tutta la loro generalità, e tratta le equazioni di condizione, introducendo moltiplicatori indeterminati. In tal caso la contemplazione delle due terne di assi giova per l'impianto delle dette equazioni di condizione, che altrimenti non si saprebbero assegnare in generale: in esse compajono per l'indicazione delle derivate parziali quelle variabili p, q, r, che ad operazioni finite, sono poi destinate ad uscir dal calcolo. Un tal punto di vista parmi sfuggito a Lagrange e ad altri Geometri: ad esso si riferisce quanto nella presente Memoria può essere più meritevole di attenzione. Circa poi al non comprendersi chiaramente come da dette sei equazioni di condizione vengano significati gli effetti delle forze interne, mi riporterò alle considerazioni generali poste nel prologo.

CAPO V.

Del moto e dell' equilibrio de' fluidi.

61. Abbiamo dato le equazioni generali del moto di un corpo qualunque: nessun dubbio adunque che in esse siano comprese anche le equazioni generali del moto de' fluidi. Vo-

lendo però decifrare queste seconde, due cose si richieggono: la prima, una definizione che ben determini in che consista lo stato fluido di un corpo: la seconda, l'introduzione delle analoghe modificazioni nelle equazioni generali onde piegarle alla più particolare rappresentazione di cui ora ci viene il bisogno.

Di tutte le definizioni che si sono date dei fluidi parmi la più chiara quella dei fisici moderni, la quale inoltre è la sola che renda ragione del perchè uno stesso corpo possa passare dallo stato solido al fluido, e ritornare dal secondo al primo. Presentemente si ritiene che lo stato fluido in un corpo provenga dalla distanza rispettiva che prendono le sue molecole maggiore che nello stato solido: in conseguenza cessa, o almeno non dà più effetto apprezzabile, l'azione secondaria delle molecole dovuta alla loro diversa figura, azione che nella minore lontananza di esse era in giuoco e produceva la solidità. Ecco le parole del Poisson. « Dans les corps solides, cristallisés ou « non, la cause particulière qui retient les molécules sur les « directions où elles sont plus ou moins resserrées, ne peut « être que la partie de leur action qui dépend de leur forme « et de leur situation relatives. Si l'on écarte les molécules « par une addition de calorique, cette force secondaire diminue « en général plus rapidement que l'autre partie de leur action « mutuelle: son effet peut devenir insensible: et le corps passe « alors à l'état fluide ». (Journal de l'École Polyt. Cah. XX. pag. 93.). Pertanto i corpi fluidi sono quelli in cui le molecole, quantunque non lo siano, possono riguardarsi come se fossero sferiche: infatti se fossero sferiche non avrebbe più luogo azione dovuta alla figura di esse (rivedi il già detto al num°. 54).

Adottata questa definizione, vediamo come debbano essere ora considerate le sei quantità $2A$, $2B$, $2C$, D, E, F, e le sei Λ, Ξ, Π, Σ, Φ, Ψ componenti le generali equazioni (24) num°. 50. Nelle prime non debbono più entrare i coseni a_1, a_2, a_3..... e non più nelle seconde i coseni b_1, b_2, b_3....: infatti, essi erano (num°. 54.) soltanto introdotti quando sussistevano le azioni della seconda specie, che più non si danno nei fluidi.

Così quelle sei prime quantità si mutano nelle seconde sei, unicamente col mutare le p, q, r nelle x, y, z. Il ch. Geometra Sig. Mossotti ha espressa efficacemente una tale proprietà colle seguenti parole: « i fluidi differiscono dai solidi in quanto che « le forze che ciascuna molecola spiega sulle altre, sono, pro- « babilmente per causa di un maggiore scostamento, indipen- « denti dall'orientazione degli assi della sua figura ». (Lezioni Elem. di fisica matematica. T. I. pag. 116.) Però quantunque le $2A, 2B$, ec. debbano essere fatte colle p, q, r come le Λ, Ξ, ec. colle x, y, z, e solo differirne in quanto contengono le prime lettere in luogo delle seconde: tuttavia non hanno precisamente questa idea nelle equazioni (24) num°. 50. Se ben si considera l'andamento analitico del num°. 50., le $2A, 2B, 2C, D, E, F$ in quelle equazioni (24) hanno ricevuto al posto delle p, q, r i loro valori dati dalle equazioni (31) num°. 40. Veramente in una tale sostituzione spariscono le dodici quantità f, g, h, α_1, β_1, ec., e l'effetto torna lo stesso come scrivendo le x, y, z in luogo delle p, q, r. Per altro l' identità di queste due proposizioni non è evidente, e si può essere d'accordo sull' una senza conceder di subito l'altra. Si arriva a convincersene richiamando le espressioni (35), (38) del num°. 54, e verificando col fatto che la sostituzione dei valori (31) num°. 40. muta le prime nelle (36) e le seconde in altre a loro simili, proprio come se si scrivessero le x, y, z al luogo delle p, q, r. L'effetto succede in forza delle equazioni (4) num°. 33. Lagrange avea notata la singolarità di questo risultamento analitico nelle espressioni come le (35) (Vedi M. A. T. I. pag. 254) e ultimamente il Sig. Cauchy fece di questa proprietà in alcune funzioni delle coordinate soggetto di speciali ricerche (Exercices d'Analyse et de Physique Math. T. I. pag. 107.).

Conviene ora riflettere che le azioni fra molecola e molecola, quando non è in giuoco la figura delle medesime, non possono dipendere che dalle reciproche distanze, e che per l'effetto complessivo di tutte queste azioni elementari sul punto (p, q, r) ovvero (x, y, z) possono anche influire gli angoli che

fanno fra loro le rette congiungenti le molecole. Siccome poi tanto negli uni che negli altri di detti elementi analitici (formole (35), (38)) l'indicata proprietà si verifica, saremo condotti ad ammettere ch' essa si verifica anche nelle sei quantità più volte ricordate. Adunque nelle equazioni (24) num°. 50. le 2A, 2B ec. in cui le p, q, r hanno preso i valori (31) num°. 40, vengono in sostanza ad aver ricevute le lettere x, y, z in luogo delle p, q, r, e con ciò si sono mutate nelle stesse Λ, Ξ, ec. dei primi membri.

Ma come va che nelle dette equazioni (24) veggonsi nei secondi membri i nove coseni α_1, β_1, γ_1, α_2, ec., mentre, se ben si considerano le cose dette sul fine del num°. 56, essi nel caso presente (stante l'assenza degli altri coseni a_1, a_2, a_3,.... e dei corrispondenti b_1, b_2, b_3....) non entrano nè nelle 2A, 2B, ec., nè nelle Λ, Ξ, ec.? Sembra che in quelle equazioni (24) i secondi membri siano in contraddizione coi primi. Ciò è verissimo; ma è appunto dal non potere i nove coseni α_1, β_1, γ_1, α_2, ec. entrare nelle anzidette equazioni se non apparentemente, che emergono le proprietà per le quali le solite sei quantità vengono ad essere particolarizzate ed adattate al caso dei fluidi: il che passiamo a vedere.

62. Premettiamo che tra quei nove coseni essendovi sei equazioni sostanzialmente diverse (cioè le (3), o (4) del num°. 33.), vi è modo di determinare sei di essi in funzione dei tre che rimangono, quando questi siano stati opportunamente scelti. Ecco le eleganti formole del Monge (*). Per le tre arbitrarie sono state scelte le tre quantità α_1, β_2, γ_3, e avendo posto

$$(1)\qquad \begin{aligned} M &= 1 + \alpha_1 + \beta_2 + \gamma_3 \\ N &= 1 + \alpha_1 - \beta_2 - \gamma_3 \\ P &= 1 - \alpha_1 + \beta_2 - \gamma_3 \\ Q &= 1 - \alpha_1 - \beta_2 + \gamma_3 \end{aligned}$$

(*) Lacroix. Traité de Calcul. T. I. pag. 533.

il suddetto autore ha trovato essere

$$(2)\quad \begin{aligned}
\beta_1 &= \tfrac{1}{2}\sqrt{NP} + \tfrac{1}{2}\sqrt{MQ}\\
\alpha_2 &= \tfrac{1}{2}\sqrt{NP} - \tfrac{1}{2}\sqrt{MQ}\\
\alpha_3 &= \tfrac{1}{2}\sqrt{NQ} + \tfrac{1}{2}\sqrt{MP}\\
\gamma_1 &= \tfrac{1}{2}\sqrt{NQ} - \tfrac{1}{2}\sqrt{MP}\\
\gamma_2 &= \tfrac{1}{2}\sqrt{PQ} + \tfrac{1}{2}\sqrt{MN}\\
\beta_3 &= \tfrac{1}{2}\sqrt{PQ} - \tfrac{1}{2}\sqrt{MN}
\end{aligned}$$

formole che si possono non difficilmente verificare *a posteriori* sostituendo gli ottenuti valori (2) nelle equazioni (3) o (4) del num°. 33. e riconoscendo come esse risultino identicamente soddisfatte.

Non è poi difficile dalle precedenti formole (2) dedurre gli sviluppi in serie secondo le potenze e i prodotti delle tre indeterminate α_1, β_2, γ_3. Le operazioni si eseguiscono coi procedimenti ordinarj ed ovvj, e fermandoci ai termini di due dimensioni, otteniamo:

$$(3)\quad \begin{aligned}
\beta_1 &= 1 - \tfrac{1}{2}\alpha^2_1 - \tfrac{1}{2}\beta^2_2 + \text{ec.}\\
\alpha_3 &= 1 - \tfrac{1}{2}\alpha^2_1 - \tfrac{1}{2}\gamma^2_3 + \text{ec.}\\
\gamma_2 &= 1 - \tfrac{1}{2}\beta^2_2 - \tfrac{1}{2}\gamma^2_3 + \text{ec.}\\
\alpha_2 &= -\gamma_3 + \alpha_1\beta_2 + \text{ec.}\\
\beta_3 &= -\alpha_1 + \beta_2\gamma_3 + \text{ec.}\\
\gamma_1 &= -\beta_2 + \alpha_1\gamma_3 + \text{ec.}
\end{aligned}$$

Ora sostituiscansi questi valori (3) nei secondi membri delle equazioni (24) num°. 50., e ordinando per le potenze e i prodotti delle tre indeterminate α_1, β_2, γ_3, avremo

$$\Lambda = -2B - 2D\alpha_1 + 2F\beta_2 + 2E\alpha_1\beta_2 - 2(A-B)\alpha^2_1 + 2(B-C)\beta^2_2 + \text{ec.}$$

$$\Xi = -2C - 2F\beta_2 + 2E\gamma_3 + 2D\beta_2\gamma_3 - 2(B-C)\beta^2_2 + 2(C-A)\gamma^2_3 + \text{ec.}$$

$$\Pi = -2A - 2E\gamma_3 + 2D\alpha_1 + 2F\alpha_1\gamma_3 - 2(C-A)\gamma^2_3 + 2(A-B)\alpha^2_1 + \text{ec.}$$

$$\Sigma = -F - 2(B-C)\beta_2 - 2(C-A)\alpha_1\gamma_3 + D(\gamma_3 - 2\alpha_1\beta_2)$$

$$(4) \qquad -E(\alpha_1 + \beta_2\gamma_3) + F(2\beta^2_2 + \tfrac{1}{2}\alpha^2_1 + \tfrac{1}{2}\gamma^2_3) + \text{ec.}$$

$$\Phi = -D - 2(A-B)\alpha_1 - 2(B-C)\beta_2\gamma_3 + E(\beta_2 - 2\alpha_1\gamma_3)$$

$$-F(\gamma_3 + \alpha_1\beta_2) + D(2\alpha^2_1 + \tfrac{1}{2}\beta^2_2 + \tfrac{1}{2}\gamma^2_3) + \text{ec.}$$

$$\Psi = -E - 2(C-A)\gamma_3 - 2(A-B)\alpha_1\beta_2 + F(\alpha_1 - 2\beta_2\gamma_3)$$

$$-D(\beta_2 + \alpha_1\gamma_3) + E(2\gamma^2_3 + \tfrac{1}{2}\alpha^2_1 + \tfrac{1}{2}\beta^2_2) + \text{ec.}$$

non ritenendo se non i termini nei quali le quantità angolari sono a due dimensioni.

Siccome queste equazioni debbono sussistere indipendentemente dalle tre indeterminate α_1, β_2, γ_3, le quali restano assolutamente arbitrarie, è necessario che in esse siano eguali a zero tutti i coefficienti delle diverse potenze e dei diversi prodotti delle indeterminate stesse. Quindi primieramente si cavano le equazioni

$$(5) \qquad \Lambda = -2B\,; \quad \Xi = -2C\,; \quad \Pi = -2A$$

$$(6) \qquad \Sigma = -F\,; \quad \Phi = -D\,; \quad \Psi = -E\,;$$

poi dall' annullare i coefficienti anzidetti quest' altre, e unicamente queste:

$$(7) \qquad \begin{array}{c} D = 0\,; \quad E = 0\,; \quad F = 0 \\ A - B = 0\,; \quad B - C = 0\,; \quad C - A = 0\,. \end{array}$$

Le tre ultime si riducono alle due

$$(8) \qquad A = B = C$$

per le quali le (5) ci somministrano

$$(9) \qquad \Lambda = \Xi = \Pi\,.$$

A motivo poi delle prime fra le (7), le (6) diventano

$$(10) \qquad \Sigma = 0\,; \quad \Phi = 0\,; \quad \Psi = 0\,.$$

Se volessimo prendere ad esame le equazioni che si deducono dall'annullare i coefficienti nei termini ulteriori delle serie (4), non faremmo che sempre avere e riavere le stesse equazioni già ottenute (7), (8), le quali potevano dedursi dalle serie (4) ritenendovi anche soltanto i termini ove le indeterminate si trovano ad una dimensione. Può valere a riconferma l' osservare che, date le (7), (8), deduciamo subito dalle equazioni (24) num°. 50. le equazioni (9), (10) in forza delle equazioni (4) num°. 33.

Le equazioni (9), (10) sono quelle che esprimono la natura del fluido: per esse le equazioni generali (23) num°. 50. spettanti al moto di un corpo qualunque, si particolarizzano e si adattano a significare il moto de' fluidi. Le equazioni modificate riescono

$$(11) \qquad \begin{aligned} &\Gamma\left(X - \frac{d^2x}{dt^2}\right) + \frac{d\Lambda}{dx} = 0 \\ &\Gamma\left(Y - \frac{d^2y}{dt^2}\right) + \frac{d\Lambda}{dy} = 0 \\ &\Gamma\left(Z - \frac{d^2z}{dt^2}\right) + \frac{d\Lambda}{dz} = 0\,. \end{aligned}$$

Queste sono le notissime equazioni del movimento de' fluidi, delle quali i Geometri sono in possesso da molto tempo, e la di cui esattezza in tutti i casi venne dal Poisson negata. Così la teorica analitica del moto de' fluidi dataci da Eulero, ridimostrata da Lagrange partendo da un principio diverso, si trova riconfermata anche dalle moderne teoriche fisiche quando si tengano entro i giusti limiti: del che diremo in appresso.

63. La precedente dimostrazione parmi tanto importante, che mi preme metterla in salvo da varie obbjezioni che possono presentarsi alla mente degli studiosi: sponendo le quali farò di comprendervi anche quelle a cui intendeva di alludere in un passo del num°. 56. Prima obbiezione. Che la risultante

di tutte le forze interne applicate al punto (p, q, r) ovvero (x, y, z) debba essere (quando le molecole sono o possono considerarsi sferiche) funzione delle sole distanze molecolari e degli angoli fatti dalle direzioni di esse (espressioni (35), (38) num°. 54.), questo si può agevolmente comprendere: quindi nessun dubbio che detta risultante abbia la proprietà riscontrata nelle formole (35), (38). Ma che la stessa proprietà debba sussistere in ciascuna delle sei 2A, 2B, ec., ovvero Λ, Ξ, ec., ciò non pare abbastanza provato, potendo darsi che queste quantità vengano da quella risultante decomposta secondo direzioni vincolate cogli assi. Allora reggerebbe bensì la proprietà dell'essere le sei quantità fatte prima colle p, q, r affatto similmente come dopo colle x, y, z, senza che si avveri il passaggio dalla prima scrittura alla seconda per via della sostituzione dei valori (31) num°. 40. Sta infatti la prima proprietà e non la seconda nei coseni espressi dalle formole (37) num.° 54. — Questa obbjezione è forte, e tale che la risposta efficace a pienamente dissiparla ci convien rimetterla al Capo seguente, dove vedremo col fatto che le sei quantità dipendono interamente da elementi analitici, nei quali si verifica la seconda proprietà anzidetta del pari che nelle formole (35), (38). Qui però possiamo dire in anticipazione che la quantità (15) num°. 47. esprimente la totalità delle azioni interne, viene rappresentata altrimenti mediante una somma

$$S_1 \delta s_1 + S_2 \delta s_2 + S_3 \delta s_3 + \text{ec.} \tag{12}$$

nella quale s_1, s_2, s_3, ec. essendo gli stessi radicali scritti nelle formole (35), godono la nota proprietà, e ne godono anche i coefficienti S_1, S_2, S_3, ec. esprimenti le forze che operano secondo quelle direzioni, quando sono funzioni solamente delle anzidette distanze s_1, s_2, s_3, ec. L'operazione indicata dalla caratteristica δ si ferma dapprima sulle δp, δq, δr, indi passando ai nuovi assi, sulle δx, δy, δz, e le quantità che entrano a comporre le equazioni generali sono raccolte dai coefficienti di sì fatte variazioni. Non è possibile (badisi bene) che la seconda volta ricompajano quei coseni α_1, β_1, γ_1, α_2, ec. che

sono già svaniti sostituendo nei radicali s_1, s_2, s_3, ec. alle p, q, r i valori (31) num°. 40.: di qualunque sorta siano le posteriori operazioni analitiche. Per maggiore intelligenza gioverà ricordare la distinzione fatta da Lagrange (M. A. T. I. pag. 31-32) delle forze interne ed esterne secondo che hanno per loro centri punti appartenenti o non appartenenti al sistema. È nel solo primo caso che i radicali s_1, s_2, s_3 .... dell' espressione (12) godono della più volte proclamata proprietà d'indipendenza dagli assi: per le forze esterne il mutamento degli assi importa che si faccia la risoluzione e composizione praticata mediante le equazioni (39) num°. 55. Ma di qui appunto può nascere una seconda difficoltà. Se per le forze esterne, mutando gli assi, fu trovata necessaria la decomposizione indicata nelle anzidette equazioni (39), pare che dovrebbe farsi altrettanto sulle 2A, 2B, ec. che pur sono forze o somme di forze. Comincerò a rispondere coll' osservazione generale, che quando una verità è ben dimostrata, non è necessario per conservarne la persuasione trattenerci a trovar la soluzione d'ogni dubbio che possa insorgere: si sa in prevenzione che una tale soluzione ci deve essere. Basterà in tali casi (e sarà un di più) a togliere quelle ubbie anche solo accennare di dove sarebbe possibile cavare la risposta diretta, senza veramente dedurla in modo perspicuo: giacchè questa deduzione equivarrebbe ad una seconda dimostrazione, la quale non è necessaria quando se ne ha già un' altra. Nel caso attuale rifletteremo al modo con cui le sei quantità 2A, 2B, ec. ovvero Λ, Ξ, ec. entrano nelle equazioni (42), (23): vi entrano dopo che se ne sono prese le derivate parziali per le tre variabili p, q, r, ovvero x, y, z. Deve ritenersi che tale derivazione supplisca alla risoluzione e composizione indicate nelle (39) num°. 55.; quelle sei quantità che stanno senza alcun riferimento ad assi determinati, allorquando se ne prendono le derivate per p, q, r, si riferiscono agli assi delle p, q, r, e allorquando se ne prendono le derivate per x, y, z, si riferiscono agli assi delle x, y, z. Si scorge un chiaro indizio di ciò osservando le formole (21), (22) del num°. 50. e notando che

nel secondo caso entrano quei coseni α_1, β_1, γ_1, α_2, ec., pei quali vien determinata la posizione dei secondi assi relativamente ai primi. — D'indole somigliante è la difficoltà che può occorrere a chi prende a considerare le sei quantità Λ, Ξ, ec., non più come somme, ma come veri integrali definiti, siccome si è detto al num°. 56. Finchè si riguardano come somme di termini dedotti dalla espressione (12), non si dura fatica ad ammettere ch' esse assumano lo stesso valore numerico, tanto mettendo i valori di tutte le p, q, r, quanto mettendo quelli di tutte le x, y, z: tali somme, per la più volte ricordata proprietà, non portano con se l' idea di un riferimento ad assi determinati. Ma gl' integrali definiti involgono naturalmente il concetto di limiti assegnati dalla figura del corpo, che debbono condurre a valori diversi quando gli assi ai quali la figura del corpo è riferita, non sono più i medesimi. Sia: nel caso per altro di questi integrali definiti abbiamo la prima volta salvate le variabili p, q, r, coordinate del punto generico, e la seconda le variabili x, y, z. Accadrà (senza trattenerci a ridur la cosa ostensibile, non essendo necessario, come si disse di sopra) che quando alle p, q, r si sostituiscano i loro valori in x, y, z (formole (31) num°. 40.) i coseni α_1, β_1, γ_1, α_2, ec. vadano a combinarsi cogli altri simili elementi analitici in virtù dei quali gl' integrali definiti hanno la seconda volta valori diversi dagli avuti dapprima, sì che da tal combinazione risulti una eliminazione di essi elementi per effetto delle solite equazioni del num°. 33., e si abbiano valori non vincolati ad assi. — Da ultimo alcuno potrebbe dire. Voi volete che nel caso dei fluidi le forze interne sieno funzioni soltanto delle distanze: ma è manifesto che a svolgere l'azione di queste forze contribuiscono assaissimo le forze esterne X, Y, Z. Ponete che le espressioni analitiche delle forze interne abbiano per l'indicata ragione ad essere funzioni anche delle X, Y, Z: siccome queste esterne hanno centri stranieri al sistema, non regge più per esse la proprietà di mantenere gli stessi valori cambiando gli assi, ed ecco a terra tutto quanto si è dedotto appoggiandosi a tal

proprietà attribuita alle Λ, Ξ, ec. Rispondo non credere io che le espressioni delle forze interne abbiano a contenere le X, Y, Z; senza dubbio queste seconde influiscono sulla attuazione di quelle, ma influiscono diminuendo o accrescendo le distanze fra le molecole, sia pure anche insensibilmente, come nei liquidi. Facendo dunque le forze interne funzioni delle distanze, vengono ad avere espresso implicitamente nella condizione alterata delle dette distanze l'effetto delle forze esterne, senza bisogno di farle altresì funzioni dei loro valori analitici. — Potrei aggiungere altre parole per meglio dissipare le difficoltà già esposte, e prevenirne delle nuove: più però di quanto potrei qui soggiungere varranno a tale intento le dottrine del Capo seguente.

64. È notissimo che nella teorica Euleriana si suole aggiungere alle tre equazioni (11) una quarta detta della continuità, che è la (33) o (34) num°. 14. già dimostrata in generale nel Capo I. Qui inoltre chiameremo l'attenzione del lettore sopra un teorema sussistente fra le quantità alla superficie del fluido, il quale risulta dalle tre equazioni cavate dall'integrale duplicato (34) num°. 52., siccome dicemmo sulla fine di quel numero. A motivo delle precedenti (9), (10) quelle tre equazioni diventano

$$(13)\qquad \begin{aligned} &\lambda\,(\Gamma)\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2}+\frac{dz}{dx}\,\Lambda=0\\ &\mu\,(\Gamma)\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2}+\frac{dz}{dy}\,\Lambda=0\\ &\nu\,(\Gamma)\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2}-\Lambda\quad=0\,. \end{aligned}$$

Se intendiamo espressa dalla

$$(14)\qquad f(x,y,z,t)=0$$

l'equazione della superficie del fluido, sappiamo che se ne ricavano le due

$$\frac{dz}{dx}=-\frac{f'(x)}{f'(z)}\;;\quad \frac{dz}{dy}=-\frac{f'(y)}{f'(z)}\;;$$

quindi, ponendo per comodo

$$(15) \qquad \theta = \frac{\Lambda}{(\Gamma)}; \quad R = \sqrt{f'(x)^2 + f'(y)^2 + f'(z)^2}$$

otteniamo prontamente dalle precedenti (13)

$$(16) \qquad \lambda = \theta \,.\, \frac{f'(x)}{R}; \quad \mu = \theta \,.\, \frac{f'(y)}{R}; \quad \nu = \theta \,.\, \frac{f'(z)}{R};$$

formole dalle quali, in conseguenza di un teorema notissimo di Geometria analitica, veniamo a conchiudere che la direzione secondo cui opera la forza θ, anche nello stato di moto, è normale alla superficie del fluido. Ognun vede che questo teorema è esclusivo ai fluidi, giacchè non avrebbe luogo se non si verificassero le equazioni (9), (10). Se ne possono dedurre altre considerazioni sulle quali torneremo fra poco.

65. Conviene ora che ci tratteniamo a ragionare intorno alla divergenza fra le nostre deduzioni e quelle del Poisson. La nostra analisi, riconfermando la teorica Euleriana, abbraccerebbe tanto i fluidi in equilibrio che quelli in moto, tanto i liquidi come i fluidi aeriformi. Poisson invece trovò di dover aggiungere nuovi termini alle equazioni generali del moto de' fluidi: ed ecco, se io l' ho ben inteso, il filo de' suoi ragionamenti. Comincia a dire che le equazioni che già si avevano per esprimere il movimento de' fluidi, erano dedotte mediante il principio di D' Alembert da quelle dell' equilibrio, le quali suppongono il principio della pressione eguale in tutti i versi, principio riconosciuto vero sperimentalmente soltanto ne' fluidi in riposo. Prosegue e asserisce che la proprietà di premere egualmente in tutti i versi viene da un' altra proprietà che hanno i fluidi, di ricostruirsi sempre similmente a se stessi attorno di ciascun loro punto. Riflette poi giustamente che tale ricostruzione esige un po' di tempo per essere effettuata: e si trattasse anche di un intervallo brevissimo, quando il fluido è in moto non può quella ricostruzione essere ad ogni istante perfetta. Mancando la ricostruzione perfetta, manca, secondo lui, la pressione eguale in tutti i versi: quindi debbono essere

in difetto nel caso del moto quelle equazioni che da un tale principio prendono origine. Citerò per maggiore cautela un passo dell'Autore: (Journal de l'École Polyt. Cah. XX. pag. 95. — Annales de Physique et de Chimie. Tom. 42, pag. 170.)
« Lorsque les molécules d'un fluide se déplacent, elles em-
« ploient un certain temps, quelque petit qu'on le suppose,
« pour parvenir autour de chaque point, à une disposition
« semblable à leur arrangement primitif, et pour exercer de
« nouveau une pression égale en tous sens. Pendant ce très-
« court intervalle de temps, qui peut être néanmoins très-dif-
« férent pour les différents fluides, la pression n'est pas né-
« cessairement la même suivant toutes les directions; toutefois
« il serait impossible de s'en appercevoir dans l'état d'équi-
« libre qui ne s'observe qu'après que cet intervalle de temps
« est écoulé. Mais, dans le cas du mouvement, la position re-
« spective des molécules changeant sans cesse, on comprend
« que la considération du temps dont il s'agit peut donner
« lieu à une modification dans le principe de l'égalité de pres-
« sion en tous sens, et dans la forme des équations différen-
« tielles qui s'en déduisent. C'est ce qui arrive en effet: et
« c'est a cette circonstance que sont dus les nouveaux termes
« que j'ai introduits dans les équations générales du mouve-
« ment des fluides. »

La risposta, giacchè l'oggetto della discussione è molto complesso, la divideremo in più parti. Essere o non essere vero che le note equazioni non avessero ai tempi di Poisson altra dimostrazione fuori di quella appoggiata al principio della pressione eguale in tutti i versi, è questa una questione incidentale sulla quale, per non abbracciar troppo in una volta, ritorneremo in altro numero. Qui mi fermerò a domandare di dove cava il Poisson quell'altra proprietà dei fluidi, ch'egli crede fondamentale per ottener la pressione eguale in tutti i versi « de se reconstituer toujours semblablement à eux-mêmes au-« tour de chaque point » (Cah. XX. pag. 92): per la quale anche dopo gli spostamenti delle molecole « un fluide se trouve

« constitué autour de chaque point, comme il l'était aupara-
« vant..... comme un système qui reste semblable à lui-même,
« et qui est seulement construit sur une plus petite ou sur
« une plus grande échelle » (pag. 91). La vera definizione del fluido l'abbiamo presa più sopra dallo stesso Poisson (rileggi il passo riferito al principio di questo Capo) ed è di quel corpo in cui le molecole sono a tali distanze fra loro, che vi cessa l'azione secondaria dovuta alla figura; ma io non vedo un vincolo necessario fra questa definizione e la proprietà della ricostruzione sempre simile a se stessa intorno ad ogni punto. Prescindo dal ripetere ciò che ho dimostrato in altro luogo, cioè che una disposizione di molecole simmetrica tutt'all'intorno di ciascuna, se è possibile in un piano, è impossibile nello spazio (Vedi Giornale dell'I. R. Istituto Lombardo Tom. VI. pag. 328.) e chieggo soltanto: quand'anche le molecole in moto si allontanino fra loro più per un verso che per un altro, torna per questo in giuoco l'azione molecolare secondaria dovuta alla figura? Mainò: giacchè suppor ciò sarebbe come supporre che il moto possa solidificare qualche parte del fluido. Ma se non torna in giuoco quell'azione, abbiamo ancora tutto ciò che si esige per condurci alle equazioni (11): i ragionamenti stanno anche nella supposizione che aumentino le distanze molecolari più che non ve n'è bisogno per avere lo stato fluido: si scorge esservi per tali distanze un limite in meno, ma non in più. Si dice che nel moto non v'è tempo per la ricostruzione del fluido ad ogni istante come nel caso dell'equilibrio: sia: sono inclinato a crederlo anch'io; ma non m'importa di ciò: c'è però sempre fra le molecole almeno la distanza necessaria a costituire la fluidità, e questo basta per la verità delle nostre equazioni. L'equivoco preso dal Poisson (se mi è lecita la parola trattandosi di un sì distinto Geometra) fu cagionato primieramente dall'aver compenetrate due cose le quali possono stare l'una senza l'altra: la distanza delle molecole necessaria alla cessazione della forza secondaria, e la di loro distribuzione uniforme intorno a ciascun punto; indi nell'aver

presa la seconda proprietà, che a lui parve di dover concedere ai fluidi, piuttosto che la prima a base delle sue ricerche analitiche. Invece bisogna piantar le equazioni sulla sola prima proprietà, che è una cosa indipendente da quell' aggiunta fittizia, e che è l' unica che costituisca la vera essenza dello stato fluido.

Eppure, si replicherà, coll'aggiunta di quei nuovi termini il Poisson dà o promette spiegazioni di fenomeni, le quali altrimenti non si ottengono. Dice in un luogo (pag. 2) doversi probabilmente alla differenza da lui avvertita tra lo stato di equilibrio di un fluido e quello di moto la cagione per cui nei fucili a vapore la pressione è enorme sul projettile, ed è lateralmente molto minore sulle pareti. Al qual proposito noterò parermi che il fatto possa avere una facile spiegazione mediante un ragionamento molto simile a quello col quale Galileo provava dover essere la forza della percossa infinita per rapporto alla pressione (Vedi: Lezioni Accademiche del Torricelli: Lezione seconda.). Gl' impulsi sul projettile, ripetuti a capo di tempuscoli estremamente piccoli, si accumulano in un tempo che è piccolissimo ma pur finito e contiene in conseguenza un numero stragrande di quei tempuscoli: mentre gl' impulsi contrastati dalla resistenza delle pareti vengono estinti di mano in mano che si producono. Quanto ai vantaggi che l' Autore dice dover derivare dai suoi nuovi termini per le teoriche del suono e della luce (pag. 3), egli si limita ad accennarli, anzi a presagirli. Non posso quindi metterli a disamina: solo dirò che questa materia delle vibrazioni vorrebbe essere trattata a parte e molto in lungo, costituendo un ordine di fenomeni singolari espressi per mezzo di equazioni loro proprie: ho qualche speranza di potermene occupare in altra occasione.

Il Sig. Mossotti dopo il passo più sopra citato al principio del Capo, viene anch' egli a parlare di molecole tutte uniformemente distribuite le une attorno alle altre. Nè di ciò gli farò carico, avendo io stesso bisogno di maggiore indulgenza per essermi (Nella Memoria inserita nel T. XXI di questi Atti.

§. VII.) lasciato indurre dai citati passi del Poisson a stabilire un principio di simmetria, e a derivarne equazioni riconosciute poscia insussistenti (Vedi il già detto al principio di questa Memoria). Entrambi avremmo dovuto esigere dallo Scrittor francese che ci dimostrasse (giacchè non è per nulla evidente) come dalla cessazione della forza secondaria scaturisse necessariamente pei fluidi la proprietà della distribuzione regolare delle molecole. Si sa per altro quanta efficacia abbia un' autorità per tanti titoli giustamente venerata, affinchè c' induciamo ad adottarne le asserzioni senza far precedere l' esame voluto dall' importanza dell' argomento.

Ma è poi vero che il principio della pressione eguale in tutti i versi sia intimamente legato colla distribuzione regolare delle molecole, sì che non possa sussistere l' uno senza l' altra? (Poisson. Traité de Mécanique. T. II. pag. 506.). Io ne dubito assai, e credo che qui pure siasi corso un po' troppo avanti nelle deduzioni: e ciò perchè non si sono ancora chiarite del tutto le idee intorno a quella quantità che noi chiamiamo pressione interna nei fluidi. È questo un argomento dilicato, dove è bene fare delle distinzioni, nè è dato sbrigarsi in poche parole: quindi vi tornerò sopra in un numero a parte. Intanto osserverò che un altro illustre geometra francese il Sig. Cauchy dissente anch' egli dal Poisson su questo punto apertamente, avendo scritto nei suoi primi Esercizj di matematica (Tom. III. pag. 226.) « on voit par les détails dans lesquels nous venons « d'entrer que, pour obtenir l'égalité de pression en tous sens, « dans un système des molécules qui se repoussent, on n' a « pas besoin d' admettre, come l' a fait M. Poisson, une distri- « bution particulière des molécules autour de l' une quelconque « d' entre elles. » Il che sia detto senza intendere di pronunciarmi per intero assenziente a quelle considerazioni mercè le quali il Sig. Cauchy compone egli pure le equazioni generali del moto dei corpi. Rispetto la sua maniera di vedere, ma tengo la mia, o piuttosto non la mia, ma quella connessa colla filosofia dei metodi del mio Caposcuola, come ho dichiarato fin da principio.

E qui, poichè torna in campo la questione sul modo di mettere insieme le equazioni generali del moto de' corpi, dovremo noi credere che la più volte citata opera del Poisson (Journal Polyt. Cah. XX) non possa andar soggetta ad altre osservazioni oltre le più sopra accennate? L'Autore dice (pag. 7) di non fare nella sua Memoria se non una sola ipotesi, quella di un numero estremamente grande di molecole comprese in uno spazio ancora insensibile: e questa è già molto. Ma dove dice (pag. 5 in fine) che dagli interstizj vuoti di materia ponderabile non parte alcuna forza per agire sulle molecole, quantunque conceda che in esse possano trovarsi gli imponderabili; quando ammette pel calorico (pag. 6) certe attrazioni al di fuori, e fa la forza elementare fra molecola e molecola funzione solamente della distanza; quando (e questo è notabilissimo) avanza (pag. 8) che le forze secondarie provenienti dalla figura, purchè i corpi non siano cristallizzati, debbono compensarsi e non produrre effetto; allorchè (pag. 35-36) asserisce che nei corpi solidi, anche dopo un mutamento di forma, le molecole già dimoranti sopra una stessa linea retta, vi perseverano; allorchè lega (pag. 61) il principio della pressione eguale in tutti i versi a quello della dilatazione o contrazione lineare eguale in tutte le direzioni; quando intende (pag. 91-92) che nei fluidi la pressione varj colle coordinate, ma resti costante tutt' all' ingiro fin dove si estende quella lunghezza ch' egli chiama l' intervallo medio; in tutti questi passi e negli altri in gran numero (pag. 13, 23, 24, 141, ec., ec.) dove si rigettano, supponendoli insensibili, parecchi elementi che riuscirebbero incomodi: in questi passi, dico, non entra egli molto d' ipotetico? Non nego che varie di tali supposizioni sono accompagnate da ragionamenti che ne dimostrano, se non la realtà, almeno la convenienza; ma non sono ragionamenti che valgano a produrre una piena persuasione, e che tanto più non accontentano, in quanto tien loro dietro un linguaggio di asseveranza quale appena sarebbe lecito di assumere dopo le dimostrazioni più vittoriose.

66. Dissi più sopra (num°. 62) che le equazioni (11) furono ridimostrate da Lagrange partendo da un altro principio: e lo dissi appositamente, perchè ci si volle far credere ch' esse non avessero finora se non un appoggio nell' analogìa, trasportando ai fluidi in moto il principio della pressione eguale in tutti i versi riconosciuto vero nei fluidi in equilibrio. Lagrange quando trattò del moto de' liquidi (M. A. T. II. pag. 287.) non assunse altra condizione fuori di quella del dovere la densità rimanere costante in qualunque ipotesi di movimento, e quando passò al moto de' fluidi elastici, si servì di quel suo principio un po' troppo astratto di cui facemmo parola al cominciare del Capo precedente. Ora ciò è ben altra cosa che ammettere il solito principio idrostatico. Per verità fu detto anche questo: fu detto che assumere la condizione della costanza della densità equivaleva ad assumere il principio della pressione eguale in tutti i versi: ma non bastava dirlo, bisognava provarlo: invece si può provare il contrario. Noi possiamo immaginare benissimo dei solidi nei quali la densità sia e debba sempre rimanere costante: eppure a tutti è noto che nei solidi non si verifica il principio della pressione eguale in tutti i versi. Che se nel moto dei solidi a densità costante non si commette errore col non tener conto della condizione anzidetta, come si fa pei fluidi, mostreremo fra poco il perchè ciò avvenga. Badisi ch' io non pretendo sostenere che la definizione dei fluidi quale ci risultava dalla maniera con cui Lagrange ne scrisse i movimenti, fosse la più chiara: convengo che seguendo le idee dei moderni esposte al principio di questo Capo, abbiamo guadagnato una definizione assai migliore. Quella maniera però di considerare i fluidi era esatta: Lagrange derivò anzi da essa come corollario il principio della pressione eguale in tutti i versi: nè egli era uomo da cadere in una petizione di principio. Per maggiormente illustrare questo argomento non riuscirà discaro ch' io qui metta la dimostrazione delle equazioni generali del moto dei liquidi appoggiandola ai medesimi fondamenti che le furono dati nella Meccanica Analitica, ma però modificata in correlazione ai precedenti di questa Memoria.

La condizione dell' invariabilità della densità porta con se (rivedi l' equazione (6) num°. 9. del Capo I) l' equazione

$$\mathrm{H} = \text{costante}$$

essendo H il sestinomio espresso nella equazione (4) num°. 9.

E appunto perchè la densità deve essere invariabile in ogni ipotesi di movimento, possiamo dedurre dalla precedente l' equazione variata

$$\delta \mathrm{H} = 0. \tag{17}$$

Richiamate le cose dette ai numeri 31, 32 sulle espressioni colà segnate (36), (37): visto anche quanto si è praticato al num°. 35., allorchè si è stabilita l' equazione generale pel moto de' corpi solidi, sarà manifesto che nel caso attuale all' integrale triplicato che comprende le forze esterne

$$\int da \int db \int dc \,.\, \left\{ \left(\mathrm{X} - \frac{d^2x}{dt^2} \right) \delta x + \text{ec.} \right\} \tag{18}$$

dovremo per formare il primo membro dell' equazione generale spettante al moto de' liquidi aggiungere l' integrale triplicato

$$\int da \int db \int dc \,.\, \Lambda \delta \mathrm{H}$$

essendo Λ un coefficiente indeterminato.

Considerato il valore del sestinomio H (equazione (4) num°. 9.) e l' operazione già fatta al num°. 14. per arrivare a quella espressione (32) del valore di H', non incontreremo alcuna difficoltà a capire che il prodotto $\Lambda \delta \mathrm{H}$ equivale alla quantità seguente

$$\begin{aligned} & \Lambda l_1 \frac{d\delta x}{da} + \Lambda m_1 \frac{d\delta x}{db} + \Lambda n_1 \frac{d\delta x}{dc} \\ & + \Lambda l_2 \frac{d\delta y}{da} + \Lambda m_2 \frac{d\delta y}{db} + \Lambda n_2 \frac{d\delta y}{dc} \\ & + \Lambda l_3 \frac{d\delta z}{da} + \Lambda m_3 \frac{d\delta z}{db} + \Lambda n_3 \frac{d\delta z}{dc} \,; \end{aligned} \tag{19}$$

la quale deve subire trasformazioni analoghe alle praticate, quando trattavasi dei corpi solidi, sulla quantità (11) del num°. 36. Essa pertanto deve essere messa sotto la forma seguente

$$
(20)\quad
\begin{aligned}
&-\left(\frac{d\,.\,\Lambda l_1}{da}+\frac{d\,.\,\Lambda m_1}{db}+\frac{d\,.\,\Lambda n_1}{dc}\right)\delta x\\
&-\left(\frac{d\,.\,\Lambda l_2}{da}+\frac{d\,.\,\Lambda m_2}{db}+\frac{d\,.\,\Lambda n_2}{dc}\right)\delta y\\
&-\left(\frac{d\,.\,\Lambda l_3}{da}+\frac{d\,.\,\Lambda m_3}{db}+\frac{d\,.\,\Lambda n_3}{dc}\right)\delta z\\
&+\frac{dL}{da}+\frac{dM}{db}+\frac{dN}{dc}
\end{aligned}
$$

essendosi poste per brevità

$$
(21)\quad
\begin{aligned}
L &= \Lambda\,(l_1\,\delta x + l_2\,\delta y + l_3\,\delta z)\\
M &= \Lambda\,(m_1\,\delta x + m_2\,\delta y + m_3\,\delta z)\\
N &= \Lambda\,(n_1\,\delta x + n_2\,\delta y + n_3\,\delta z)\,.
\end{aligned}
$$

Introducendo la quantità (20) sotto il secondo segno d' integrale triplicato, che va sommato e compenetrato col precedente (18), si vede come sulle tre ultime parti di detta quantità può eseguirsi alcuna delle integrazioni per a o per b o per c, la quale trasporta quelle parti sotto integrali duplicati. Rimane sotto l' integrale triplicato una quantità dove si debbono annullare separatamente i coefficienti totali delle tre variazioni δx, δy, δz ivi non affette da alcuna derivazione per a, b, c. Così si ottengono le tre equazioni

$$
(22)\quad
\begin{aligned}
X - \frac{d^2x}{dt^2} - \frac{d\,.\,\Lambda l_1}{da} - \frac{d\,.\,\Lambda m_1}{db} - \frac{d\,.\,\Lambda n_1}{dc} &= 0\\
Y - \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{d\,.\,\Lambda l_2}{da} - \frac{d\,.\,\Lambda m_2}{db} - \frac{d\,.\,\Lambda n_2}{dc} &= 0\\
Z - \frac{d^2z}{dt^2} - \frac{d\,.\,\Lambda l_3}{da} - \frac{d\,.\,\Lambda m_3}{db} - \frac{d\,.\,\Lambda n_3}{dc} &= 0\,.
\end{aligned}
$$

Sui tre trinomj a derivate parziali in ciascuna di queste tre convien praticare le trasformazioni indicate generalmente per mezzo delle equazioni (17), (18) del num°. 37. Esse equazioni (22) allora riduconsi

$$X - \frac{d^2 x}{dt^2} - \frac{1}{\Gamma}\left(\frac{dP_1}{dx} + \frac{dP_2}{dy} + \frac{dP_3}{dz}\right) = 0$$

(23) $$Y - \frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{1}{\Gamma}\left(\frac{dQ_1}{dx} + \frac{dQ_2}{dy} + \frac{dQ_3}{dz}\right) = 0$$

$$Z - \frac{d^2 z}{dt^2} - \frac{1}{\Gamma}\left(\frac{dR_1}{dx} + \frac{dR_2}{dy} + \frac{dR_3}{dz}\right) = 0$$

essendo

$$P_1 = \Gamma\Lambda\left(l_1 \frac{dx}{da} + m_1 \frac{dx}{db} + n_1 \frac{dx}{dc}\right)$$

$$P_2 = \Gamma\Lambda\left(l_1 \frac{dy}{da} + m_1 \frac{dy}{db} + n_1 \frac{dy}{dc}\right)$$

$$P_3 = \Gamma\Lambda\left(l_1 \frac{dz}{da} + m_1 \frac{dz}{db} + n_1 \frac{dz}{dc}\right)$$

$$Q_1 = \Gamma\Lambda\left(l_2 \frac{dx}{da} + m_2 \frac{dx}{db} + n_2 \frac{dx}{dc}\right)$$

(24) $$Q_2 = \Gamma\Lambda\left(l_2 \frac{dy}{da} + m_2 \frac{dy}{db} + n_2 \frac{dy}{dc}\right)$$

$$Q_3 = \Gamma\Lambda\left(l_2 \frac{dz}{da} + m_2 \frac{dz}{db} + n_2 \frac{dz}{dc}\right)$$

$$R_1 = \Gamma\Lambda\left(l_3 \frac{dx}{da} + m_3 \frac{dx}{db} + n_3 \frac{dx}{dc}\right)$$

$$R_2 = \Gamma\Lambda\left(l_3 \frac{dy}{da} + m_3 \frac{dy}{db} + n_3 \frac{dy}{dc}\right)$$

$$R_3 = \Gamma\Lambda\left(l_3 \frac{dz}{da} + m_3 \frac{dz}{db} + n_3 \frac{dz}{dc}\right).$$

Presentemente osservando le nove equazioni identiche (28) del num°. 14. e la (6) del num°. 9., vediamo a colpo d' occhio risultare

(25) $$\begin{array}{lll} P_1 = \Lambda; & P_2 = 0; & P_3 = 0 \\ Q_1 = 0; & Q_2 = \Lambda; & Q_3 = 0 \\ R_1 = 0; & R_2 = 0; & R_3 = \Lambda \end{array}$$

e quindi le (23) mutarsi nelle (11) di questo Capo, a meno del segno della quantità Λ, che non fa difetto, essendo questa quantità stata introdotta come un coefficiente indeterminato.

Per vedere uscire anche le equazioni (13) num°. 64. spettanti ai limiti del fluido, conviene, in corrispondenza a quanto si è fatto al num°. 51., trasformare il precedente integrale triplicato (18), e l' altro simile portato dall' equazione di condizione, coll' introdurre sotto il segno il fattore $H\Gamma$ che non produce alterazione per essere eguale all' unità, e quindi passare dalle integrazioni prese per a, b, c a quelle prese per x, y, z. Inoltre bisogna praticare a dirittura sulla quantità (20) prima di collocarla sotto il secondo integrale le trasformazioni precedentemente descritte. Per la prima parte di essa quantità (20) abbiamo già veduto come si riducono i trinomj coefficienti delle variazioni δx, δy, δz; gli ultimi tre termini della espressione (20), visti i valori (21), ricordato il principio esposto nelle equazioni (17), (18) del num°. 37., e richiamate novellamente le equazioni identiche (28) del num°. 14., cangiansi per via di riduzioni che si presentano da per se stesse, nel trinomio

$$\frac{1}{\Gamma}\left(\frac{d.\Lambda\delta x}{dx} + \frac{d.\Lambda\delta y}{dy} + \frac{d.\Lambda\delta z}{dz}\right).$$

così che la quantità (20) risulta equivalente a quest' altra

$$(26) \quad -\frac{1}{\Gamma}\left(\frac{d\Lambda}{dx}\,\delta x + \frac{d\Lambda}{dy}\,\delta y + \frac{d\Lambda}{dz}\,\delta z\right) + \frac{1}{\Gamma}\left(\frac{d.\Lambda\delta x}{dx} + \frac{d.\Lambda\delta y}{dy} + \frac{d.\Lambda\delta z}{dz}\right).$$

Se ne faccia la sostituzione sotto l' integrale triplicato risultante dall'unione dei due che nel caso attuale costituiscono il primo membro dell' equazione generale. Annullando, come si sa doversi fare, i coefficienti totali delle δx, δy, δz, ritornano le solite tre equazioni come sopra; ma vi è di più la parte che si colloca sotto integrali duplicati, la quale riesce

$$(27) \qquad \int dy \int dz\,.\,\Lambda\delta x + \int dx \int dz\,.\,\Lambda\delta y + \int dx \int dy\,.\,\Lambda\delta z.$$

Essa va trattata come la quantità (27) del num°. 51.: va cioè, mediante le trasformazioni indicate al num°. 52., ridotta ad un solo integrale duplicato che risulta

$$(28) \qquad \int dx \int dy\,.\,\Lambda\left(\delta z - \frac{dz}{dx}\,\delta x - \frac{dz}{dy}\,\delta y\right);$$

poi sommata e fusa in un solo integrale insieme a quello della quantità segnata (28) al num°. 51. Allora debbono eguagliarsi separatamente a zero i coefficienti delle variazioni δx, δy, δz: il che restituisce le equazioni (13) colla sola diversità del segno per la Λ, come sopra.

Si può osservare che la precedente analisi si piega anche ai fluidi elastici quando si adotta per essi l'equazione di condizione $H_1 = 1$, dove H_1 abbia il valore (3) del num°. 45., equazione dimostrata al principio del num°. 46. In tal caso bisogna prima trasformare il precedente integrale (18) delle forze in un altro preso per le p, q, r, come si è fatto allo stesso num°. 46.

67. La dimostrazione riferita nell'antecedente numero, dopo stabilita l'equazione di condizione (17) può prendere un altro andamento che per più titoli mi giova di esporre. Primieramente mi verrò per tal modo preparando alcune formole che avranno utili applicazioni nel Capo seguente: secondariamente otterremo una nuova riconferma delle fondamentali equazioni (11): in terzo luogo potrò con questo mezzo provare una proposizione più sopra semplicemente annunziata.

Conviene premettere la ricerca di una nuova espressione pel valore del sestinomio H.

Richiaminsi le nove equazioni identiche (28) del num°. 14., e le sei denominazioni (equazioni (6)) del num°. 34. Di quelle nove si quadrino la prima, la quarta e la settima, indi si sommino: avremo per le (6) num°. 34

$$l^2{}_1 t_1 + m^2{}_1 t_2 + n^2{}_1 t_3 + 2l_1 m_1 t_4 + 2l_1 n_1 t_5 + 2m_1 n_1 t_6 = H^2.$$

Quadrando invece la seconda, la quinta e l' ottava di quelle (28) num°. 14., e sommandole troveremo

$$l^2{}_2 t_1 + m^2{}_2 t_2 + n^2{}_2 t_3 + 2l_2 m_2 t_4 + 2l_2 n_2 t_5 + 2m_2 n_2 t_6 = H^2.$$

E similmente dalla terza, sesta e nona

$$l^2{}_3 t_1 + m^2{}_3 t_2 + n^2{}_3 t_3 + 2l_3 m_3 t_4 + 2l_3 n_3 t_5 + 2m_3 n_3 t_6 = H^2.$$

Si sommino ancora queste equazioni che ora ci siamo formate, ed otterremo

$$(29)\quad \begin{aligned} 3H^2 = (l^2_1 + l^2_2 + l^2_3)\, t_1 &+ 2(l_1 m_1 + l_2 m_2 + l_3 m_3)\, t_4 \\ + (m^2_1 + m^2_2 + m^2_3)\, t_2 &+ 2(l_1 n_1 + l_2 n_2 + l_3 n_3)\, t_5 \\ + (n^2_1 + n^2_2 + n^2_3)\, t_3 &+ 2(m_1 n_1 + m_2 n_2 + m_3 n_3)\, t_6 . \end{aligned}$$

Presentemente si noti l'equazione identica

$$(30)\quad \begin{aligned} &(AM-BL)^2 + (CL-AN)^2 + (BN-CM)^2 = \\ &(A^2+B^2+C^2)(L^2+M^2+N^2) - (AL+BM+CN)^2 \end{aligned}$$

facilmente verificabile mediante lo svolgimento delle operazioni indicate nei due membri: e su questo tipo, richiamate le denominazioni (27) num°. 14., riconosceremo vere le tre equazioni

$$(31)\quad \begin{aligned} l^2_1 + l^2_2 + l^2_3 &= t_2 t_3 - t^2_6 \\ m^2_1 + m^2_2 + m^2_3 &= t_1 t_3 - t^2_5 \\ n^2_1 + n^2_2 + n^2_3 &= t_1 t_2 - t^2_4 . \end{aligned}$$

Si noti altresì questa seconda equazione identica

$$(32)\quad \begin{aligned} &(AM-BL)(BP-AQ) + (CL-AN)(AR-CP) + (BN-CM)(CQ-BR) \\ &= (AP+BQ+CR)(AL+BM+CN) - (A^2+B^2+C^2)(LP+MQ+NR) \end{aligned}$$

verificabile alla stessa maniera della (30); e su quest'altro tipo, mediante le denominazioni (27) num°. 14., ci persuaderemo della verità delle tre nuove equazioni

$$(33)\quad \begin{aligned} l_1 m_1 + l_2 m_2 + l_3 m_3 &= t_5 t_6 - t_3 t_4 \\ l_1 n_1 + l_2 n_2 + l_3 n_3 &= t_4 t_6 - t_2 t_5 \\ m_1 n_1 + m_2 n_2 + m_3 n_3 &= t_4 t_5 - t_1 t_6 . \end{aligned}$$

Se i valori dei sei trinomj datici dalle equazioni (31), (33) si sostituiscono nella equazione (29), se ne cava dopo facili riduzioni

$$(34)\quad H = \sqrt{t_1 t_2 t_3 + 2t_4 t_5 t_6 - t_1 t^2_6 - t_2 t^2_5 - t_3 t^2_4}\,;$$

cioè il sestinomio H dato per le sei quantità t_1, t_2, ec., che è la nuova espressione di cui andavamo in cerca.

Quindi anche la densità Γ in virtù dell'equazione (6) num°. 9. riceve un valore fatto con quelle sei quantità t_1, t_2, t_3, t_4, ec., riuscendo eguale all'unità divisa pel precedente radicale (34). E può avere qualche significazione il mostrare un punto di ravvicinamento fra le espressioni analitiche delle densità proprie delle tre sorte di sistemi, notando che se si adottano le denominazioni (6) del num°. 34., vengono le densità pei sistemi lineare e superficiale rispettivamente eguali all' unità divisa pei radicali $\sqrt{t_1}$, $\sqrt{t_1 t_2 - t^2_4}$ (rivedi le equazioni (16) num°. 11., e (24) num°. 12.).

Pertanto se prendiamo l'ottenuto valore (34) di H per adoperarlo nello svolgimento della equazione (17), troveremo che questa equazione variata, introdottovi un moltiplicatore indeterminato Λ, prende la forma

$$(35) \qquad A\delta t_1 + B\delta t_2 + C\delta t_3 + D\delta t_4 + E\delta t_5 + F\delta t_6 = 0$$

essendo

$$(36) \quad \begin{cases} A = \frac{\Lambda}{2H}(t_2 t_3 - t^2_6);\; B = \frac{\Lambda}{2H}(t_1 t_3 - t^2_5);\; C = \frac{\Lambda}{2H}(t_1 t_2 - t^2_4) \\ D = \frac{\Lambda}{H}(t_5 t_6 - t_3 t_4);\; E = \frac{\Lambda}{H}(t_4 t_6 - t_2 t_5);\; F = \frac{\Lambda}{H}(t_4 t_5 - t_1 t_6). \end{cases}$$

Ponendo il primo membro dell' equazione (35) sotto un integrale triplicato per a, b, c, e aggiungendolo all' altro integrale triplicato (18) numero precedente, avremo precisamente la stessa equazione (10) num°. 35. che trovammo pei sistemi rigidi: quindi arriveremo alle stesse equazioni (26) num°. 38. Se non che in tal caso nelle susseguenti equazioni (27) (le quali per le altre susseguenti (28) conducono ad assegnare i valori delle P_1, P_2, ec.) dovremo mettere per A, B, C, D, E, F i valori (36) ora trovati. Qui sta la differenza nella scrittura analitica pei due casi dei corpi rigidi e dei fluidi; nei rigidi le sei quantità A, B, C, ec. sono tutte e sei indeterminate: nei fluidi dipendono da una sola indeterminata Λ in forza delle precedenti equazioni (36).

L' indicata sostituzione dei valori (36) nelle (27) num°. 38. ci riduce le successive (28) di quel numero alle seguenti

$$(37)\qquad \begin{aligned} &P_1 = -\Lambda\,; \quad P_2 = 0\,; \quad P_3 = 0 \\ &Q_1 = 0\,; \quad Q_2 = -\Lambda\,; \quad Q_3 = 0 \\ &R_1 = 0\,; \quad R_2 = 0\,; \quad R_3 = -\Lambda\,. \end{aligned}$$

Per dimostrare questo importante risultamento, conviene prima scrivere da capo i valori (36) sostituendo ai fattori binomiali le quantità trinomiali equivalenti (equazioni (31) e (33)), indi porli nelle (27) num°. 38. Cominciamo dalla prima di quelle equazioni: essa diventa

$$\begin{aligned} \frac{H}{\Lambda}(I) = &-\left(l^2_1 + l^2_2 + l^2_3\right)\left(\frac{dx}{da}\right)^2 - 2\left(l_1 m_1 + l_2 m_2 + l_3 m_3\right)\frac{dx}{da}\frac{dx}{db} \\ &-\left(m^2_1 + m^2_2 + m^2_3\right)\left(\frac{dx}{db}\right)^2 - 2\left(l_1 n_1 + l_2 n_2 + l_3 n_3\right)\frac{dx}{da}\frac{dx}{dc} \\ &-\left(n^2_1 + n^2_2 + n^2_3\right)\left(\frac{dx}{dc}\right)^2 - 2\left(m_1 n_1 + m_2 n_2 + m_3 n_3\right)\frac{dx}{db}\frac{dx}{dc} \end{aligned}$$

e può ridursi all' espressione

$$\begin{aligned} \frac{H}{\Lambda}(I) = &-\left(l_1\frac{dx}{da} + m_1\frac{dx}{db} + n_1\frac{dx}{dc}\right)^2 \\ &-\left(l_2\frac{dx}{da} + m_2\frac{dx}{db} + n_2\frac{dx}{dc}\right)^2 - \left(l_3\frac{dx}{da} + m_3\frac{dx}{db} + n_3\frac{dx}{dc}\right)^2 \end{aligned}$$

la quale per le (28) del num°. 14. si semplifica fino a dare

$$(38)\qquad (I) = -\Lambda H\,.$$

Le due seguenti equazioni (27) num°. 38. ci somministrano per le quantità (II), (III) lo stesso valore ora trovato per la (I): e a persuadercene non fa bisogno rifare il calcolo, basta sostituire, o immaginare sostituita prima la lettera y, poi la z alla x, e ricordarsi le altre equazioni identiche (28) num°. 14.

Venendo alla quarta delle (27) num°. 38., la sostituzione come sopra dei valori delle A, B, ec. ci dà un risultato che può essere messo sotto la forma

$$\begin{aligned} \frac{H}{\Lambda}(IV) = &-\left(l_1\frac{dx}{da} + m_1\frac{dx}{db} + n_1\frac{dx}{dc}\right)\left(l_1\frac{dy}{da} + m_1\frac{dy}{db} + n_1\frac{dy}{dc}\right) \\ &-\left(l_2\frac{dx}{da} + m_2\frac{dx}{db} + n_2\frac{dx}{dc}\right)\left(l_2\frac{dy}{da} + m_2\frac{dy}{db} + n_2\frac{dy}{dc}\right) \\ &-\left(l_3\frac{dx}{da} + m_3\frac{dx}{db} + n_3\frac{dx}{dc}\right)\left(l_3\frac{dy}{da} + m_3\frac{dy}{db} + n_3\frac{dy}{dc}\right) \end{aligned}$$

dopo di che, in vista delle solite equazioni identiche (28) num°. 14., riconosciamo essere (IV) = o. In simil modo le ultime due di quelle equazioni ci dimostrano nulle anche le quantità (V), (VI), e per convincercene subito appoggiandoci all' ultima riduzione, basta la prima volta cambiare la lettera y colla z, e la seconda la lettera x colla y.

Sono dunque ben provate in forza delle (28) num°. 38. le precedenti equazioni (37), stanti le quali, le (26) num°. 38. ci porgono dimostrate per la terza volta le equazioni (11) di questo Capo senza ricorrere al principio della pressione eguale in tutti i versi.

Facciasi una speciale attenzione a quel passo della precedente analisi dove abbiamo veduto che la condizione della densità costante porta di dover aggiungere all' equazione generale un integrale triplicato formato col primo membro dell'equazione (35). Quando il corpo è rigido (equazione (10) num°. 35.) v' è di già nella equazione generale una quantità di questa forma, talchè l' aggiunta della quantità proveniente dalla (35) non fa che rendere binomiali i coefficienti delle variate δt_1, δt_2, δt_3, ec.; e siccome i primi termini di tali binomj sono indeterminati, possono abbracciare anche i secondi, e i coefficienti tenersi monomj senza alterazione. Ecco il perchè nel moto de' corpi rigidi a densità costante (come accennai al num°. 66.) si può prescindere dal considerare la condizione scritta nella equazione (17).

68. Ho inoltre detto al num°. 65. che non si hanno ancora idee abbastanza chiare intorno alla pressione nei fluidi. Si suole chiamare pressione una forza interna $\Lambda(x, y, z)$ funzione delle coordinate, quale apparisce nelle equazioni (11); si ritiene a ragione che questa pressione, appunto perchè funzione delle coordinate, varia nelle diverse parti della massa fluida; è ben chiaro, per esempio, che in un' acqua tranquilla la pressione verso il fondo del recipiente è maggiore che non verso la superficie superiore del liquido. Ma se, quando si dice che nei fluidi la pressione è eguale in tutti i versi, tiensi solamente

di mira l'anzidetta forza interna, non è difficile venir condotti a deduzioni false. Sapendosi che l'azione è sempre eguale alla reazione, si può credere che la pressione con cui una molecola più bassa agisce sull' altra che le sta sopra immediatamente, uguagli quella con cui questa reagisce e avvenga lo stesso per la molecola che le sta di sotto: e così passando da molecola a molecola venire alla conseguenza assurda che la pressione sia la stessa per tutti i punti del fluido. — Per togliersi a un tale imbarazzo convien riflettere che a produrre la pressione eguale in tutti i versi concorrono eziandio le forze esterne X, Y, Z, anch' esse, generalmente parlando, variabili di punto in punto. È dal conflitto di queste colla forza interna $\Lambda(x, y, z)$ (attuata fra le molecole, parte per forze attive molecolari, parte, ed è il più, per forze passive provenienti dall'applicazione delle forze esterne) che nasce la pressione eguale in tutti i versi: nasce una costanza di mezzo a quantità mutabili. Vuolsi pertanto sapere perchè incontriamo qui oscurità di idee? è perchè la stessa parola non ha sempre un significato egualmente determinato. Spesso chiamiamo pressione la forza interna $\Lambda(x, y, z)$ senza badare alle forze esterne: invece quando enunciamo il principio della pressione eguale in tutti i versi, sottointendiamo che la pressione oltre la forza interna Λ comprenda in certe direzioni anche le forze esterne: nel primo caso la parola non esprime che una parte di ciò che esprime nel secondo caso. Vi ha di più: a produrre l'oscurità d' idee di cui dicemmo, contribuisce forse maggiormente un cambiamento sottinteso che si fa nel concetto della pressione Λ, la quale è riguardata talvolta come forza di prima specie, talvolta come di seconda specie (rivedi i numeri 18, 19, 20, 21.). Finchè la consideriamo come una forza interna che agisce su tutte le molecole della massa fluida, essa è della stessa natura delle X, Y, Z, è cioè forza di prima specie, di quelle che vanno moltiplicate per σ^3; quando invece parliamo della pressione eguale in tutti i versi, essa si cambia in una forza di seconda specie, di quelle che vanno moltiplicate per σ^2. Infatti il concetto è che pel punto

(x, y, z) facendo passare in qualunque verso una superficie, ivi la forza proveniente dall'azione del fluido è perpendicolare a tal superficie, e sempre la stessa comunque si volti la superficie che passa per quel punto. Si esamini bene anche ciò che facciamo quando vogliamo stabilire sperimentalmente il principio idrostatico di cui parliamo, e si vedrà che per pressione intendiamo sempre una forza applicata ad una superficie, e trasmessa poi ad una massa estesa secondo tutte e tre le dimensioni. Ciò premesso, assumendo un linguaggio simile all' usato dai nostri maggiori, possiamo ragionare così. Nell'equilibrio una molecola preme quella che le è contigua secondo l' asse delle x colla forza esterna $\sigma^3 X$ più colla pressione $\sigma^2 \Lambda$, e detta molecola contigua reagisce sulla prima colla $\sigma^2 \left(\Lambda + \sigma \frac{d\Lambda}{dx} + \text{ec.}\right)$, aumentando la Λ per l'aumento molecolare che prende la x. Queste due pressioni opposte dovendo essere eguali, ci somministrano un' equazione dove, eliminato nei due membri il termine comune $\sigma^2 \Lambda$, poi fatta la divisione per σ^3, e trascurati i termini ulteriori si vede risultare la $X = \frac{d\Lambda}{dx}$. Allo stesso modo si provano le altre due $Y = \frac{d\Lambda}{dy}$, $Z = \frac{d\Lambda}{dz}$, cioè le equazioni (11) pel caso dell' equilibrio e della densità costante: nelle quali è bene avvertire che la Λ ripiglia adesso il concetto di forza di prima specie: passaggio pari ad altri che si effettuano solo mentalmente, senza che di solito vi si presti attenzione. Ecco poi (in conformità a quanto si è detto più sopra) che se badiamo alla sola Λ, dimenticando le forze esterne, non vi è eguaglianza di pressione, giacchè la prima molecola agisce sulla seconda mediante la $\sigma^2 \Lambda$, e la seconda reagisce colla $\sigma^2 \Lambda + \sigma^3 \frac{d\Lambda}{dx}$; l' eguaglianza è ristabilita perchè alla $\sigma^2 \Lambda$ della prima molecola va aggiunta la forza esterna $\sigma^3 X$. L' eguaglianza di pressione intesa a questo modo, può, per quanto mi sembra, sostenersi e un tal poco concepirsi anche nel moto. Si sa che in tal caso la forza esterna $\sigma^3 X$ è surrogata dal binomio $\sigma^3 \left(X - \frac{d^2 x}{dt^2}\right)$

nel quale la differenza dei due termini può diventare assai piccola per le grandi accelerazioni; ma dove il fluido si accelera di più, pare che le molecole debbano essere più discoste fra loro (s' intromettano poi o non s' intromettano altre molecole) e quindi minore debba essere anche la forza interna che dipende dalla distanza molecolare. Che che ne sia però di ciò, riteniamo che le equazioni (11) sono stabilite indipendentemente dal principio controverso, e che in esse la Λ venne introdotta per processo analitico, senza bisogno d'idee intorbidate da que' salti e da quelle tacite convenzioni che qui sopra abbiamo cercato di notare e descrivere. E ciò perchè si è potuto evincere che il costituente della fluidità non istà già (giova il ripeterlo) nella disposizione regolare delle molecole intorno ciascuna, ma in una particolare condizione cui vengono ridotte le forze interne per la cessazione di quella parte di azione che è dovuta alla figura delle molecole.

69. A questo punto io credo di aver raggiunto lo scopo che mi era proposto e che ho indicato fin dal principio della presente Memoria, quello di sostenere contro ogni tentativo d'innovazione la teorica Euleriana del moto de' fluidi contenuta nelle equazioni (11), aggiuntavi la quarta detta della continuità. La quale apologìa a me particolarmente importava, avendo io assunta detta teorica a base delle mie ricerche in idrodinamica. Non mi starò qui a ripetere ciò che forma il soggetto di quelle Memorie che ricordai sul fine del preambolo di questa; darò soltanto un' idea del principio generale mediante il quale la trattazione delle quattro equazioni summentovate viene ad essere giovata del soccorso di altre equazioni, che quantunque desunte da considerazioni particolari alle superficie conterminanti il fluido, si dimostrano dover valere anche nell' interno della massa fluida.

Nella seconda di dette Memorie provai dapprima che quando il moto è permanente, e a due sole coordinate, cioè in un piano, tutte le molecole del liquido vanno per trajettorie che sono curve di una stessa famiglia, rappresentate tutte da un' unica equazione

(39) $$a = f(x, y);$$

e che non diversificano fra loro se non a motivo del parametro a il quale, costante in ciascuna trajettoria, varia dall' una all' altra. La stessa conseguenza può dedursi più in generale, anche per quando il moto non è permanente, dalla equazione (9) Capo I. della Memoria prima (Memorie dell' I. R. Istituto Lombardo. Vol. 1°. pag. 222.) dove il secondo membro essendo una costante per riguardo al tempo, la quale muta per diversi luoghi della massa, ha la stessa idea della precedente a: e siccome il primo membro è funzione delle x, y, t, che rimane la medesima per tutti i punti del fluido, quella equazione è insomma l'equazione generale delle trajettorie, come la poc' anzi scritta (39). Vi è solamente la differenza del provarsi a questo modo che anche quando vi è il tempo esplicito, le trajettorie variano soltanto pel mutare di una costante in una equazione che tutte le comprende, come quando il moto è permanente. Osservazione quest' ultima fatta dopo la pubblicazione delle ricordate Memorie, e che parmi importante.

Avendo una equazione come la precedente (39), ove è isolata la costante che muta di trajettoria in trajettoria, col derivarla totalmente pel tempo (operazione che fa sparire quella costante), si cava l' importantissima conseguenza che l' equazione derivata

(40) $$f'(x)u + f'(y)v = 0,$$

nella quale alle u, v s' intendano sostituiti i loro valori generici $u(x, y)$, $v(x, y)$, deve verificarsi anche considerando x, y fra di loro indipendenti. Se così non fosse, se ne potrebbe dedurre y in funzione di x senza la costante a, il che ripugna alla natura della questione. Quindi l'ottenuta equazione (40) si verifica per tutti i punti della massa, come le altre della teorica Euleriana, e può ad esse associarsi per facilitare la ricerca delle funzioni incognite di x, y cui sono eguali le velocità u, v. Ciò è appunto che mi riuscì di fare nel caso del moto permanente e nella supposizione che, quando il liquido è chiuso da

pareti, venga da una parete di forma nota assegnata l' equazione generale delle trajettorie: e quando il liquido è superiormente libero, tale equazione generale siaci somministrata eguagliando ad una costante la pressione $\Lambda(x, y)$.

Analoghe considerazioni hanno luogo pel moto a tre coordinate, riuscendo in tal caso due le equazioni come la (39) spettanti alla trajettoria generica. Dette equazioni possono anche riguardarsi come due equazioni di superficie percorse da veli fluidi formati di tante trajettorie: e così veniamo a sapere che a due sole famiglie si riducono tali superficie. Anche qui derivando totalmente pel tempo si ottengono due equazioni simili alla precedente (40), che con ragionamenti della stessa indole si provano sussistenti per tutti i punti dell'interno della massa, e possono associarsi alle quattro della teorica generale per la ricerca delle tre velocità u, v, w. La determinazione di tali velocità mi riuscì nel caso del moto permanente anche libero, con supposizioni corrispondenti alle già espresse pel moto a due coordinate.

70. Che dovremo in ultimo dire della legge della permanenza delle molecole de' liquidi alle pareti o alle superficie libere durante il movimento? Scrissi già (Giornale dell' I. R. Istituto Lombardo, T. 6°. pag. 324.) che una tal legge potea provarsi vera quando il moto è permanente. Pel caso generale io non asserii che non sussistesse (come taluno mi fece dire), notai solo che più non valeva la recata dimostrazione: il che è ben diverso, potendo molte cose esser vere, quantunque non per anco dimostrate. Ora, ben considerato il teorema del num°. 64, inclino a credere che l' anzidetta permanenza si estenda ad altri casi. È manifesto che noi possiamo astrarre col pensiero dalla massa fluida in moto la parte di fluido sovraincombente a qualunque dei veli formati di tante trajettorie, di cui sopra dicemmo, e considerare il moto della sola porzione di fluido sottostante a tal superficie; allora la prima porzione di fluido entra in considerazione unicamente come quella che fa una pressione sul fluido che scorre al di sotto. Vedemmo che una

tal pressione è perpendicolare alla trajettoria in ogni punto: dunque una pressione perpendicolare ad una trajettoria in ogni punto non disturba lo scorrimento delle molecole in essa. Ma in quali condizioni sono le molecole del fluido alle pareti ed alle superficie libere? sono appunto sotto pressioni che si esercitano (e l'abbiamo dimostrato) perpendicolarmente a quelle superficie conterminanti il fluido: potranno dunque scorrere lungo tali superficie. Ben è vero che qui si inverte una proposizione; la proposizione provata è: data una trajettoria, la pressione esercitata dal fluido sovraincombente è normale alla curva in ogni punto; la proposizione che si vuole insinuare è: data una pressione che si esercita normalmente ad un velo o ad una linea fluida, in un tal velo, in una tal linea può esistere una trajettoria. Ora una tal trajettoria può anche non esistere, come vediamo nell' equilibrio: ed ecco il perchè nella mia Memoria ho creduto di dover ammettere che qualche volta il fluido non lambisce la parete solida, ma si crea esso stesso la sponda o il fondo sul quale scorrere, depositandosi una porzione di fluido che rimane ferma o prende movimenti staccati dal moto della massa principale.

Si fanno due obbjezioni alla legge della permanenza delle molecole alle pareti ed alle superficie libere: è bene prenderle a disamina. Colla prima si dice: nelle correnti la superficie libera alle volte si allarga, alle volte si restringe: se la densità del liquido ivi come dappertutto deve rimanere costante, bisogna che quando la superficie si allarga, accorrano nuove molecole, e quando si restringe, alcune di quelle che vi si trovano, vadano sotto. Anche l'accelerazione maggiore in qualche luogo della superficie, minore in qualche altro, non può conciliarsi colla densità costante senza molecole che sopraggiungano nel primo caso e partano nel secondo. — La risposta a tutte queste difficoltà parmi debba cercarsi nel primo concetto che ci siamo formati al num°. 7., e che abbiamo richiamato in varj altri luoghi, circa al potersi trascurare termini moltiplicati per la distanza molecolare σ, in confronto di quelli che non hanno

un tal fattore. Se termini come questi possono senza errore essere trascurati, possono essere senza errore anche aggiunti positivamente o negativamente. Io tengo quindi per fermo che sia lecito considerare come esistenti alla superficie, non proprio solamente le molecole componenti il primo velo fluido, ma anche quelle di veli sottoposti a distanze equivalenti ad una, due, più volte l'intervallo molecolare σ; non però preso un tal numero di volte da rendere dette distanze finite e sensibili. Infatti le equazioni del moto per questi veli sottoposti non differiscono da quelle pel moto del primo velo, se non perchè le x, y, z spettanti al detto velo supremo hanno aumenti positivi o negativi con quel fattore piccolissimo σ: svolgansi in serie i termini componenti tali equazioni secondo le potenze dei detti aumenti, e trascurando (come è già ammesso) tutta la parte moltiplicata per σ, le equazioni figureranno come appartenenti al primo velo, mentre in verità appartengono a veli sottoposti. Ritenute come spettanti alla superficie suprema anche molecole che ne stanno al di sotto per distanze non finite, possiamo disporre di uno spessore quale ci abbisogna a fine di cavarne o di ritirarvi le molecole di cui parlasi nelle addotte difficoltà o in altre simili. Così la densità superficiale, se vuolsi considerare fra le molecole costituenti il solo velo rigorosamente supremo, può non essere costante: sarà costante come risultato a produrre il quale entrano anche molecole appartenenti a veli sottoposti. Così le molecole in una trajettoria possono diradarsi, il che anzi io ho provato avvenire in casi di moto conosciuto (Vedi la prima delle Memorie sopracitate ai numeri 7, 21), e nondimeno la densità essere costante, supplendo negl' intervalli molecole prese da trajettorie contigue. — Rapporto alle densità lineare e superficiale, ho eseguito un lungo calcolo del quale risparmierò la pena ai miei lettori, esponendone solo storicamente il risultato. Noi conosciamo le espressioni di queste densità (Capo I. numeri 11, 12.) e le equazioni della continuità che ne sono conseguenze (ivi num°. 15.). Se tali densità rimanessero esattamente costanti, potremmo mettere a profitto

le corrispondenti equazioni della continuità, come si fa dell'altra (34) num°. 14., e così cavare nuove equazioni che si verificherebbero ai limiti del liquido. L' ho fatto: e mi è risultato che contemplando anche sì fatte equazioni, le trajettorie verrebbero rettilinee: prova manifesta che quelle densità considerate in una sola linea geometrica, o in una sola superficie matematica, non sono costanti.

La seconda obbjezione è la seguente. Lagrange pel primo (M^a. A^a. T. II. pag. 298.) e poi altri hanno riconosciuto che nell' efflusso dell'acqua da vasi che si vuotano, si danno dei casi nei quali è manifesto che la legge della permanenza delle molecole alle pareti od alle superficie libere non può assolutamente aver luogo. Nè qui s' intendono spostamenti non finiti, della natura di quelli di cui più sopra abbiamo fatto parola, e che debbonsi riguardare come nulli: s' intendono spostamenti finiti e apprezzabili anche dai nostri sensi. La mia maniera di vedere relativamente a tale difficoltà, dopo molto pensarvi è ora quale passo ad esporla. Il fluido nei casi anzidetti si sottrae all' enunciata legge, perchè il suo movimento si sottrae all'analisi fin quì trattata: la questione appartiene ad una Meccanica la quale non è per anco scritta. Di fatti in tutta la Meccanica Analitica di Lagrange e in questa stessa Memoria si suppone sempre che la massa in moto rimanga costante. Eppure si possono immaginare problemi di moto a massa variabile. Tale sarebbe quello in cui si proponesse di determinare il moto di una vallanga, nella quale la massa è sempre crescente: tale l' altro ove si prendesse a esaminare il moto di un gomitolo di filo di cui fosse trattenuto un capo, e che quindi a motivo dello svolgersi del filo, si muoverebbe con massa sempre decrescente. Sì fatte ricerche sembrano a prima giunta piuttosto di curiosità, che di vantaggio: ma nel moto de' liquidi si presentano spontaneamente questioni dello stesso genere. Nell' efflusso dell'acqua da vasi che si vuotano, siccome le considerazioni si restringono al fluido ancora contenuto nel vaso, vedesi che si ha di mira un moto nel quale la massa è variabile

e continuamente decrescente. Nel caso di una corrente accresciuta continuamente da acque di scolo affluenti dalle sponde, la massa invece sarebbe variabile per aumento. Non è che io creda i problemi di tal natura invincibili dalla potenza del calcolo: credo anzi che vi si possano assoggettare: negli integrali definiti componenti le equazioni generali scritte nel Capo II. di questa Memoria, i limiti invece di essere costanti, saranno variabili e funzioni del tempo. Intanto però questa Meccanica non è ancor fatta: e così essendo le cose, non parmi filosofico muovere difficoltà contro la Meccanica ordinaria, desumendole da questioni che sono fuori del suo dominio.

CAPO VI.

Del movimento di un corpo qualunque giusta le idee de' moderni intorno alle azioni molecolari.

Si è detto sul principio del Capo IV. esservi due maniere per mettere a calcolo nella equazione generale del moto di un qualunque corpo l'effetto dei vincoli fra le sue molecole prodotti dalle forze interne. Una maniera era quella di esprimere tali effetti per mezzo di equazioni di condizione, e quindi per mezzo della terza parte dell' equazione generalissima (1) del num°. 16.: a questa ci siamo attenuti nei due Capitoli precedenti. L'altra era di contemplare, giusta le idee de' moderni, le azioni molecolari servendoci della seconda parte dell' equazione (1) summentovata, ove si comprendono tutti i termini introdotti da forze interne attive: di questa farò ora qualche parola. Ciò tanto più volentieri in quanto vedremo che le due maniere conducono ai medesimi risultamenti per quella parte della soluzione che è la più importante e fondamentale (accordo che al certo riesce molto confortante): e per qualche altra parte si illuminano e si completano a vicenda, sì che diventa facile nell'una ciò che è complicato e difficile nell'altra.

71. Richiamando quanto si è detto ai numeri 31, 32. per far vedere come nel caso dei sistemi a tre dimensioni la prima parte dell' equazione generale (1) num°. 16., dovuta alle forze esterne, si modifichi ad essere rappresentata come segue :

$$(1) \qquad \int da \int db \int dc \,.\, \left\{ \left(X - \frac{d^2x}{dt^2} \right) \delta x + \text{ec.} \right\};$$

vediamo ora come si modifichi la seconda parte $S m_i m_j K \delta\rho$, che è quella che adesso vogliamo considerare, abbandonando la parte terza, se non fosse per seguitare a ritenervi espressi termini portati da forze applicate soltanto a superficie, a linee, a punti, ma non estensibili a tutta la massa.

Questa parte, supponendo che fra ciascuna coppia di molecole siavi sempre una forza interna K, quando il numero dei punti è n, messa in disteso, si presenta così:

$$(2) \qquad \begin{array}{l} m_1 m_2 K_{1,2} \delta\rho_{1,2} + m_1 m_3 K_{1,3} \delta\rho_{1,3} + \ldots\ldots + m_1 m_n K_{1,n} \delta\rho_{1,n} \\ \qquad + m_2 m_3 K_{2,3} \delta\rho_{2,3} + \ldots\ldots + m_2 m_n K_{2,n} \delta\rho_{2,n} \\ \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ \qquad\qquad\qquad + m_{n-1} m_n K_{n-1,n} \delta\rho_{n-1,n} \end{array}$$

essendo in generale

$$(3) \qquad \rho_{i,j} = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2}.$$

E può osservarsi che le successive linee orizzontali di essa, le quali scemano successivamente di un termine, possono ridursi tutte a un numero n di termini, scrivendo invece della (2) la quantità

$$(4) \qquad \begin{array}{l} \frac{1}{2} m_1 m_1 K_{1,1} \delta\rho_{1,1} + \frac{1}{2} m_1 m_2 K_{1,2} \delta\rho_{1,2} + \ldots + \frac{1}{2} m_1 m_n K_{1,n} \delta\rho_{1,n} \\ + \frac{1}{2} m_2 m_1 K_{2,1} \delta\rho_{2,1} + \frac{1}{2} m_2 m_2 K_{2,2} \delta\rho_{2,2} + \ldots + \frac{1}{2} m_2 m_n K_{2,n} \delta\rho_{2,n} \\ \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ + \frac{1}{2} m_i m_1 K_{i,1} \delta\rho_{i,1} + \frac{1}{2} m_i m_2 K_{i,2} \delta\rho_{i,2} + \ldots + m_i m_n K_{i,n} \delta\rho_{i,n} \\ \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ + \frac{1}{2} m_n m_1 K_{n,1} \delta\rho_{n,1} + \frac{1}{2} m_n m_2 K_{n,2} \delta\rho_{n,2} + \ldots + \frac{1}{2} m_n m_n K_{n,n} \delta\rho_{n,n}. \end{array}$$

Per riconoscere l'egnaglianza delle due quantità (2), (4), basta osservare che in questa seconda i termini contenenti le variate

$$\delta\rho_{1,1}, \quad \delta\rho_{2,2} \ldots\ldots \delta\rho_{i,i} \ldots\ldots \delta\rho_{n,n}$$

sono introdotti solo per una regolarità di progressione negli indici, ma è come se non vi fossero, essendo zero i radicali $\rho_{1,1}$, $\rho_{2,2} \ldots \rho_{n,n}$, e le loro variate, come risulta manifesto in forza dell' espressione generica (3). Di poi che i restanti termini possono compenetrarsi a due a due: così i due $\frac{1}{2} m_1 m_2 K_{1,2} \delta\rho_{1,2} + \frac{1}{2} m_2 m_1 K_{2,1} \delta\rho_{2,1}$ equivalgono al solo $m_1 m_2 K_{1,2} \delta\rho_{1,2}$. Infatti è chiaro per la (3) che $\rho_{1,2}$ eguaglia $\rho_{2,1}$: e che inoltre $K_{1,2}$ eguagli $K_{2,1}$, oltrecchè risulta dal principio che l' azione è sempre eguale alla reazione, si farà anche più perspicuo per ciò che fra poco soggiungeremo intorno al modo con cui debb' essere intesa la composizione generica della forza interna K. Per simil guisa i due termini $\frac{1}{2} m_1 m_3 K_{1,3} \delta\rho_{1,3} + \frac{1}{2} m_3 m_1 K_{3,1} \delta\rho_{3,1}$ si uniranno in un solo $m_1 m_3 K_{1,3} \delta\rho_{1,3}$; e così via via. Dopo le quali osservazioni è facile persuadersi che la quantità (4) si contrae nella (2).

Una qualunque delle serie orizzontali componenti la quantità (4) può compendiarsi per mezzo di una sommatoria tripla. Per convincercene bisogna richiamare l' idea della precedente disposizione delle molecole colle coordinate a, b, c, rappresentandoci funzioni di esse le coordinate della molecola generica m_i:

$$(5) \qquad x_i = x(a, b, c); \quad y_i = y(a, b, c); \quad z_i = z(a, b, c).$$

Rappresentiamoci altresì composte come segue

$$(6) \qquad x_j = x(a+f, b+g, c+k); \quad y_j = y(a+f, b+g, c+k); \quad z_j = z(a+f, b+g, c+k)$$

le coordinate x_j, y_j, z_j dell' altra molecola qualunque m_j, la quale (tenuta fissa la m_i) passi successivamente a significare tutte le altre molecole della massa; e intendiamo che questi valori analitici (6) tengano dietro al mutarsi della m_j col cambiarsi in essi le f, g, k, tenute ferme le a, b, c. Questo si fa come se immaginassimo nello stato precedente ideale tirati per la molecola m_i presa come origine tre nuovi assi paralleli a

quelli delle a, b, c, e chiamassimo f, g, k le coordinate di una molecola qualunque relativamente a detti nuovi assi. Ora convien ricordare quello che si è detto al num°. 31., quando si trattava della prima parte della equazione generale, sul modo d' immaginarsi distribuiti gli n punti del sistema secondo indicazioni relative ai tre assi, che conducono a dare all' aggregato degli n termini una disposizione di serie tripla: e non si incontrerà difficoltà a capire che l' (i) esima delle serie orizzontali componenti la quantità (4) può compendiarsi per mezzo dell' integrale finito triplicato

$$\Sigma\Delta f\,\Sigma\Delta g\,\Sigma\Delta k\,.\,\tfrac{1}{2}\,m_i\,m_j\,\mathrm{K}\delta\rho\,, \tag{7}$$

avendo ρ (equazioni (3), (5), (6)) il valore dato dall' equazione

$$\begin{aligned}\rho^2 &= [\,x\,(a+f,\,b+g,\,c+k\,) - x\,(\,a,\,b,\,c\,)\,]^2\\ &+ [\,y\,(a+f,\,b+g,\,c+k\,) - y\,(\,a,\,b,\,c\,)\,]^2\\ &+ [\,z\,(a+f,\,b+g,\,c+k\,) - z\,(\,a,\,b,\,c\,)\,]^2.\end{aligned} \tag{8}$$

I limiti delle precedenti integrazioni finite dipenderanno, come si è detto al num°. 31., dalle superficie conterminanti il corpo nello stato antecedente al reale. L' espressione (7) poi si adatterà a rappresentare la prima, la seconda, l' (n) esima delle serie orizzontali componenti la quantità (4), mutando in essa le coordinate a, b, c della molecola generica m_i, dando cioè loro i valori opportuni affinchè essa diventi successivamente la molecola m_1, m_2 .... m_n; e siccome sono pure di numero n quelle serie orizzontali (come i termini di ciascuna di esse), la somma delle somme ci verrà data dall' integrale finito sestuplo

$$\Sigma\Delta a\,\Sigma\Delta b\,\Sigma\Delta c\,\Sigma\Delta f\,\Sigma\Delta g\,\Sigma\Delta k\,.\,\tfrac{1}{2}\,m_i\,m_j\,\mathrm{K}\delta\rho\,. \tag{9}$$

Rammentiamoci il già detto nelle ultime linee del num°. 21., circa al dare il valore σ^3 alla lettera m esprimente la massa della molecola generica: e siccome nell' integrale precedente vi è il prodotto di due simili m, ci si farà manifesto doversi mettere al luogo di esso l'espressione $\sigma^3.\sigma^3$. Richiamato altresì il teorema analitico scritto nella equazione (17) del num°. 26.,

teorema del quale si ripete qui sei volte l'applicazione, ci troveremo disposti ad ammettere che il precedente integrale sestuplo finito si tramuta nell' integrale sestuplo continuo

$$(10) \qquad \int da \int db \int dc \int df \int dg \int dk \,.\, \tfrac{1}{2}\, K\delta\rho$$

coll'aggiunta di altri termini che poi debbonsi trascurare. In esso i limiti delle integrazioni per f, g, k dipenderanno dalle superficie conterminanti il corpo nello stato antecedente, ed anche dalla posizione della molecola m_i tenuta costante, cioè dalle variabili a, b, c, che dopo le tre prime fanno poi anch' esse il loro giro.

72. Fermiamoci ora in qualche considerazione relativa alla forza interna K attuata fra molecola e molecola, tanto per attrazioni o repulsioni, che avrebbero agito anche indipendentemente da forze esterne applicate, quanto in virtù di queste stesse forze esterne. Il farla, come sulle prime suggerisce, funzione $K(\rho)$ della sola distanza molecolare, non è ammissibile se non nel caso in cui il corpo sia fluido, cessando allora la parte di azione dovuta alla figura delle molecole. In generale (rileggasi l' esposto al num°. 54.) quando è in giuoco anche l'azione dovuta alla figura, debbono entrarvi quei coseni a_1, a_2, a_3, a_4, ec. che fissano le direzioni degli spigoli od assi delle due molecole relativamente ai tre assi ortogonali, coseni i cui valori cambiandosi da molecola a molecola, debbono, generalmente parlando, risultare funzioni delle corrispondenti coordinate. Sarebbe difficile assegnare come avranno poi ad esser fatte tali funzioni (e basta a questo fine il solo immaginare che quelle direzioni siano normali a superficie curve di natura varia per diversi corpi ed incognita): ed oltre il non sapere l' interna fattura di queste funzioni, non si sa come entrino a comporre la K. In conseguenza la K, se vuoisene il concetto più generale, deve essere detta funzione delle sei coordinate, i cui valori sono espressi nelle equazioni (5), (6): nè possiamo presumere di esprimerne la composizione, solo ci è dato argomentare ch' essa sarà simmetrica relativamente alle dette sei

variabili, prese di tre in tre: cioè che cambiando le x_i, y_i, z_i nelle x_j, y_j, z_j, e queste nelle prime, resterà la medesima. Ciò perchè si sa (non essendovi la ragione del contrario) che la metà di K esprime l'azione della molecola m_j sulla m_i, e l'altra metà di K l'azione reciproca: si possono intendere cambiate le veci fra le due molecole, e nondimeno i valori analitici debbono rimanere i medesimi: osservazione che ci porta a conchiudere l' enunciata proprietà nella espressione analitica, come accennammo anche in un luogo del num°. precedente. L'inassegnabilità della funzione K $(x_i, y_i, z_i, x_j, y_j, z_j)$ può evincersi anche con altri argomenti che mi permetto di preterire: solamente noterò come eziandio da questo lato spicchi la superiorità dei metodi che abbiamo alle mani: con essi si può tirare innanzi con sicurezza non ostante un' ignoranza che non è vincibile. Faremo un' altra osservazione intorno alla piccolezza di questa forza molecolare K, ricordandoci di quanto abbiamo detto in proposito sulla fine del num°. 22. Corrispondentemente alle cose esposte nel num°. 18. e seguenti, essa deve riguardarsi una forza elementare di sì inoltrata tenuità, che raccogliendone sopra un solo punto tante quante vi vengono da tutte le molecole della massa, si ha per risultante una forza ancora piccolissima dell'ordine di quelle σ^3 X, σ^3 Y, σ^3 Z considerate al num°. 18. A questo concetto risponde ottimamente l' impiccolimento procurato dal fattore σ^6, quale vedemmo risultare nell' integrale sestuplo (9) a motivo del prodotto $m_i\, m_j$ delle due masse elementari.

Conseguenza del fin qui detto si è che sommando i due integrali (1), (10), e ponendo tal somma in luogo delle due prime parti dell'equazione generale (1) num°. 16., ci formeremo l' equazione che comprende tutta la meccanica molecolare. Prima però noteremo che giova fare per comodo

$$(11) \qquad \Lambda = \frac{1}{4}\,\frac{K}{\rho}$$

denominazione mediante la quale potremo introdurre la quantità $\Lambda\delta\rho^2$ invece di $\frac{1}{2}\,K\delta\rho$ nell' integrale sestuplo (10); e che

di questo integrale sestuplo è bene staccare la parte d' integrale triplicato relativa alle variabili f, g, k, sottoponendola allo stesso segno d' integrale triplicato per a, b, c che abbraccia la prima parte dell'equazione: il che manifestamente è permesso. Per tal modo l' anzidetta equazione generale si riduce

$$(12)\quad \begin{aligned}\int da \int db \int dc \,.\, \Big\{ \left(X - \frac{d^2x}{dt^2}\right) \delta x + \left(Y - \frac{d^2y}{dt^2}\right) \delta y + \left(Z - \frac{d^2z}{dt^2}\right) \delta z \\ + \int df \int dg \int dk \,.\, \Lambda \delta \rho^2 \Big\} + \Omega = 0\end{aligned}$$

intendendo (come ho accennato al principio del num°. 71.) compresa nella Ω tutta la parte che potesse essere introdotta da forze applicate a superficie, a linee, a punti determinati, ed anche da condizioni particolari che obbligassero alcuni punti a restare sopra qualche curva o superficie data. Questa (12) sta invece della (1) del num°. 44., o della (12) del num°. 46., e si vede come sia ora diversamente espressa (essendo eguale il rimanente) la parte introdotta dalle azioni reciproche fra le molecole, che colà abbiamo contemplato per mezzo di equazioni di condizione sussistenti per tutto il corpo.

73. Ciò che rimane a fare all' oggetto di dedurre utili conseguenze dall' equazione (12) è semplicemente un processo di calcolo. Richiamata l' equazione (8), si vede, svolgendo in serie le funzioni sotto le parentesi, come si abbia

$$\begin{aligned}\rho^2 = &\left(f \frac{dx}{da} + g \frac{dx}{db} + k \frac{dx}{dc} + \frac{f^2}{2} \frac{d^2x}{da^2} + \text{ec.}\right)^2 \\ &+ \left(f \frac{dy}{da} + g \frac{dy}{db} + k \frac{dy}{dc} + \frac{f^2}{2} \frac{d^2y}{da^2} + \text{ec.}\right)^2 \\ &+ \left(f \frac{dz}{da} + g \frac{dz}{db} + k \frac{dz}{dc} + \frac{f^2}{2} \frac{d^2z}{da^2} + \text{ec.}\right)^2 ;\end{aligned}$$

ed effettuando i quadrati e riunendo i termini che hanno coefficienti eguali:

$$(13)\quad \begin{aligned}\rho^2 = &f^2 t_1 + g^2 t_2 + k^2 t_3 + 2fg\, t_4 + 2fk\, t_5 + 2gk\, t_6 \\ &+ f^3 T_1 + 2f^2g\, T_2 + 2f^2k\, T_3 + fg^2\, T_4 + \text{ec.}\end{aligned}$$

nella quale espressione le t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6 significano sei trinomj che ci sono già familiari, avendo adottate tali denominazioni fino dalle equazioni (6) del num°. 34.; e T_1, T_2, T_3, T_4, ec. all' infinito, significano trinomj della stessa natura fatti con derivate di ordine sempre più elevato. In tutti questi trinomj gli ultimi due termini sono sempre simili al primo, non differendone se non per avere le lettere y, z in luogo della x. Quelli in cui entrano le derivate seconde sono di due sorte. Ve ne hanno di fatti con derivate prime e seconde: sono in numero di 18., cioè i seguenti:

$$(14)\quad \begin{array}{l}
\frac{dx}{da}\frac{d^2x}{da^2} + \frac{dy}{da}\frac{d^2y}{da^2} + \frac{dz}{da}\frac{d^2z}{da^2} \\[2ex]
\frac{dx}{da}\frac{d^2x}{da\,db} + \frac{dy}{da}\frac{d^2y}{da\,db} + \frac{dz}{da}\frac{d^2z}{da\,db} \\[2ex]
\frac{dx}{da}\frac{d^2x}{da\,dc} + \frac{dy}{da}\frac{d^2y}{da\,dc} + \frac{dz}{da}\frac{d^2z}{da\,dc} \\[2ex]
\frac{dx}{db}\frac{d^2x}{da\,db} + \frac{dy}{db}\frac{d^2y}{da\,db} + \frac{dz}{db}\frac{d^2z}{da\,db} \\[2ex]
\frac{dx}{db}\frac{d^2x}{db^2} + \frac{dy}{db}\frac{d^2y}{db^2} + \frac{dz}{db}\frac{d^2z}{db^2} \\[2ex]
\frac{dx}{db}\frac{d^2x}{db\,dc} + \frac{dy}{db}\frac{d^2y}{db\,dc} + \frac{dz}{db}\frac{d^2z}{db\,dc} \\[2ex]
\frac{dx}{dc}\frac{d^2x}{da\,dc} + \frac{dy}{dc}\frac{d^2y}{da\,dc} + \frac{dz}{dc}\frac{d^2z}{da\,dc} \\[2ex]
\frac{dx}{dc}\frac{d^2x}{db\,dc} + \frac{dy}{dc}\frac{d^2y}{db\,dc} + \frac{dz}{dc}\frac{d^2z}{db\,dc} \\[2ex]
\frac{dx}{dc}\frac{d^2x}{dc^2} + \frac{dy}{dc}\frac{d^2y}{dc^2} + \frac{dz}{dc}\frac{d^2z}{dc^2} \\[2ex]
\frac{dx}{db}\frac{d^2x}{da^2} + \frac{dy}{db}\frac{d^2y}{da^2} + \frac{dz}{db}\frac{d^2z}{da^2} \\[2ex]
\frac{dx}{da}\frac{d^2x}{db^2} + \frac{dy}{da}\frac{d^2y}{db^2} + \frac{dz}{da}\frac{d^2z}{db^2} \\[2ex]
\frac{dx}{da}\frac{d^2x}{db\,dc} + \frac{dy}{da}\frac{d^2y}{db\,dc} + \frac{dz}{da}\frac{d^2z}{db\,dc}
\end{array}$$

$$\frac{dx}{dc}\frac{d^2x}{da^2} + \frac{dy}{dc}\frac{d^2y}{da^2} + \frac{dz}{dc}\frac{d^2z}{da^2}$$

$$\frac{dx}{db}\frac{d^2x}{dadc} + \frac{dy}{db}\frac{d^2y}{dadc} + \frac{dz}{db}\frac{d^2z}{dadc}$$

$$\frac{dx}{da}\frac{d^2x}{dc^2} + \frac{dy}{da}\frac{d^2y}{dc^2} + \frac{dz}{da}\frac{d^2z}{dc^2}$$

$$\frac{dx}{dc}\frac{d^2x}{dadb} + \frac{dy}{dc}\frac{d^2y}{dadb} + \frac{dz}{dc}\frac{d^2z}{dadb}$$

$$\frac{dx}{dc}\frac{d^2x}{db^2} + \frac{dy}{dc}\frac{d^3y}{db^2} + \frac{dz}{dc}\frac{d^3z}{db^2}$$

$$\frac{dx}{db}\frac{d^2x}{dc^2} + \frac{dy}{db}\frac{d^2y}{dc^2} + \frac{dz}{db}\frac{d^2z}{dc^2}\;.$$

Vengono poi i trinomj fatti con sole derivate seconde, e sono in numero di 21., cioè i seguenti:

$$\left(\frac{d^2x}{da^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{da^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{da^2}\right)^2$$

$$\left(\frac{d^2x}{db^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{db^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{db^2}\right)^2$$

$$\left(\frac{d^2x}{dc^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dc^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dc^2}\right)^2$$

$$\left(\frac{d^2x}{dadb}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dadb}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dadb}\right)^2$$

$$\left(\frac{d^2x}{dadc}\right)^2 + \left(\frac{d^3y}{dadc}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dadc}\right)^2$$

$$\left(\frac{d^2x}{dbdc}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dbdc}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dbdc}\right)^2$$

$$\frac{d^2x}{da^2}\frac{d^2x}{db^2} + \frac{d^2y}{da^2}\frac{d^2y}{db^2} + \frac{d^2z}{da^2}\frac{d^2z}{db^2}$$

$$\frac{d^2x}{da^2}\frac{d^2x}{dc^2} + \frac{d^2y}{da^2}\frac{d^2y}{dc^2} + \frac{d^2z}{da^2}\frac{d^2z}{dc^2}$$

$$\frac{d^2x}{db^2}\frac{d^2x}{dc^2} + \frac{d^2y}{db^2}\frac{d^2y}{dc^3} + \frac{d^3z}{db^2}\frac{d^2z}{dc^2}$$

$$\frac{d^2x}{da^2}\frac{d^2x}{dadb} + \frac{d^2y}{da^2}\frac{d^2y}{dadb} + \frac{d^2z}{da^2}\frac{d^2z}{dadb}$$

(15) $$\frac{d^2x}{da^2}\frac{d^2x}{dadc} + \frac{d^2y}{da^2}\frac{d^2y}{dadc} + \frac{d^3z}{da^2}\frac{d^3z}{dadc}$$

$$\frac{d^2x}{da^2}\,\frac{d^2x}{db\,dc}+\frac{d^2y}{da^2}\,\frac{d^2y}{db\,dc}+\frac{d^2z}{da^2}\,\frac{d^2z}{db\,dc}$$

$$\frac{d^2x}{db^2}\,\frac{d^2x}{da\,db}+\frac{d^2y}{db^2}\,\frac{d^2y}{da\,db}+\frac{d^2z}{db^2}\,\frac{d^2z}{da\,db}$$

$$\frac{d^2x}{db^2}\,\frac{d^2x}{da\,dc}+\frac{d^2y}{db^2}\,\frac{d^2y}{da\,dc}+\frac{d^2z}{db^2}\,\frac{d^2z}{da\,dc}$$

$$\frac{d^2x}{db^2}\,\frac{d^2x}{db\,dc}+\frac{d^2y}{db^2}\,\frac{d^2y}{db\,dc}+\frac{d^2z}{db^2}\,\frac{d^2z}{db\,dc}$$

$$\frac{d^2x}{dc^2}\,\frac{d^2x}{da\,db}+\frac{d^2y}{dc^2}\,\frac{d^2y}{da\,db}+\frac{d^2z}{dc^2}\,\frac{d^2z}{da\,db}$$

$$\frac{d^2x}{dc^2}\,\frac{d^2x}{da\,dc}+\frac{d^2y}{dc^2}\,\frac{d^2y}{da\,dc}+\frac{d^2z}{dc^2}\,\frac{d^2z}{da\,dc}$$

$$\frac{d^2x}{dc^2}\,\frac{d^2x}{db\,dc}+\frac{d^2y}{dc^2}\,\frac{d^2y}{db\,dc}+\frac{d^2z}{dc^2}\,\frac{d^2z}{db\,dc}$$

$$\frac{d^2x}{da\,db}\,\frac{d^2x}{da\,dc}+\frac{d^2y}{da\,db}\,\frac{d^2y}{da\,dc}+\frac{d^2z}{da\,db}\,\frac{d^2z}{da\,dc}$$

$$\frac{d^2x}{da\,ab}\,\frac{d^2x}{db\,dc}+\frac{d^2y}{da\,db}\,\frac{d^2y}{db\,dc}+\frac{d^2z}{da\,db}\,\frac{d^2z}{db\,dc}$$

$$\frac{d^2x}{da\,dc}\,\frac{d^2x}{db\,dc}+\frac{d^2y}{da\,dc}\,\frac{d^2y}{db\,dc}+\frac{d^2z}{da\,dc}\,\frac{d^2z}{db\,dc}$$

I trinomj colle derivate di terz' ordine sono di tre sorte: ve ne hanno di quelli composti di derivate prime e terze, e se ne contano in numero di 30: di quelli fatti di derivate seconde e terze, e sono in numero di 60: e di quelli che non contengono se non derivate terze, e raggiungono il numero di 55. Non li scrivo, potendo facilmente ognuno che sia dotato della necessaria pazienza costruirseli da se, come pure quelli con derivate di ordine più elevato.

Adoperando poi l' equazione (13) per dedurne il valore della variata $\delta\rho^2$, è chiaro che la caratteristica δ dovrà applicarsi unicamente ai trinomj dei quali si è fin qui discorso, talchè si abbia

$$(16)\quad \begin{cases} \delta\rho^2 = f^2\,\delta t_1 + g^2\,\delta t_2 + k^2\,\delta t_3 + 2fg\,\delta t_4 + 2fk\,\delta t_5 + 2gk\,\delta t_6 \\ \qquad + f^3\,\delta T_1 + 2f^2 g\delta T_2 + 2f^2 k\delta T_3 + fg^2\,\delta T_4 + \text{ec.} \end{cases}$$

Infatti i coefficienti f^2, g^2, k^2, $2fg$, ec. riescono sempre i medesimi in qualunque ipotesi di composizione delle x, y, z per le a, b, c, e non possono quindi essere affetti da quella operazione che ha appunto unicamente di mira i cambiamenti di forma di tali funzioni. Viceversa, moltiplicando la precedente equazione (16) per Λ e poi integrando per f, g, k all'intento di dedurne il valore da darsi al quarto termine sotto l' integrale triplicato dell'equazione (12), una sì fatta operazione s'apprende soltanto alle quantità Λf^2, Λg^2, ec., le variate δt_1, δt_2, $\delta t_3 \ldots$ δT_1, δT_2, ec. non possono restarne intaccate, giacchè i trinomj t_1, t_2, $t_3 \ldots$ T_1, T_2, ec. (riflettasi alla loro origine) non contengono le variabili f, g, k: tali variate riescono fattori costanti pei quali vengono moltiplicati gl' integrali che si effettuano nei successivi termini della serie.

Dopo di ciò si fa palese la verità dell'equazione

$$(17) \qquad \int df \int dg \int dk \,.\, \Lambda \delta \rho^2 =$$
$$(1)\,\delta t_1 + (2)\,\delta t_2 + (3)\,\delta t_3 + (4)\,\delta t_4 + (5)\,\delta t_5 + (6)\,\delta t_6$$
$$+ (7)\,\delta T_1 + (8)\,\delta T_2 + (9)\,\delta T_3 + (10)\,\delta T_4 + \text{ec.}$$

dove i coefficienti (1), (2), ec. indicati per mezzo di numeri fra parentesi, debbono considerarsi altrettante funzioni delle a, b, c quali risulterebbero dagli integrali summentovati dopo eseguite e definite le integrazioni. Ecco qual sarebbe la quantità equivalente da introdursi nella equazione (12) al luogo del quarto termine sotto l' integrale triplicato.

74. Una proposizione nuova, a cui prego il lettore a porre molta attenzione, è che tutti i trinomj T_1, T_2, T_3, ec. all'infinito, che entrano nella precedente equazione (17), si possono esprimere per mezzo dei soli primi sei t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6, e delle loro derivate per a, b, c di tutti gli ordini. Io venni in sospetto di questa verità analitica a motivo della necessaria corrispondenza che ci dovea essere tra i risultamenti a cui conduce la via tracciata in questo Capo, e quelli ottenuti per la via che abbiamo seguita nei Capitoli III e IV. Ho poi verificata l' enunciata proprietà per 39 termini della precedente

serie (17), oltre i primi sei, cioè per tutti i trinomj scritti nelle riunioni (14), e (15), dopo di che mi sono abbandonato all'analogia: la qual cosa o presto o tardi è inevitabile, giacchè trattandosi di una serie infinita è impossibile percorrerla tutta. Ora dirò come ho fatto l'asserita verificazione, e l'importanza delle conclusioni scuserà le lungaggini nei calcoli, i quali, dalla prolissità in fuori, non presentano alcuna difficoltà.

Avendo sott' occhio i valori delle t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6 (equazioni (6) num°. 34.) si riconosce subito che i primi nove trinomj della riunione (14) hanno rispettivamente i valori:

$$\frac{1}{2}\frac{dt_1}{da}; \quad \frac{1}{2}\frac{dt_1}{db}; \quad \frac{1}{2}\frac{dt_1}{dc}$$

$$\frac{1}{2}\frac{dt_2}{da}; \quad \frac{1}{2}\frac{dt_2}{db}; \quad \frac{1}{2}\frac{dt_2}{dc}$$

$$\frac{1}{2}\frac{dt_3}{da}; \quad \frac{1}{2}\frac{dt_3}{db}; \quad \frac{1}{2}\frac{dt_3}{dc}.$$

Si trova in appresso (e può verificarsi colla sostituzione dei valori noti) che i trinomj decimo, undecimo, tredicesimo, quindicesimo, diciasettesimo, diciottesimo equivalgono rispettivamente ai seguenti binomj:

$$\frac{dt_4}{da} - \frac{1}{2}\frac{dt_1}{db}; \quad \frac{dt_4}{db} - \frac{1}{2}\frac{dt_2}{da}; \quad \frac{dt_5}{da} - \frac{1}{2}\frac{dt_1}{dc}$$

$$\frac{dt_5}{dc} - \frac{1}{2}\frac{dt_3}{da}; \quad \frac{dt_6}{db} - \frac{1}{2}\frac{dt_2}{dc}; \quad \frac{dt_6}{dc} - \frac{1}{2}\frac{dt_3}{db}.$$

E che i trinomj dodicesimo, quattordicesimo, sedicesimo hanno rispettivamente questi altri valori:

$$\frac{1}{2}\frac{dt_4}{dc} + \frac{1}{2}\frac{dt_5}{db} - \frac{1}{2}\frac{dt_6}{da}; \quad \frac{1}{2}\frac{dt_4}{dc} - \frac{1}{2}\frac{dt_5}{db} + \frac{1}{2}\frac{dt_6}{da}; \quad -\frac{1}{2}\frac{dt_4}{dc} + \frac{1}{2}\frac{dt_5}{db} + \frac{1}{2}\frac{dt_6}{da}.$$

Per tal modo l'asserita proposizione è provata relativamente ai primi 18 trinomj.

Ora immaginiamo formate 18 equazioni aventi nei primi membri i trinomj della riunione (14) presi uno per volta, e nei secondi i rispettivi valori ch'ora abbiamo dimostrato essere ad essi eguali. Di tali equazioni si comincino a considerare la

prima, la decima, e la tredicesima, si moltiplichino ordinatamente per l_1, m_1, n_1, indi si sommino: si moltiplichino da capo similmente per l_2, m_2, n_2, e si sommino: si moltiplichino nuovamente da capo per l_3, m_3, n_3, e si sommino: avendo sott' occhio le nove equazioni del num°. 14. segnate (28), giungeremo a trovare a parte i valori delle tre derivate di second' ordine $\frac{d^2x}{da^2}$, $\frac{d^2y}{da^2}$, $\frac{d^2z}{da^2}$. Collo stesso andamento scegliendo opportunamente fra le anzi descritte 18 equazioni, determineremo i valori delle altre derivate di second' ordine ed otterremo:

$$2H\frac{d^2x}{da^2} = l_1\frac{dt_1}{da} + m_1\left(2\frac{dt_4}{da} - \frac{dt_1}{db}\right) + n_1\left(2\frac{dt_5}{da} - \frac{dt_1}{dc}\right)$$

$$2H\frac{d^2y}{da^2} = l_2\frac{dt_1}{da} + m_2\left(2\frac{dt_4}{da} - \frac{dt_1}{db}\right) + n_2\left(2\frac{dt_5}{da} - \frac{dt_1}{dc}\right)$$

$$2H\frac{d^2z}{da^2} = l_3\frac{dt_1}{da} + m_3\left(2\frac{dt_4}{da} - \frac{dt_1}{db}\right) + n_3\left(2\frac{dt_5}{da} - \frac{dt_1}{dc}\right)$$

$$2H\frac{d^2x}{db^2} = l_1\left(2\frac{dt_4}{db} - \frac{dt_2}{da}\right) + m_1\frac{dt_2}{db} + n_1\left(2\frac{dt_6}{db} - \frac{dt_2}{dc}\right)$$

$$2H\frac{d^2y}{db^2} = l_2\left(2\frac{dt_4}{db} - \frac{dt_2}{da}\right) + m_2\frac{dt_2}{db} + n_2\left(2\frac{dt_6}{db} - \frac{dt_2}{dc}\right)$$

$$2H\frac{d^2z}{db^2} = l_3\left(2\frac{dt_4}{db} - \frac{dt_2}{da}\right) + m_3\frac{dt_2}{db} + n_3\left(2\frac{dt_6}{db} - \frac{dt_2}{dc}\right)$$

$$2H\frac{d^2x}{dc^2} = l_1\left(2\frac{dt_5}{dc} - \frac{dt_3}{da}\right) + m_1\left(2\frac{dt_6}{dc} - \frac{dt_3}{db}\right) + n_1\frac{dt_3}{dc}$$

$$2H\frac{d^2y}{dc^2} = l_2\left(2\frac{dt_5}{dc} - \frac{dt_3}{da}\right) + m_2\left(2\frac{dt_6}{dc} - \frac{dt_3}{db}\right) + n_2\frac{dt_3}{dc}$$

$$2H\frac{d^2z}{dc^2} = l_3\left(2\frac{dt_5}{dc} - \frac{dt_3}{da}\right) + m_3\left(2\frac{dt_6}{dc} - \frac{dt_3}{db}\right) + n_3\frac{dt_3}{dc}$$

$$2H\frac{d^2x}{da\,db} = l_1\frac{dt_1}{db} + m_1\frac{dt_2}{da} + n_1\left(\frac{dt_5}{db} + \frac{dt_6}{da} - \frac{dt_4}{dc}\right)$$

$$2H\frac{d^2y}{da\,db} = l_2\frac{dt_1}{db} + m_2\frac{dt_2}{da} + n_2\left(\frac{dt_5}{db} + \frac{dt_6}{da} - \frac{dt_4}{dc}\right)$$

$$2H\frac{d^2z}{da\,db} = l_3\frac{dt_1}{db} + m_3\frac{dt_2}{da} + n_3\left(\frac{dt_5}{db} + \frac{dt_6}{da} - \frac{dt_4}{dc}\right)$$

$$2H\frac{d^2x}{da\,dc} = l_1\frac{dt_1}{dc} + m_1\left(\frac{dt_4}{dc} + \frac{dt_6}{da} - \frac{dt_5}{db}\right) + n_1\frac{dt_3}{da}$$

$$2H\,\frac{d^2y}{da\,dc} = l_2\,\frac{dt_1}{dc} + m_2\left(\frac{dt_4}{dc} + \frac{dt_6}{da} - \frac{dt_5}{db}\right) + n_2\,\frac{dt_3}{da}$$

$$2H\,\frac{d^2z}{da\,dc} = l_3\,\frac{dt_1}{dc} + m_3\left(\frac{dt_4}{dc} + \frac{dt_6}{da} - \frac{dt_5}{db}\right) + n_3\,\frac{dt_3}{da}$$

$$2H\,\frac{d^2x}{db\,dc} = l_1\left(\frac{dt_4}{dc} + \frac{dt_5}{db} - \frac{dt_6}{da}\right) + m_1\,\frac{dt_2}{dc} + n_1\,\frac{dt_3}{db}$$

$$2H\,\frac{d^2y}{db\,dc} = l_2\left(\frac{dt_4}{dc} + \frac{dt_5}{db} - \frac{dt_6}{da}\right) + m_2\,\frac{dt_2}{dc} + n_2\,\frac{dt_3}{db}$$

$$2H\,\frac{d^2z}{db\,dc} = l_3\left(\frac{dt_4}{dc} + \frac{dt_5}{db} - \frac{dt_6}{da}\right) + m_3\,\frac{dt_2}{dc} + n_3\,\frac{dt_3}{db}\,.$$

Presentemente col mezzo di questi valori cerchiamo quelli dei trinomj della riunione (15). Richiamando le equazioni (31), (33), (34) del num°. 67. vedremo che tali valori risultano unicamente fatti delle t_1, $t_2 \ldots t_6$ e delle loro derivate prime, che è appunto ciò che volevamo provare. Per esempio il valore del primo trinomio

$$\left(\frac{d^2x}{da^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{da^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{da^2}\right)^2$$

ci viene eguale ad una frazione il cui numeratore è

$$\left(t_2t_3-t^2_6\right)\left(\frac{dt_1}{da}\right)^2+\left(t_1t_3-t^2_5\right)\left(2\,\frac{dt_4}{da}-\frac{dt_1}{db}\right)^2+\left(t_1t_2-t^2_4\right)\left(2\,\frac{dt_5}{da}-\frac{dt_1}{dc}\right)^2$$

$$+\,2\left(t_5t_6-t_3t_4\right)\frac{dt_1}{da}\left(2\,\frac{dt_4}{da}-\frac{dt_1}{db}\right)+2\left(t_4t_6-t_2t_5\right)\frac{dt_1}{da}\left(2\,\frac{dt_5}{da}-\frac{dt_1}{dc}\right)$$

$$+\,2\left(t_4t_5-t_1t_6\right)\left(2\,\frac{dt_4}{da}-\frac{dt_1}{db}\right)\left(2\,\frac{dt_5}{da}-\frac{dt_1}{dc}\right)$$

e il denominatore la quantità

$$4\left(t_1t_2t_3+2\,t_4t_5t_6-t_1t^2_6-t_2t^2_5-t_3t^2_4\right).$$

Formati a un di presso allo stesso modo si trovano i valori degli altri venti trinomj della riunione (15): non si è dunque esagerato dicendo essere 39. i trinomj sui quali la proprietà analitica è stata in atto verificata.

75. Ammessa la proposizione del num°. precedente si rende manifesto che l'equazione (17) può prendere quest'altra forma

$$(18) \qquad \int df \int dg \int dk \,.\, \Lambda\delta\rho^2 =$$

$$(\alpha)\,\delta t_1 + (\beta)\,\delta t_2 + (\gamma)\,\delta t_3 + \ldots\ldots + (\varepsilon)\,\frac{\delta dt_1}{da} + (\zeta)\,\frac{\delta dt_1}{db} + (\eta)\,\frac{\delta dt_1}{dc}$$

$$+ (\vartheta)\,\frac{\delta dt_2}{da} + \ldots + (\lambda)\,\frac{\delta d^2 t_1}{da^2} + (\mu)\,\frac{\delta d^2 t_1}{da\,db} + \ldots + (\xi)\,\frac{\delta d^2 t_2}{da^2} + (o)\,\frac{\delta d^2 t_2}{da\,db} + \text{ec.}$$

nella quale i coefficienti (α), (β) .... (ε) .... (λ) .... ec. sono quantità fatte dei coefficienti (1), (2).... (7), (8).... della equazione (17), dei sei trinomj t_1, t_2 .... t_6, e delle derivate di questi trinomj per a, b, c dei diversi ordini. Le variate poi δt_1, δt_2 .... e le variate delle loro derivate di tutti gli ordini $\frac{\delta dt_1}{da}$, $\frac{\delta dt_1}{db}$, ec. non entrano nella (18) se non linearmente all'infinito. Ora è un principio fondamentale nel calcolo delle variazioni (e ne abbiamo fatto uso anche in questa Memoria al num°. 36. e altrove) che una serie come la precedente ove sono lineari le variate di alcune quantità e le variate delle loro derivate per variabili semplici a, b, c, può sempre trasformarsi in una espressione che contenga quelle quantità non affette da alcun segno di derivazione, coll'aggiunta di altri termini i quali sono derivate esatte relativamente all'una o all'altra o alla terza delle variabili semplici. In conseguenza di tal principio all'equazione (18) può darsi l'espressione che segue

$$(19) \qquad \int df \int dg \int dk \,.\, \Lambda\delta\rho^2 =$$

$$\text{A}\delta t_1 + \text{B}\delta t_2 + \text{C}\delta t_3 + \text{D}\delta t_4 + \text{E}\delta t_5 + \text{F}\delta t_6$$

$$+ \frac{d\Delta}{da} + \frac{d\Theta}{db} + \frac{d\Upsilon}{dc}\,.$$

I valori dei sei coefficienti A, B, C, D, E, F sono serie fatte coi coefficienti (α), (β), (γ) .... (ε), (ζ) .... (λ), ec. dell'equazione (18) che vi entrano linearmente a segni alternati, e affetti da derivazioni di ordine sempre più elevato più che c'inoltriamo nei termini di esse serie: le quantità Δ, Θ, Υ sono serie della stessa forma della proposta a trasformarsi, nella quale i coefficienti delle variate hanno una composizione

simile a quella che abbiamo descritta pei sei coefficienti A, B, C, D, E, F.

Introdotta la quantità che forma il secondo membro della equazione (19) invece di quella del primo sotto l' integrale triplicato della equazione (12), si fa a tutti aperto che sugli ultimi tre termini di essa può eseguirsi alcuna delle integrazioni, e che per conseguenza tali termini non fanno che somministrare quantità le quali passano ai limiti. Ciò che rimane sotto l' integrale triplicato è il solo sestinomio in tutto simile a quello già usato nell'equazione (10) num°. 35. pei sistemi rigidi. Pertanto dopo un tal punto di confronto sarà pure perfettamente eguale l' andamento analitico da tenersi in questo luogo a quello tenuto colà fino al ritrovamento delle equazioni (26), (29) del num°. 38., e verrà dimostrata l' estensione delle dette equazioni ad ogni sorta di corpi non rigidi, siccome si è accennato sul finire del num°. 38. Sarà anche visibile la coincidenza dei risultamenti cogli espressi nelle equazioni (23) del num°. 50. sussistenti per qualunque sorta di sistemi, e dimostrate nel Capo IV. mercè quelle coordinate intermedie p, q, r, la di cui considerazione, attenendoci alla maniera esposta in questo Capo, non fa più bisogno.

76. L' analisi precedente apre l' adito a molte utili riflessioni. Primieramente farò parola di quelle che valgono a pienamente dissipare le dubbiezze cui ci siamo provati a rispondere al num°. 63., rimettendoci per maggiore spiegazione a quanto avremmo poi detto in questo luogo. Partendo dallo stato di antecedente disposizione ideale delle molecole colle coordinate a, b, c, e venendo a quello della disposizione reale, intendasi questo secondo espresso relativamente a due diverse terne di assi ortogonali, delle p, q, r, e delle x, y, z. Per l' espressione dello stato reale mediante le p, q, r non abbiamo a far altro che copiare l'analisi precedente scrivendo dappertutto p, q, r dove sono scritte le x, y, z. Ora volendo passare dalle coordinate p, q, r alle x, y, z, osserveremo che pel caso del fluido, siccome si è detto al num°. 72., la forza interna K, ovvero A

è funzione unicamente della distanza molecolare ρ; e se ben si considera la fattura dei coefficienti (1), (2), (3) . . . . . dell' equazione (17), quella dei coefficienti (α), (β), (γ) . . . . . dell' equazione (18), e in fine quella dei sei coefficienti A, B, C, D, E, F dell' equazione (19), verremo facilmente a persuaderci che quest' ultime sei quantità, nel primo riferimento agli assi delle p, q, r, non contengono tali p, q, r se non in quanto sono contenute nel radicale ρ (equazione (8)), e nei sei trinomj t_1, $t_2, \ldots. t_6$, avendo scritto dappertutto p, q, r in luogo di x, y, z. Pertanto le sei quantità A, B, C, D, E, F godranno della proprietà analitica già tanto discussa, del cangiarsi mediante la sostituzione dei valori (31) num°. 40. in quantità egualmente fatte colle x, y, z, sparita ogni traccia delle nove quantità angolari α_1, β_1, γ_1, α_2, ec., quando sì fatta proprietà si verifichi nel radicale ρ, e in ciascuno de' sei trinomj t_1, $t_2 \ldots . t_6$. Ora qui non si ha a far altro che eseguir le operazioni, e resteremo convinti che la cosa è appunto come si è detto, rammentate le equazioni fra le quantità angolari registrate al num°. 33. Ecco uno dei risultamenti in vista dei quali dicemmo in prevenzione al cominciare del presente Capo, che le due maniere per mettere a calcolo i vincoli interni fra le molecole si illustravano a vicenda.

Viceversa, l'andamento tenuto nel Capo IV. rende possibile la trattazione delle quantità ai limiti che col metodo attuale riuscirebbe intralciatissima. Vedemmo colà (num°. 52.) come la quantità ai limiti è fatta delle stesse sei quantità, esprimenti l'effetto delle forze interne, che entrano nelle tre equazioni estensibili a tutta la massa: qui invece verrebbe complicata per l' intervento di quelle altre quantità Δ, Θ, Υ che compajono negli ultimi termini dell' equazione (19). Convien dire che tutta la parte introdotta da tali termini nelle quantità ai limiti, v' interviene solo apparentemente: nè questo fatto analitico è senza un riscontro nel calcolo delle variazioni. Nelle questioni del calcolo delle variazioni riferibili a formole integrali definite triplicate, se avendo un' equazione di condizione $L = 0$, se ne prendono le equazioni derivate

$$\frac{dL}{da} = 0, \; \frac{dL}{db} = 0, \; \frac{dL}{dc} = 0; \quad \frac{d^2L}{da^2} = 0, \text{ ec.}$$

di qualunque ordine, e si trattano come fossero tante nuove equazioni di condizione, moltiplicandone le variate per coefficienti indeterminati, introducendo i prodotti nell' equazione del massimo o del minimo sotto il segno integrale, e praticandovi le solite trasformazioni, si viene ad aggiungere (alla quantità che vi sarebbe stata se non avessimo fatto il di più che si è detto) una quantità della stessa natura del trinomio che termina l'equazione (19). In tal caso si capisce che la comparsa di nuove quantità ai limiti non può essere che apparente; giacchè le equazioni derivate anzidette non hanno significato che non fosse già espresso dalla sola $L = 0$.

Però l'annullarsi di quella quantità ai limiti, non essendo qui un risultato di equazioni di condizione adoperate più che non sia d'uopo, ma una necessaria conseguenza del confronto dei due metodi, potrebbe essere un mezzo che ci mettesse sulla traccia di nuove verità, ci conducesse, per esempio, a investigazioni più intime sulla natura dell' azione molecolare. Mi limito a un semplice cenno: ma a proposito dell' azione molecolare non posso tralasciare di notar cosa che parmi di non lieve momento. Il lettore si sarà accorto che nell' analisi precedente per venire alle conclusioni più importanti, cioè alle equazioni che sussistono per tutti i punti della massa, non fanno più bisogno le ipotesi ammesse dai Geometri moderni, e da me stesso nel §. V. della Memoria inserita nel Tomo XXI di questi Atti. Si è detto che l' azione molecolare deve essere sensibile per distanze insensibili, e insensibile per distanze sensibili: ciò sarà forse vero, ma sia quel ch' esser si voglia, si può prescindere, per l' oggetto nostro, da tale supposizione: gli integrali per le variabili f, g, k nelle equazioni (17), (18), (19) possono considerarsi estesi fino ai limiti del corpo, e non solamente per tratti piccolissimi, il che non è senza un certo sforzo.

Terminerò il capitolo immaginandomi un' obbjezione. Taluno potrebbe dirmi; avete qui calcolate le azioni interne fra

molecola e molecola, e sta bene: ma perchè non avete fatto lo stesso anche nel Capo IV. dove lasciaste fuori tutta la seconda parte dell' equazione generale (1) num°. 16? quella ommissione può toglier fede alle deduzioni ottenute con que' procedimenti analitici. Rispondo: non ho allora tenuto conto delle azioni interne fra molecola e molecola, perchè vi suppliva la considerazione delle sei equazioni di condizione ivi trattate: il farlo sarebbe stato un doppio. Anche mentre si effettua il moto de' corpi rigidi hanno certamente luogo azioni fra molecole e molecole, eppure ognuno che conosca lo spirito della Meccanica analitica, si sarà persuaso che tutte vennero contemplate nelle sei equazioni (8) del num°. 34. estensibili a tutti i punti: anzi se potea nascergli dubbio, era che si fosse fatto di troppo collo stabilire tali equazioni in numero di sei, di modo che ci furono necessarie le considerazioni poste al numero 39.

Lo stesso deve dirsi nel caso generale delle equazioni di condizione (14) del num°. 47., anch' esse sussistenti per tutti i punti della massa: il contemplarle e calcolarle equivaleva al valutare tutte le forze interne, quantunque non sia perspicuo come questo avvenga. Ad alcuni può sotto alcuni riguardi parere più convincente il metodo tenuto in questo Capo, perchè ci permette il farci qualche immagine intorno al modo d'agire delle forze molecolari: eppure io reputo che i meglio pensanti daranno la preferenza al metodo del Capo IV., metodo diretto e più potente, perchè appoggiato a quel principio geometrico della posizione arbitraria degli assi rimpetto al sistema, che ci servirà anche nel Capo seguente, e che contiene la ragione di tante verità meccaniche. Vedo altresì possibile seguendo il filo de' ragionamenti esposti nel Capo IV. spiegare il vero senso di quel altro principio lagrangiano, che al cominciare dello stesso Capo chiamammo troppo astratto, fissarne l' estensione e il modo sicuro di usarne. Una tale spiegazione però non sarebbe forse di molta utilità, il che asserisco perchè parmi che tutti i vantaggi ai quali mirava Lagrange col mettere quel principio, si ottengano più direttamente e naturalmente tenendo l'andamento descritto nel medesimo Capo IV.

CAPO VII.

Del moto e dell' equilibrio di un corpo qualunque, ridotto ad essere un sistema lineare o superficiale.

Fu rimproverato in particolar modo ai metodi della M. A. di Lagrange di essere insufficienti per varie questioni che riguardano curve o superficie elastiche. Entro io quindi a trattare del moto e dell'equilibrio de' sistemi lineari e superficiali, toccandone almeno le generalità, con tanto più di gusto in quanto farò vedere che lungi dal venir meno que' metodi nel presente caso, spiegano essi qui forse meglio che altrove tutta la loro ampiezza e magnificenza. Sia pure che le soluzioni date nella M. A. di alcuni di sì fatti problemi non riescano abbastanza generali per comprenderne altri contemplati di poi: ripeterò quel che dissi altrove: Lagrange non potea far tutto; egli per altro ci diede in mano metodi che, a saperli ben intendere ed applicare, valgono in questioni di questo genere per rispondere alle già fatte domande, e per prevenir le future. Anzi non solo è possibile con tali metodi affrontare nel caso presente qualunque ricerca, ma lo è in due diverse maniere, in corrispondenza con quanto sponemmo pei sistemi a tre dimensioni nei Capi IV. e VI. Delle due maniere mi atterrò io qui alla prima, a quella cioè che riduce ad equazioni di condizione l' espressione dei vincoli interni fra le molecole: e per l'altra mi limiterò ad assicurare il lettore di averla seguita fino ad un certo punto, e di aver trovato una perfetta corrispondenza nei risultamenti. Se di questa qui non riporto l' analisi, ciò faccio per due ragioni: la prima per non passare ogni segno di discrezione in servirmi dello spazio concessomi nel volume sociale: la seconda perchè, dopo aver visto l' andamento tenuto nel Capo precedente, lo studioso potrà non difficilmente fabbricarsi da se una tale analisi, la quale riesce meno complicata della riferita nel luogo citato.

77. Dissi di avere scelto per trattare le presenti questioni quella maniera che riduce tutto al maneggio di equazioni di condizione come nel Capo IV. Ragione della preferenza fu il procurarmi due nuove occasioni per mettere in evidenza la fecondità di quel principio di cui già vedemmo varie applicazioni, e che consiste nello scrivere analiticamente l'arbitrio in cui siamo relativamente alla collocazione degli assi a cui riferire il sistema. Esso ci condusse nel Capo IV. alle equazioni generali: da esso (come accennammo al num°. 60.) dipende la vera spiegazione del principio delle velocità virtuali, e di quelli della conservazione del moto del centro di gravità, e delle aree: per esso (come si è notato sul fine del num°. 66.) si potrebbe adattare l'analisi data da Lagrange (il che adesso non fa più bisogno) anche al moto de' fluidi elastici; ora il medesimo ci fornirà le equazioni di condizione che si verificano per ogni punto nei sistemi lineari e superficiali.

È cosa degna di molta considerazione quel verificarsi delle equazioni (14) num°. 47. per ogni sistema a tre dimensioni costante o mutabile, in equilibrio o in moto: notammo come esse vengano dall'aver collocato tre assi ortogonali rimpetto a tre altri, facendo sparire le quantità angolari dalle equazioni che ne esprimono le relazioni, e riducendole ad equazioni fra derivate parziali che per la loro generalità equivalgono esse sole a tutte le equazioni finite senza numero che si otterrebbero variando i valori di quelle quantità angolari. Ebbene: lo stesso può farsi anche pei sistemi lineari e superficiali: si possono trovare a riscontro delle equazioni (14) num°. 47. equazioni cui debbano sempre soddisfare le derivate delle variabili esprimenti le coordinate di qualunque curva o superficie, mobile, flessibile, contrattile, ec.: e ciò unicamente in virtù dell'arbitrio nella collocazione degli assi rimpetto al sistema, arbitrio cui si dà per tal modo un' espressione analitica. Tali equazioni sono le equazioni di condizione le quali, quando le curve o superficie si considerano fatte di molecole, esprimono i vincoli interni fra queste, e danno presa ai metodi della Meccanica analitica: interessa trovarle.

78. Sia una curva qualunque riferita a tre assi ortogonali delle p, q, r per mezzo di due equazioni

$$(1) \qquad q = \varphi(p); \quad r = \psi(p).$$

Nel caso di curve fatte di molecole conviene, come si è detto nel Capo I. num°. 11. riguardare le p, q, r siccome funzioni di una variabile semplice a relativa allo stato precedente, ed anche del tempo t

$$(2) \qquad p = p(a, t); \quad q = q(a, t); \quad r = r(a, t);$$

allora le equazioni (1) vogliono essere intese come le due che risultano dall'eliminazione della a fra queste tre, talchè quelle (1) possono contenere anche il t esplicito alla p, e confuso colle costanti.

Riferiamo ora la stessa curva ad altri tre assi delle x, y, z comunque posti rimpetto ai primi: avremo fra le une e le altre coordinate le equazioni (1) del num°. 33., che qui giova replicare

$$(3) \qquad \begin{aligned} x &= f + \alpha_1 p + \beta_1 q + \gamma_1 r \\ y &= g + \alpha_2 p + \beta_2 q + \gamma_2 r \\ z &= h + \alpha_3 p + \beta_3 q + \gamma_3 r. \end{aligned}$$

Le dodici quantità f, g, h, α_1, ec. restano costanti passando da uno ad altro punto del sistema, cosicchè anche le x, y, z si potranno considerare direttamente funzioni dell'unica variabile semplice p. Deriviamo pertanto le riferite equazioni per la p, e indicando tali derivate con apici, avremo

$$(4) \qquad \begin{aligned} &x' = \alpha_1 + \beta_1 q' + \gamma_1 r'; \quad y' = \alpha_2 + \beta_2 q' + \gamma_2 r'; \quad z' = \alpha_3 + \beta_3 q' + \gamma_3 r' \\ &x'' = \beta_1 q'' + \gamma_1 r''; \quad y'' = \beta_2 q'' + \gamma_2 r''; \quad z'' = \beta_3 q'' + \gamma_3 r'' \\ &x''' = \beta_1 q''' + \gamma_1 r'''; \quad y''' = \beta_2 q''' + \gamma_2 r'''; \quad z''' = \beta_3 q''' + \gamma_3 r''' \\ &x^{\text{IV}} = \beta_1 q^{\text{IV}} + \gamma_1 r^{\text{IV}}; \quad y^{\text{IV}} = \beta_2 q^{\text{IV}} + \gamma_2 r^{\text{IV}}; \quad z^{\text{IV}} = \beta_3 q^{\text{IV}} + \gamma_3 r^{\text{IV}} \\ &\text{ec.} \qquad\qquad \text{ec.} \qquad\qquad \text{ec.} \end{aligned}$$

Poniamo altresì per comodo le seguenti denominazioni

$$(5)\qquad \begin{aligned} &k = x'^2 + y'^2 + z'^2\,; \quad l = x''^2 + y''^2 + z''^2 \\ &m = x'''^2 + y'''^2 + z'''^2\,; \quad n = x^{\text{IV}\,2} + y^{\text{IV}\,2} + z^{\text{IV}\,2}\,;\ \text{ec.} \end{aligned}$$

Quadrando tutte le equazioni (4) e sommandole a tre a tre come stanno nelle linee orizzontali, troveremo (rammentate le equazioni del num°. 33. fra le quantità angolari, e le precedenti denominazioni (5))

$$(6)\qquad \begin{aligned} &k = 1 + q'^2 + r'^2\,; \quad l = q''^2 + r''^2 \\ &m = q'''^2 + r'''^2\,; \quad n = q^{\text{IV}\,2} + r^{\text{IV}\,2}\,;\ \text{ec.} \end{aligned}$$

Si vede manifestamente il procedere di tali equazioni. Queste non contengono più le quantità angolari, ma però ci presentano ancora le derivate delle q, r relativamente alla p, mentre si vorrebbero equazioni fra le sole derivate delle x, y, z per la p. A conseguire l' intento bisogna combinare le (6) colle loro derivate per rapporto a p che sono

$$(7)\qquad k' = 2q'q'' + 2r'r''\,;\ l' = 2q''q''' + 2r''r'''\,;\ m' = 2q'''q^{\text{IV}} + 2r'''r^{\text{IV}}\,;\ \text{ec.}$$

$$(8)\qquad k'' - 2l = 2q'q''' + 2r'r'''\,; \quad l'' - 2m = 2q''q^{\text{IV}} + 2r''r^{\text{IV}}\,;\ \text{ec.}$$

$$(9)\qquad k''' - 3l' = 2q'q^{\text{IV}} + 2r'r^{\text{IV}}\,;\ \text{ec.}$$

È manifesto che il numero delle derivate che vogliamo eliminare cresce assai meno che non cresca il numero delle equazioni. Così, fermandoci alle derivate terze, abbiamo dalle (6) tre equazioni, cui vanno aggiunte tre altre, cioè le prime due delle (7), e la prima delle (8). Passando alle derivate quarte, si aggiunge una equazione a ciascuno dei gruppi (6), (7), (8), (9) e s' introducono due sole nuove quantità da eliminarsi q^{IV}, r^{IV}. Colle sole equazioni scritte superiormente in numero di dieci è chiaro che potremo eliminare le otto quantità q', r'; q'', r''; q''', r'''; q^{IV}, r^{IV}, ed ottenere due equazioni di quelle che desideriamo, fra le k, l, m, n e loro derivate, ossia (equazioni (5)) fra le sole derivate delle x, y, z relativamente a p. Anzi se ne

può ottenere una non oltrepassando le equazioni che contengono le derivate terze q''', r''': ecco in qual maniera. Si prendano la seconda delle (7) e la prima delle (8) e se ne cavino i valori delle q''', r''': troveremo

$$q''' = \frac{r''(k''-2l) - r'l'}{2(q'r''-q''r')}\,; \quad r''' = \frac{q'l' - q''(k''-2l)}{2(q'r''-q''r')}\,.$$

Quadriamo queste due equazioni e sommiamole: richiamando le equazioni (6), e la prima delle (7) per le opportune sostituzioni, otterremo

$$4m(q'r''-q''r')^2 = l(k''-2l)^2 - k'l'(k''-2l) + (k-1)l'^2.$$

Ora sommiamo questa colla seguente

$$4m(q'q''+r'r'')^2 = mk'^2$$

che è la prima delle (7) quadrata e moltiplicata per m; osservando essere

$$(q'r''-q''r')^2 + (q'q''+r'r'')^2 = (q'^2+r'^2)(q''^2+r''^2)$$

giungiamo all'equazione desiderata che è

$$(10) \qquad 4m(k-1)l = l(k''-2l)^2 - k'l'(k''-2l) + (k-1)l'^2 + mk'^2.$$

Qui si può, sostituiti i valori (5), cercar di dare all'equazione una forma elegante, la quale però non gioverebbe al nostro fine, come apparirà dal progresso.

Ecco una equazione fra le sole derivate delle x, y, z, la quale (cosa notabile) si verifica per qualunque curva, e ne vedemmo più sopra la ragione. Il più è, che di tali equazioni se ne possono trovare altre simili quante se ne vogliono seguendo l'indicato processo di eliminazione. La prima di quelle che risultano dalla eliminazione delle q^{IV}, r^{IV} è

$$(11) \qquad 4n(k-1)l = l(k'''-3l')^2 + (k-1)(l''-2m)^2 - k'(k'''-3l')(l''-2m) + k'^2 n.$$

Non mi fermo a descrivere l'operazione, e nemmeno a dare le equazioni che seguono, perchè, come fra poco si farà chiaro,

a noi non importa molto il conoscere l'attualità di tali equazioni, ci basta sapere la loro esistenza. Sono poi di parere, visto quello che ha detto Lagrange per le curve rigide (M. A. Tom. I. pag. 161.), che dopo un certo numero tali equazioni non saranno più che una combinazione delle precedenti, il che non è necessario chiarire. Sì fatte equazioni (10), (11) e seguenti stanno a riscontro delle (14) num°. 47. pei sistemi a tre dimensioni.

79. Presentemente si richiami il già detto al num° 28. pei sistemi lineari, e si capirà che, analogamente alla equazione (1) num°. 44., potremo esprimere per

$$(12) \qquad \int da \,.\, \left\{ \left(X - \frac{d^2x}{dt^2} \right) \delta x + \text{ec.} \right\} + \int da \,.\, G + \Omega = 0$$

l'equazione generale meccanica in relazione con tali sistemi, intendendo significato dall' integrale $\int da \,.\, G$ il complesso dei termini portati dalle equazioni di condizione a noi incognite nelle quali fossero espressi i vincoli esistenti fra le molecole. Conviene nella equazione precedente trasformare gl' integrali in modo che siano presi per la p di cui le x, y, z si considerano funzioni prima che per la a.

Dalla equazione (14) num°. 11. per la quale ottenemmo l'espressione della densità in tali sistemi, caviamo

$$(13) \qquad \Gamma \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2} \,.\, \frac{dx}{da} = 1 \,.$$

Riflettiamo essere $\frac{dx}{da} = \frac{dx}{dp}\frac{dp}{da}$, e ponendo per abbreviare

$$(14) \qquad V = \Gamma \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2} \,.\, \frac{dx}{dp}$$

la precedente equazione si cambierà nella

$$(15) \qquad \frac{dp}{da} V = 1 \,.$$

Ora se sotto i due integrali dell'equazione (12) introduciamo il fattore $\frac{dp}{da} V$, non produciamo alterazione, essendo tal fattore, come provammo, eguale all' unità. Allora quegli integrali ci appajono subito trasformabili in altri per p, e passiamo ad avere l'equazione generale espressa come segue

$$(16)\qquad \int dp\,.\,\mathrm{V}\left\{\left(\mathrm{X}-\frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x+\text{ec.}\right\}+\int dp\,.\,\mathrm{VG}+\Omega=0\,;$$

dove debbono intendersi tutte le quantità ridotte funzioni di p, soppressa per ora la considerazione dell' ulteriore composizione della p in a. Avendo l'equazione generale sotto l'esposta forma, il secondo termine di essa, che ci era incognito perchè non conoscevamo le equazioni di condizione espresse fra le x, y, z e la a, adesso ci diventa noto, sapendo dal numero precedente (equazioni (10), (11), ec.) quali sono le equazioni di condizione espresse fra le x, y, z e la p. Non abbiamo pertanto a far altro che sostituire sotto il detto secondo segno integrale i primi membri delle variate delle equazioni (10), (11), ec. ridotte a zero, moltiplicati per coefficienti indeterminati: studiamo tali quantità. Se poniamo mente a quella introdotta dalla prima equazione (10), essa è della forma

$$(17)\qquad (1)\,\delta k+(2)\,\delta k'+(3)\,\delta k''+(4)\,\delta l+(5)\,\delta l'+(6)\,\delta m\,,$$

cioè lineare per rapporto alle variate δk, $\delta k'$, $\delta k''$, δl, ec.; dicasi lo stesso delle quantità introdotte dalle variate della equazione (11) e seguenti. La somma di tali quantità, per quante si prendano equazioni di condizione, è ancora una quantità della stessa forma (17), accrescendovi le variate delle derivate, cioè aggiungendovi termini contenenti linearmente le $\delta k'''$, δk^{IV}, ... $\delta l''$, ec. Ecco poi un' osservazione che abbrevia le operazioni. In così fatta somma si possono ommettere tutti i termini contenenti le variate delle derivate k', k'', k''' ... l', l'', ... m', ec.: e di vero tali termini, come i seguenti dell' espressione (17), $(2)\,\delta k'$, $(3)\,\delta k''$, $(5)\,\delta l'$, attese le note trasformazioni per le quali diventano

$$(18)\qquad \begin{aligned} (2)\,\delta k' &= -(2)'\,\delta k+[(2)\,\delta k]'\\ (3)\,\delta k'' &= (3)''\,\delta k-[(3)'\,\delta k-(3)\,\delta k']'\\ (5)\,\delta l' &= -(5)'\,\delta l+[(5)\,\delta l]'\,;\quad \text{ec.}\end{aligned}$$

si provano equivalenti a binomj dove primamente ricompajono le variate δk, δl, ec. non affette da derivazioni e già esistenti

in altri termini della quantità (17), coi quali si compenetrano questi nuovi: ciò che resta forma complessivamente una quantità derivata esatta relativamente alla p, che introdotta sotto il secondo segno integrale dell'equazione (16), passa ai limiti e si fonde coll'ultimo termine Ω di quella equazione. Così si fa palese che termini come i precedenti (18) non vengono ad influire sulle equazioni estensibili a tutti i punti del sistema. L'osservazione si troverà molto simile a quella per la quale nel Capo precedente num°. 75. concludemmo la non influenza degli ultimi termini dell'equazione (19) pel ritrovamento delle tre equazioni che coincidevano colle (26) del num°. 38.

Dopo gli addotti ragionamenti è piano l'inferirne che alla equazione generale (16) pei sistemi lineari può darsi la forma

$$(19)\quad \begin{aligned} &\int dp \,.\, V \left\{ \left(X - \frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x + \left(Y - \frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y + \left(Z - \frac{d^2z}{dt^2}\right)\delta z \right\} \\ &+ \int dp \,.\, (\lambda\delta k + \mu\delta l + \nu\delta m + \rho\delta n + \text{ec.}) + \Omega = 0\,; \end{aligned}$$

dove sotto il secondo segno integrale appariscono le variate delle sole quantità k, l, m, n, ec. equivalenti, per le equazioni (5), a trinomj noti che possono continuarsi a piacere. Tali variate sono moltiplicate per fattori $\lambda, \mu, \nu, \rho \ldots$ che riterremo fra di loro indipendenti, essendo coefficienti raccolti da tante equazioni variate, ciascuna delle quali porta un moltiplicatore indeterminato. Veramente se il numero dei trinomj k, l, m, n, ec. fosse maggiore di quello delle equazioni (10), (11), ec., essendo le indeterminate introdotte dal metodo de' moltiplicatori tante quante le equazioni, alcuno dei coefficienti $\lambda, \mu, \nu, \rho \ldots$ dipenderebbe dagli altri; potranno essi però dirsi fra loro indipendenti fino al numero che eguaglia quello delle equazioni irreducibili le une alle altre.

80. Rimane a sostituire nell'equazione (19) alle quantità k, l, m, n, ec. i loro valori scritti nelle equazioni (5). Qui conviene primieramente porre attenzione all'equazione

$$(20)\quad \begin{aligned} &\lambda\delta k + \mu\delta l + \nu\delta m + \rho\delta n + \text{ec.} = \\ &\quad 2\lambda\,(x'\,\delta x' + y'\,\delta y' + z'\,\delta z') \\ &+ 2\mu\,(x''\,\delta x'' + y''\,\delta y'' + z''\,\delta z'') \\ &+ 2\nu\,(x'''\,\delta x''' + y'''\,\delta y''' + z'''\,\delta z''') + \text{ec.}\,; \end{aligned}$$

poi osservare che sui termini componenti il secondo membro si debbono nuovamente operare le solite trasformazioni, giacchè in essi le variazioni δx, δy, δz sono affette da derivazioni. Essendo identicamente

$$(21)\quad \begin{aligned} &2\lambda x'\,\delta x' = -\,(2\lambda x')'\,\delta x + (2\lambda x'\,\delta x)' \\ &2\mu x''\,\delta x'' = (2\mu x'')''\,\delta x - [\,(2\mu x'')'\,\delta x - 2\mu x''\,\delta x'\,]' \\ &2\nu x'''\delta x''' = -(2\nu x''')'''\delta x + [\,(2\nu x''')''\delta x - (2\nu x''')'\delta x' + 2\nu x'''\delta x''\,]' \\ &\qquad \text{ec.} \qquad\qquad \text{ec.} \end{aligned}$$

e simili equazioni avendo luogo pei termini che contengono le derivate delle y, z, sarà facile riconoscere quale risulti dopo le trasformazioni la prima parte del secondo membro della (20), cui si dà una forma trinomiale raccogliendo i coefficienti totali delle δx, δy, δz: la seconda parte costituisce una derivata esatta che, quando viene introdotta sotto il segno integrale, produce un nuovo versamento di quantità ai limiti. Riuniti pertanto i due integrali della equazione (19) in un solo, procedendo col solito metodo conseguiremo le tre equazioni

$$(22)\quad \begin{aligned} &V\left(X - \frac{d^2x}{dt^2}\right) - \frac{dP}{dp} = 0 \\ &V\left(Y - \frac{d^2y}{dt^2}\right) - \frac{dQ}{dp} = 0 \\ &V\left(Z - \frac{d^2z}{dt^2}\right) - \frac{dR}{dp} = 0 \end{aligned}$$

essendosi poste per abbreviare

$$(23)\quad \begin{aligned} &P = 2\lambda x' - (2\mu x'')' + (2\nu x''')'' - \text{ec.} \\ &Q = 2\lambda y' - (2\mu y'')' + (2\nu y''')'' - \text{ec.} \\ &R = 2\lambda z' - (2\mu z'')' + (2\nu z''')'' - \text{ec.} \end{aligned}$$

Dalle equazioni (22) può farsi sparire ogni vestigio apparente della p. Essendo per qualunque funzione L di x che poi è funzione di p,

$$(24)\qquad \frac{dL}{dp} = \frac{dL}{dx}\,\frac{dx}{dp},$$

richiamato per V il suo valore dato dalla equazione (14), si può dividere per $\frac{dx}{dp}$, e le (22) diventano

$$(25)\qquad \begin{aligned} \Gamma\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}\left(X-\frac{d^2x}{dt^2}\right) &= \frac{dP}{dx} \\ \Gamma\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}\left(Y-\frac{d^2y}{dt^2}\right) &= \frac{dQ}{dx} \\ \Gamma\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}\left(Z-\frac{d^2z}{dt^2}\right) &= \frac{dR}{dx} \end{aligned}$$

dove non sono in evidenza se non le variabili x, y, z: ma le P, Q, R hanno i valori (23).

81. Giova mandar via la p anche dai valori (23) delle P, Q, R: giacchè (parlando in generale per tutte le tre sorte di sistemi continui) le coordinate p, q, r, intermedie fra le a, b, c e le x, y, z dei due stati antecedente e reale, fanno bensì un gran giuoco, essendo quelle che ci somministrano le equazioni di condizione, ma non vengono opportune quando si vogliono applicare le formole alla risoluzione dei problemi. A tal fine osserviamo che ponendo

$$(26)\qquad \varepsilon = 2\lambda\;;\quad \vartheta = -2\mu'\;;\quad \tau = 2\nu'' - 2\mu\;;\ \text{ec.}$$

le (23) si riducono più semplicemente

$$(27)\qquad \begin{aligned} P &= \varepsilon x' + \vartheta x'' + \tau x''' + \text{ec.} \\ Q &= \varepsilon y' + \vartheta y'' + \tau y''' + \text{ec.} \\ R &= \varepsilon z' + \vartheta z'' + \tau z''' + \text{ec.} \end{aligned}$$

Indichiamo per pochi momenti con apici al piede le derivate per la a dello stato antecedente: avremo, fatta $\omega = \frac{dp}{da}$,

$$x' = \frac{x_{,}}{\omega}; \quad x'' = \frac{\omega x_{,,} - \omega_{,} x_{,}}{\omega^3}$$

$$x''' = \frac{\omega^2 x_{,,,} - 3\omega\omega_{,} x_{,,} + (3\omega_{,}^2 - \omega\omega_{,,})x_{,}}{\omega^5}; \quad \text{ec.}$$

e analoghi saranno i valori per le $y', y'', y''', \ldots\ z', z'', z''', \ldots$ di modo che adottando quest' altre denominazioni

$$(28) \qquad \begin{aligned} A &= \frac{1}{\omega}\varepsilon - \frac{\omega_{,}}{\omega^3}\vartheta + \frac{3\omega_{,}^2 - \omega\omega_{,,}}{\omega^5}\tau - \text{ec.} \\ B &= \frac{1}{\omega^2}\vartheta - \frac{3\omega_{,}}{\omega^4}\tau + \text{ec.} \\ C &= \frac{1}{\omega^3}\tau - \text{ec.} \\ &\text{ec.} \qquad \text{ec.} \end{aligned}$$

le (27) assumeranno le forme

$$(29) \qquad \begin{aligned} P &= A\frac{dx}{da} + B\frac{d^2x}{da^2} + C\frac{d^3x}{da^3} + \text{ec.} \\ Q &= A\frac{dy}{da} + B\frac{d^2y}{da^2} + C\frac{d^3y}{da^3} + \text{ec.} \\ R &= A\frac{dz}{da} + B\frac{d^2z}{da^2} + C\frac{d^3z}{da^3} + \text{ec.} \end{aligned}$$

dove per significare le derivate rispetto alla a ho rimessa, invece degli apici al piede, la notazione ordinaria. Si noti che i coefficienti A, B, C, ec. i quali hanno assorbito tutto quanto restava di contenente ancora la p nelle sue derivate per la a, possono essere direttamente considerati siccome coefficienti indeterminati: essi infatti sono tanti quante le ε, ϑ, τ, ec., e queste tante quante le λ, μ, ν, ec.

Se poi vogliamo che nelle equazioni generali compajano soltanto derivate prese per la a dello stato antecedente, e pel tempo (il che appunto si richiede per trattare alcune questioni) conseguiremo facilmente l'intento moltiplicando le (25) per $\frac{dx}{da}$. Osservisi allora (equazione (13)) che il coefficiente comune ai primi membri eguaglia l'unità: si ponga altresì mente che N essendo una funzione qualunque della x funzione di a, è sempre $\frac{dN}{da} = \frac{dN}{dx}\frac{dx}{da}$; e quelle equazioni ci diventeranno

$$(30)\qquad X-\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{dP}{da};\quad Y-\frac{d^2y}{dt^2}=\frac{dQ}{da};\quad Z-\frac{d^2z}{dt^2}=\frac{dR}{da}$$

nelle quali le P, Q, R hanno i valori (29).

Volta un' occhiata alle denominazioni introdotte per abbreviazione di scrittura col mezzo delle equazioni (26), (28), capiremo facilmente che i valori delle P, Q, R espressi nelle (29) si riducono ai soli primi termini, se dei trinomj scritti nelle equazioni (5) riteniamo solamente il primo, il che equivale a considerar nelle curve quella sola forza interna che appellasi tensione. Messi a profitto anche i seguenti termini delle (29), non ci sarebbe per niente malagevole il dedurre dalle precedenti equazioni quelle conseguenze che Lagrange (M. A. Tom. I. pag. 152.), Binet (Journal de l' École Polyt. T. X. pag. 418.) e Bordoni (Memorie della Società Italiana T. XIX. pag. 1.) hanno ricavate dalla considerazione delle forze agenti sugli angoli di contingenza e di torsione, come eziandio le altre cose scritte di poi; ma questo non è lo scopo ch' io mi sono prefisso, non volendo qui (e lo feci intendere fin da principio) entrare nei particolari delle varie questioni, ma provare soltanto come esse tutte siano abbracciate dal metodo lagrangiano.

82. Lo stesso verrò ora facendo in ordine ai sistemi superficiali. In questo caso, delle p, q, r visibili nelle equazioni (3), le prime due si hanno a riguardare come variabili fra di loro indipendenti, e la r va considerata funzione di esse. Esprimeremo con apici in alto le derivate per la p, e con apici a basso le derivate per la q.

Incominciamo a dedurre dalle (3) le seguenti serie di equazioni

$$(31)\qquad \begin{array}{lll}
x' = \alpha_1 + \gamma_1 r'\,; & y' = \alpha_2 + \gamma_2 r'\,; & z' = \alpha_3 + \gamma_3 r' \\
x_{,} = \beta_1 + \gamma_1 r_{,}\,; & y_{,} = \beta_2 + \gamma_2 r_{,}\,; & z_{,} = \beta_3 + \gamma_3 r_{,} \\
x'' = \gamma_1 r'' & ;\ y'' = \gamma_2 r'' & ;\ z'' = \gamma_3 r'' \\
x'_{,} = \gamma_1 r'_{,} & ;\ y'_{,} = \gamma_2 r'_{,} & ;\ z'_{,} = \gamma_3 r'_{,} \\
x_{,,} = \gamma_1 r_{,,} & ;\ y_{,,} = \gamma_2 r_{,,} & ;\ z_{,,} = \gamma_3 r_{,,} \\
\text{ec.} & \text{ec.} & \text{ec.}
\end{array}$$

Qui pure adottando nuove lettere in luogo di trinomj come segue

$$
(32)\qquad
\begin{array}{ll}
k = x'^2 + y'^2 + z'^2 & n = x'' x_{,,} + y'' y_{,,} + z'' z_{,,} \\
h = x_{,}^2 + y_{,}^2 + z_{,}^2 & j = x'^2_{,} + y'^2_{,} + z'^2_{,} \\
i = x' x_{,} + y' y_{,} + z' z_{,} & f = x'' x'_{,} + y'' y'_{,} + z'' z'_{,} \\
l = x''^2 + y''^2 + z''^2 & g = x_{,,} x'_{,} + y_{,,} y'_{,} + z_{,,} z'_{,} \\
m = x_{,,}^2 + y_{,,}^2 + z_{,,}^2 & \text{ec.} \qquad \text{ec.}
\end{array}
$$

ci sarà facile, a motivo delle tanto usate equazioni fra le quantità angolari registrate al num°. 33., dedurre dalle (31) le seguenti

$$
(33)\qquad
\begin{array}{lll}
k = 1 + r'^2 ; & h = 1 + r_{,}^2 ; & i = r' r_{,} \\
l = r''^2 ; & j = r'^2_{,} ; & m = r_{,,}^2 \\
f = r'' r'_{,} ; & g = r'_{,} r_{,,} ; & n = r'' r_{,,} ; \text{ ec.}
\end{array}
$$

le quali corrispondono alle (6) pel caso de' sistemi lineari, cioè non contengono più le quantità angolari, ma sono ancora ingombre dalle derivate della r per le p, q. Le equazioni che si cercano fra le sole derivate delle x, y, z per le p, q, si ricavano a colpo d'occhio dalle precedenti e sono

$$
(34)\qquad
\begin{array}{l}
(k-1)(h-1) = i^2 ; \quad lj = f^2 ; \quad lm = n^2 ; \quad jm = g^2 \\
k'^2 = 4(k-1)l ; \; k_{,}^2 = 4(k-1)j ; \; h'^2 = 4(h-1)j ; \; h_{,}^2 = 4(h-1)m ; \text{ ec.}
\end{array}
$$

Queste stanno a riscontro delle (10), (11), ec. num°. 78. e delle (14) num°. 47., vale a dire si verificano per qualunque superficie atteso l'arbitrio nella posizione degli assi ai quali è riferita. Anche di esse diremo che dopo un certo numero non saranno più probabilmente se non combinazioni delle antecedenti. Esse sono le equazioni di condizione che, quando la superficie è fatta di molecole, esprimono i vincoli interni e si prestano onde possiamo scrivere mediante il metodo lagrangiano le equazioni del moto e dell'equilibrio di qualunque sistema superficiale.

83. Passeremo ad assegnare le dette equazioni, richiamando il già esposto al num°. 30.: nè ci sarà difficile il persuaderci

che in corrispondenza della equazione (1) num°. 44., e della (12) num°. 79. l'equazione generale meccanica assumerà presentemente l'espressione

$$(35)\quad \int da \int db \,.\, \left\{ \left(X - \frac{d^2x}{dt^2} \right) \delta x + \text{ec.} \right\} + \int da \int db \,.\, G + \Omega = 0.$$

Questa pure va trasformata analogamente a quanto si è praticato nei citati luoghi. Qui gli integrali debbono comparire presi per le p, q di cui le x, y, z si hanno a considerare funzioni prima che delle a, b. Con tale intendimento, in virtù delle equazioni (20), (22) del num°. 12. ci prepareremo l'equazione seguente

$$(36)\qquad \Gamma \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2} \left(\frac{dx}{da}\frac{dy}{db} - \frac{dx}{db}\frac{dy}{da} \right) = 1$$

dove Γ è la densità superficiale nel punto (x, y, z). Osserviamo che per essere x, y, z funzioni di p, q, r e queste di a, b, abbiamo

$$\frac{dx}{da}\frac{dy}{db} - \frac{dx}{db}\frac{dy}{da} = \left(\frac{dx}{dp}\frac{dy}{dq} - \frac{dx}{dq}\frac{dy}{dp} \right) \left(\frac{dp}{da}\frac{dq}{db} - \frac{dp}{db}\frac{dq}{da} \right);$$

risultamento della stessa natura di quello più generale discorso al num°. 45., e che facilmente si verifica sostituendo a $\frac{dx}{da}$, $\frac{dx}{db}$ i valori equivalenti $\frac{dx}{dp}\frac{dp}{da} + \frac{dx}{dq}\frac{dq}{da}$, $\frac{dx}{dp}\frac{dp}{db} + \frac{dx}{dq}\frac{dq}{db}$, e i due simili alle derivate $\frac{dy}{da}$, $\frac{dy}{db}$. Pertanto la precedente equazione (36), avendo posto per amore di brevità

$$(37)\qquad U = \Gamma \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2} \left(\frac{dx}{dp}\frac{dy}{dq} - \frac{dx}{dq}\frac{dy}{dp} \right)$$

diventa

$$\left(\frac{dp}{da}\frac{dq}{db} - \frac{dp}{db}\frac{dq}{da} \right) U = 1\,;$$

e questa ci fa vedere che non produrremo alcuna alterazione se introdurremo il primo membro di essa come fattore delle quantità sottoposte ai due segni integrali dell'equazione (35). Allora essi, in forza del noto e più volte usato teorema, si riducono prontamente ad integrali per le p, q, ed otteniamo

$$(38)\quad \int dp \int dq \,.\, \mathrm{U} \left\{ \left(\mathrm{X} - \frac{d^2 x}{dt^2} \right) \delta x + \text{ec.} \right\} + \int dp \int dq \,.\, \mathrm{UG} + \Omega = 0$$

nella quale tutte le quantità si devono ora riguardare funzioni delle p, q, dissimulata l'ulterior composizione delle p, q in a, b.

Il secondo termine dell'ultima equazione contiene tutta la parte che si riferisce alle equazioni di condizione sussistenti per tutti i punti del sistema, equazioni che ci sono note quando sono espresse fra le x, y, z e le p, q, e sono le (34). La quantità sottoposta a quel secondo segno d'integrale duplicato, avendo moltiplicato le variate delle equazioni (34) per altrettante indeterminate, e poi sommate secondo il metodo, risulta della forma

$$(39)\quad \begin{array}{l} \lambda \delta k + \mu \delta h + \nu \delta i + (1)\,\delta l + (2)\,\delta j + (3)\,\delta m \\ \qquad + (4)\,\delta f + (5)\,\delta n + (6)\,\delta g + \text{ec.} \end{array}$$

dove possiamo ommettere i termini contenenti le variate $\delta k'$, $\delta k_{,}$, $\delta h'$, $\delta h_{,}$, ec. quando non cerchiamo se non le equazioni che si verificano per tutti i punti del sistema. La ragione è affatto simile alla già esposta al num°. 79., cioè che tali termini dopo le solite trasformazioni o ci presentano quantità che si compenetrano colle già notate, o quantità che essendo derivate esatte per p, o per q, passano ai limiti.

Proseguendo, e sostituendo nella espressione (39) alle k, h, i, ec. i valori scritti nelle (32), essa diventa

$$(40)\quad \begin{array}{ll} & 2\lambda\,(x'\,\delta x' + y'\,\delta y' + z'\,\delta z') \\ + & 2\mu\,(x_{,}\,\delta x_{,} + y_{,}\,\delta y_{,} + z_{,}\,\delta z_{,}) \\ + & \nu\,(x_{,}\,\delta x' + y_{,}\,\delta y' + z_{,}\,\delta z' + x'\,\delta x_{,} + y'\,\delta y_{,} + z'\,\delta z_{,}) \\ + & \text{ec.} \end{array}$$

sulla quale conviene praticare le note trasformazioni per ridurla alla forma

$$(41)\quad \begin{array}{l} (\mathrm{I})\,\delta x + (\mathrm{II})\,\delta y + (\mathrm{III})\,\delta z \\ \qquad + \dfrac{d\Delta}{dp} + \dfrac{d\Theta}{dq} + \dfrac{d^2 \Upsilon}{dp\,dq}\,. \end{array}$$

I processi conosciuti ci guidano a trovare

$$\begin{aligned}(\mathrm{I}) = &- (2\lambda x' + \nu x_{,})' + [\, 2(1)x'' + (4)x'_{,} + (5)x_{,,} \,]'' \\ &- (2\mu x_{,} + \nu x')_{,} + [\, (4)x'' + 2(2)x'_{,} + (6)x_{,,} \,]'_{,} + \text{ec.} \\ &+ [\, (5)x'' + (6)x'_{,} + 2(3)x_{,,} \,]_{,,}\end{aligned}$$

e per le (II), (III) valori che non differiscono dal precedente se non per esservi dappertutto la lettera y, o la z in luogo della x. Se poi si adottano per compendio le denominazioni

$$(42)\quad \begin{cases} L_1 = 2\lambda x' + \nu x_{,} - [\, 2(1)x'' + (4)x'_{,} + (5)x_{,,} \,]' - \frac{1}{2}[\, (4)x'' + 2(2)x'_{,} + (6)x_{,,} \,]_{,} + \text{ec.} \\ M_1 = 2\mu x_{,} + \nu x' - \frac{1}{2}[\, (4)x'' + 2(2)x'_{,} + (6)x_{,,} \,]' - [\, (5)x'' + (6)x'_{,} + 2(3)x_{,,} \,]_{,} + \text{ec.} \\ L_2 = 2\lambda y' + \nu y_{,} - [\, 2(1)y'' + (4)y'_{,} + (5)y_{,,} \,]' - \frac{1}{2}[\, (4)y'' + 2(2)y'_{,} + (6)y_{,,} \,]_{,} + \text{ec.} \\ M_2 = 2\mu y_{,} + \nu y' - \frac{1}{2}[\, (4)y'' + 2(2)y'_{,} + (6)y_{,,} \,]' - [\, (5)y'' + (6)y'_{,} + 2(3)y_{,,} \,]_{,} + \text{ec.} \\ L_3 = 2\lambda z' + \nu z_{,} - [\, 2(1)z'' + (4)z'_{,} + (5)z_{,,} \,]' - \frac{1}{2}[\, (4)z'' + 2(2)z'_{,} + (6)z_{,,} \,]_{,} + \text{ec.} \\ M_3 = 2\mu z_{,} + \nu z' - \frac{1}{2}[\, (4)z'' + 2(2)z'_{,} + (6)z_{,,} \,]' - [\, (5)z'' + (6)z'_{,} + 2(3)z_{,,} \,]_{,} + \text{ec.} \end{cases}$$

si scorge che i valori delle (I), (II), (III) assumono le espressioni

$$(\mathrm{I}) = -\frac{dL_1}{dp} - \frac{dM_1}{dq};\quad (\mathrm{II}) = -\frac{dL_2}{dp} - \frac{dM_2}{dq};\quad (\mathrm{III}) = -\frac{dL_3}{dp} - \frac{dM_3}{dq}$$

dove a significare le derivate per la p o per la q ho tornato a far uso della notazione più comune.

Siccome poi, giusta il metodo, collocata la quantità (41) sotto il secondo segno integrale della (38), debbonsi riunire i due integrali, ed eguagliare a zero i coefficienti totali delle variazioni δx, δy, δz, ci risulteranno le tre equazioni

$$(43)\quad \begin{aligned} U\left(X - \frac{d^2x}{dt^2}\right) &= \frac{dL_1}{dp} + \frac{dM_1}{dq} \\ U\left(Y - \frac{d^2y}{dt^2}\right) &= \frac{dL_2}{dp} + \frac{dM_2}{dq} \\ U\left(Z - \frac{d^2z}{dt^2}\right) &= \frac{dL_3}{dp} + \frac{dM_3}{dq}. \end{aligned}$$

Resta a far sparire da queste le derivate prese per le p, q, cambiandole in altre prese per le x, y delle quali si considera funzione la terza coordinata z.

84. A questo fine è necessario premettere la dimostrazione di un principio puramente analitico. Le x, y essendo funzioni delle p, q, e viceversa essendo lecito considerare le p, q funzioni delle x, y

$$p = p(x, y) ; \quad q = q(x, y) ; \tag{44}$$

due quantità qualunque L, M funzioni delle p, q, si potranno aver per tali in quanto prima lo sono delle x, y. Di qui le due equazioni

$$\frac{dL}{dp} = \frac{dL}{dx} x' + \frac{dL}{dy} y' ; \quad \frac{dM}{dq} = \frac{dM}{dx} x_{,} + \frac{dM}{dy} y_{,}$$

che scriveremo senza alterazione, perchè giova in appresso,

$$\frac{dL}{dp} = \frac{1}{\omega}\left(\frac{dL}{dx} . \omega x' + \frac{dL}{dy} . \omega y'\right); \quad \frac{dM}{dq} = \frac{1}{\omega}\left(\frac{dM}{dx} . \omega x_{,} + \frac{dM}{dy} . \omega y'\right); \tag{45}$$

e alla quantità ω, che può essere qualunque, daremo il valore

$$\omega = \frac{1}{x' y_{,} - y' x_{,}} . \tag{46}$$

Ora vogliamo provare identiche le due equazioni

$$\frac{d . \omega x'}{dx} + \frac{d . \omega y'}{dy} = 0 ; \quad \frac{d . \omega x_{,}}{dx} + \frac{d . \omega y_{,}}{dy} = 0 , \tag{47}$$

dove i quattro prodotti $\omega x'$, $\omega y'$, $\omega x_{,}$, $\omega y_{,}$, si considerano funzioni di x, y, supponendosi che eseguite le derivazioni indicate dal loro modo di essere, siansi rimessi al luogo delle p, q i valori (44). Abbiamo le due equazioni

$$x = x[p(x, y), q(x, y)] ; \quad y = y[p(x, y), q(x, y)]$$

che sono identiche perchè s' intendono formate, avendo nelle espressioni delle x, y per le p, q risostituito alle p, q i valori (44). Esse, derivate per le x, y, ci porgono le quattro

$$1 = x' p'(x) + x_{,} q'(x) ; \qquad 0 = y' p'(x) + y_{,} q'(x)$$
$$0 = x' p'(y) + x_{,} q'(y) ; \qquad 1 = y' p'(y) + y_{,} q'(y) .$$

Ricaviamo da queste i valori delle quattro incognite $x', x_{,}, y', y_{,}$; posta per brevità

$$D = p'(x) q'(y) - q'(x) p'(y) , \tag{48}$$

li troveremo facilmente espressi come segue

$$(49)\qquad x' = \frac{q'(y)}{D};\ x_{,} = -\frac{p'(y)}{D};\ y' = -\frac{q'(x)}{D};\ y_{,} = \frac{p'(x)}{D}.$$

Tali valori riducono quello di ω scritto nella (46), avendo sott' occhio la (48), $\omega = D$: dopo di che le stesse equazioni (49) ci danno

$$\omega x' = q'(y);\quad \omega y' = -q'(x);\quad \omega x_{,} = -p'(y);\quad \omega y_{,} = p'(x).$$

Questi risultati dimostrano le equazioni (47) così prontamente che basta la sola ispezione.

Moltiplichiamo le equazioni (47) rispettivamente per $\frac{L}{\omega}$, $\frac{M}{\omega}$, e aggiungiamone i primi membri ai secondi delle (45), il che non vi porta alterazione perchè aggiungiamo quantità nulle. Potremo compenetrare i quadrinomj risultanti e scrivere

$$\frac{dL}{dp} = \frac{1}{\omega}\cdot\frac{d.L\omega x'}{dx} + \frac{1}{\omega}\cdot\frac{d.L\omega y'}{dy}$$

$$\frac{dM}{dq} = \frac{1}{\omega}\cdot\frac{d.M\omega x_{,}}{dx} + \frac{1}{\omega}\cdot\frac{d.M\omega y_{,}}{dy},$$

le quali equazioni sommate ci porgono

$$(50)\qquad \frac{dL}{dp} + \frac{dM}{dq} = \frac{1}{\omega}\cdot\frac{d.\omega(Lx' + Mx_{,})}{dx} + \frac{1}{\omega}\cdot\frac{d.\omega(Ly' + My_{,})}{dy}.$$

Questa è l'equazione contenente il principio analitico col quale trasformare i secondi membri delle (43).

Richiamato dalla (37) il valore di U, facciamo l'osservazione che l'ultimo fattor binomiale di esso eguaglia $\frac{1}{\omega}$, come si scorge per l'equazione (46), restituita alle derivate parziali la notazione ordinaria. Potremo pertanto dividere dappertutto per questa quantità $\frac{1}{\omega}$, dopo la quale operazione se scriviamo R in luogo del radicale $\sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2}$ che si adopera per lo spianamento delle superficie, ci si renderà manifesto come le equazioni (43) si mutino nelle seguenti

$$\Gamma R\left(X-\frac{d^2x}{dt^2}\right)=\frac{d.\omega(L_1x'+M_1x_{,})}{dx}+\frac{d.\omega(L_1y'+M_1y_{,})}{dy}$$

$$(51)\qquad \Gamma R\left(Y-\frac{d^2y}{dt^2}\right)=\frac{d.\omega(L_2x'+M_2x_{,})}{dx}+\frac{d.\omega(L_2y'+M_2y_{,})}{dy}$$

$$\Gamma R\left(Z-\frac{d^2z}{dt^2}\right)=\frac{d.\omega(L_3x'+M_3x_{,})}{dx}+\frac{d.\omega(L_3y'+M_3y_{,})}{dy}$$

ove le derivate parziali sono adesso per le x, y. Compajono però ancora delle derivate per p, q nelle quantità sottoposte ai segni differenziali, e queste bisognerà farle sparire cercando di compenetrare nei coefficienti indeterminati gli elementi analitici dove intervengono, presso a poco come si è fatto al num°. 81., e non lasciando in evidenza se non derivate relative alle a, b dello stato antecedente, o alle x, y dell'attuale.

85. Noi qui ci limiteremo a ritenere nei valori di L_1, M_1, L_2, ec. (equazioni (42)) i soli termini colle derivate prime x', $x_{,}$, y', $y_{,}$, z', $z_{,}$, ed anche malgrado una tanta limitazione arriveremo a risultati molto generali. Assumendo soltanto binomiali quei valori, e rissovenendoci che abbiamo

$$z'=\frac{dz}{dx}x'+\frac{dz}{dy}y';\quad z_{,}=\frac{dz}{dx}x_{,}+\frac{dz}{dy}y_{,},$$

troveremo dopo facili riduzioni che, poste le

$$(52)\qquad \begin{aligned} A&=\omega\left(2\lambda x'^2+2\nu x'x_{,}+2\mu x_{,}^2\right)\\ B&=\omega\left(2\lambda y'^2+2\nu y'y_{,}+2\mu y_{,}^2\right)\\ C&=\omega\left(2\lambda x'y'+\nu(x'y_{,}+x_{,}y')+2\mu x_{,}y_{,}\right), \end{aligned}$$

i secondi membri delle (51) si modificano così da risultarne le tre

$$\Gamma R\left(X-\frac{d^2x}{dt^2}\right)=\frac{dA}{dx}+\frac{dC}{dy}$$

$$(53)\qquad \Gamma R\left(Y-\frac{d^2y}{dt^2}\right)=\frac{dC}{dx}+\frac{dB}{dy}$$

$$\Gamma R\left(Z-\frac{d^2z}{dt^2}\right)=\frac{d.\left(A\frac{dz}{dx}+C\frac{dz}{dy}\right)}{dx}+\frac{d.\left(C\frac{dz}{dx}+B\frac{dz}{dy}\right)}{dy}.$$

In esse potremo riguardare a dirittura le A, B, C come le tre indeterminate funzioni delle x, y introdotte dal metodo, giacchè

sono tre del pari che le indeterminate λ, v, μ. Queste (53) coincidono, quanto alla forma, colle trovate dai moderni Geometri seguendo le viste loro proprie (Cauchy. Exercices des Mathématiques. T. III, pag. 246.); ma il metodo lagrangiano ci scopre ben altro orizzonte pel caso che nelle equazioni (42) tenessimo conto dei termini seguenti: ecco materia per ulteriori studj.

Noteremo che facendo dipendere nelle (53) le A, B, C da un' unica indeterminata λ nel modo seguente

$$A = \lambda\left(1 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right); \quad C = -\lambda\frac{dz}{dx}\frac{dz}{dy}; \quad B = \lambda\left(1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right)$$

esse si possono facilmente ridurre a quelle date da Lagrange per le superficie elastiche in due luoghi della M. A. Tom. I. pag. 103, 149.

Non mi estenderò più oltre, giacchè spero di avere raggiunto lo scopo propostomi sul principio di quest' ultimo Capo. Terminerò con riflessioni generali analoghe ad altre sparse qua e là nel decorso della Memoria. Dopo che Lagrange ha ridotto tutte le questioni della Meccanica razionale al calcolo delle variazioni, volere persistere a farne senza, è un imitare coloro i quali per le ricerche di alta geometria, piuttosto che correre a volo giovandosi di formole prese dal calcolo differenziale e integrale, si ostinano ad andar pedestri col sussidio de' metodi sintetici. Così procedendo si fa poco, e s' incontra grave pericolo di far male. Conviene persuadersi che le dimostrazioni sempre più ammettono qualche sospetto di errore, quanto maggiore è il tratto nel quale sono appoggiate al semplice ragionamento: chè la portata intuitiva della nostra ragione è assai limitata, e facilmente c' inganniamo appena gli elementi della questione crescono a notabil numero e si complicano fra di loro. Abbiamo bisogno di metodi potenti i quali essendo come l' espressione simultanea e compendiosa di molti principj, operano col valore di tutti, e non con quello di uno per volta, che è quanto avviene d' ordinario nel ragionamento logico: di

metodi che ridotti a processi determinati e immutabili, non ci lasciano forviare. Anche usando mezzi così fatti la nostra ragione mantiene i suoi diritti, in quanto ne riconosce veri i fondamenti, e giuste le applicazioni: sebbene non le sia il più delle volte concesso conseguire un' intrinseca evidenza relativamente alle conseguenze a cui arriva. È per tal modo che nella ricerca della verità facciamo quei grandi viaggi, ai quali il ragionamento diretto è affatto insufficiente, tornandoci esso poi vantaggioso quando, giunti a certe mete, vogliamo estendere il beneficio delle ottenute cognizioni. Uno appunto fra i più poderosi degli indicati mezzi è il calcolo delle variazioni per la meccanica. Già vedemmo nella precedente Memoria copia di risultati che se ne deducono, e toccammo di molte teoriche che potrebbero rannodarsi alle varie parti di essa. Eppure io sento profondamente che anche tutto il presente lavoro è ben lungi dall' esaurire la fecondità dei metodi lagrangiani: credo poter assicurare che con questi stessi metodi si percorrono a passi di conquista le varie parti della fisica matematica. Ho già in pronto altro non breve scritto in continuazione dell' attuale, e nutro desiderio di poter produrre anche ulteriori prove di fatto dell' esposta asserzione: ma qualunque sia per essere il termine a cui riusciranno le mie fatiche, tengo per fermo che il tempo farà ragione alle parole colle quali diedi cominciamento a questa Memoria.

Fine della presente Memoria.

INDICE

MEMORIA
GEOGNOSTICO-PALEOZOICA
SULLE
ALPI VENETE

DEL SOCIO ATTUALE

CAV. TOMMASO A. CATULLO

MEMBRO DELL' I. R. ISTITUTO

E PROFESSORE DI STORIA NATURALE NELL' UNIVERSITÀ DI PADOVA.

PARTE PRIMA

CON QUATTRO TAVOLE LITOGRAFICHE.

Ricevuta adì 18 *Dicembre* 1845.

Dopo la pubblicazione della Zoologia fossile mi sono ripetute volte recato ne' luoghi delle Venete provincie che più interessavami di vedere, e ciò sempre coll'intendimento di farvi nuove osservazioni, e di raddrizzare, ove fosse stato uopo, le conseguenze che aveva ricavate dai fatti già descritti in quell'opera.

Studiati, con quella maggiore esattezza che per me si poteva, li terreni di sedimento antico, mi avvidi che qualche fatto dapprima non bene deciferato meritava d'essere posto in più chiaro lume; come egualmente meritevoli di correzione e di aggiunte mi parvero le distinzioni che fatte aveva dei detti terreni, le quali, per quanto lo comportano le attuali nostre cognizioni, sono state riformate e ridotte a miglior sistema. È appunto dal cumulo delle osservazioni raccolte in questi ultimi anni che trascelsi quelle che mi sembrarono avere più attenenza coll'argomento del quale prendo a trattare. Nel descrivere quindi la successione dei terreni che sono inferiori alla formazione jurese, cercai di notare i limiti respettivi di ciascheduno col fine di assicurarmi vieppiù che nelle alpi Venete

esistono delle rocce evidentemente anteriori alla formazione del Jura; come d'altro canto misi a profitto le osservazioni fatte nelle località ove più distinta mi apparì l'indipendenza del sistema jurese col sistema cretaceo, anche ad onta de' notevolissimi rovesciamenti prodotti da agenti sotterranei, che alterarono la primitiva loro giacitura. Quanto alla paleontología de' nominati due terreni, egli è certo, che quando anche si trovasse negli strati della creta una qualche specie di ammonite, riputata esclusiva del sistema jurese, non per questo dobbiamo inferire che al Jura e non alla creta appartenga la roccia che dà ricetto all'ammonite, imperciocchè tutte le conchiglie proprie del terreno cretaceo ad esso commiste si dovrebbero allora riportare alle rocce di un altro sistema; al che si apporrebbero anche i caratteri geognostici che legano la calcaria ammonitica dell' Italia al sistema cretaceo, e la distinguono dal jurese; come verrò accennando nella seconda parte di questa Memoria.

Nell'opera più sopra citata collocai un membro del sistema cretaceo nella soggiacente formazione del Jura; e fu allora che li giornali italiani, tedeschi e francesi si opposero alla associazione che io proponeva della calcaria ammonitica alle rocce dell'era jurassica.

Il Signor Pasini fu il primo a dichiarare che gli strati del biancone sono evidentemente paralleli, e simili sotto tutti i rapporti alla calcaria rossa ammonitica da me riportata nel terreno del Jura (*Giornale della italiana letteratura. Bim. IV.* 1828); e nella Memoria sullo stesso tema da lui pubblicata negli Annali scientifici del Regno Lombardo-Veneto assicura, che gli ammoniti della creta bianca sono identici a quelli della calcaria ammonitica rossa; dal che ne deduce che tra queste due calcarie vi esiste un legame tale, da non lasciare alcun dubbio che sieno entrambe uno stesso deposito (*Annali, bim. IV.* 1832.).

Pochi mesi dopo che il Sig. Pasini pubblicava nel giornale di Padova la sua critica, un'altra ne usciva nella Gazzetta mineralogica del Leonhard, nella quale l'autore muove i suoi

dubbj sopra le distinzioni che io aveva ammesse tra le due rocce, e crede che la calcaria ammonitica rossa sia una continuazione non mai interrotta del sistema cretaceo, nè si possa da questo disgiungere, senza mettersi in dissonanza con le odierne dottrine (*Zeitschrift für mineralogie* 1828, *num.* 6, *pag.* 445.).

La critica dell' anonimo tedesco venne ben presto riprodotta nel Bollettino di Ferussac per cura del Signor Boué, il quale volle anche aggiungere alcun che del proprio col fine di provare vieppiù l' aggiustatezza delle osservazioni contenute nella sopracitata gazzetta (*Bollettino Tomo XVI*, *pag.* 40.). Però il Sig. Boué, che da esperto geologo aveva esaminate le alpi venete, professava pochi mesi prima le stesse mie idee circa il posto da assegnarsi alla calcaria ammonitica, perciocchè nel Volume XIV (pag. 36) dello stesso Bollettino così si esprime: « *M.r Catullo observe avec raison qu' une grande partie de la craie a ammonites de M.r Maraschini appartient au calcaire jurassique.* »

Dietro queste critiche osservazioni, tolsi nuovamente in esame la giacitura della calcaria ammonitica per assicurarmi della concordanza che v' ha tra li suoi strati e quelli delle rocce che gli sono congeneri. Dalle fatte ispezioni ho dovuto convincermi della immediata relazione di detta calcaria con le rocce del sistema cretaceo, da cui ebbi il torto di separarla solo per avervi trovato dentro alcune poche specie di ammoniti riputate caratteristiche del terreno del Jura. Però queste poche specie, le quali depongono contro la supposta identità degli ammoniti della creta bianca con quelli della calcaria ammonitica, queste poche specie, dico, sono un' assai piccola cosa a petto delle molte che voglionsi esclusive della creta, e che pur trovansi accomunate con le prime, e dentro strati così geognosticamente simili agli strati della creta, da non poterli, come ho detto, da questa distaccare.

Non sarei entrato in tutte queste discussioni sulle critiche fatte alla zoologia fossile delle provincie venete, e sulle ragioni che successivamente mi hanno indotto a raddrizzare la classi-

ficazione delle calcarie di antico sedimento, se il Signore de Collegno non si fosse opposto alle idee generalmente ricevute, circa il posto occupato dalla calcaria ammonitica, roccia ch' egli vorrebbe nuovamente riporre nella formazione del Jura; e se l' insigne geologo il barone de Buch, secondando questa dottrina non si fosse mostrato avverso alle molte ragioni allegate dai veneti naturalisti per iscoprire in modo men vago la posizione di detta roccia, non che il reale suo incatenamento con gli strati della creta.

TERRENO DEL MICASCHISTO

Il Micaschisto delle alpi venete è la roccia fondamentale su cui riposano tutte le altre, imperciocchè, progredendo fino a quella profondità cui possono giungere le nostre osservazioni, non vi si trova al di sotto verun altro terreno che da esso sia differente. La sua primevità è pei veneti geologisti un fatto, che non soggiace ad eccezioni; ma non si può dire altrettanto circa le cause che la produssero, volendo li uni che il micaschisto fino dalla sua prima comparsa portasse seco i caratteri che ora lo distinguono dalle rocce che gli sono congeneri; laddove altri sono d' avviso che questa pietra, e con essa tutti li aggregati cristallini stratificati, fossero in origine rocce di sedimento, le quali si trasmutarono poscia in rocce d' una natura differente. A questa metamorfosi influirono li elementi novelli in esse trasfusi dal calore emanato dall' interno del globo, nonchè la forte compressione esercitata dal mare sopra i materiali che si deponevano nel suo fondo. Non è di questo luogo entrare in discussioni sulla opinione di coloro i quali suppongono che quanto hanno prodotto le rocce emersorie sopra li sedimenti marini visibili ai nostri sguardi, sia anche accaduto nelle rocce plutoniche poste a grandi profondità, giacchè la digressione riescirebbe troppo lunga, e dirò anche estranea all' argomento del quale prendiamo a trattare. Nè tampoco mi fermerò a divisare tutti i luoghi ne' quali il micaschisto si vede, ma sola-

mente farò un cenno di quelli in cui meglio si osservano li rapporti che questa roccia può avere con li diversi membri delle formazioni che si trovano al suo contatto.

Il micaschisto non si scorge in verun luogo dell'agro veronese, mentre domina vastamente nelle alpi vicentine e bellunesi. In ambe queste provincie porta sopra di sè l'arenaria rossa con indizj di litantrace, e contiene que' minerali che ordinariamente sogliono accompagnare li micaschisti di molte altre contrade. Nel vicentino il micaschisto si mostra a nudo in molte valli, e qualche volta attinge a considerabili altezze. Alla dritta del Prechele, e propriamente nel lato in cui giace la fonte acidula di Recoaro, riesce ad un livello più basso di quello al quale arriva nella vallicella del Belembise, scavato nel lato opposto, ove appare modificato in micaschisto carbonioso, non guari dissimile da quello di Riva nello Agordino, ma però più micaceo. A Recoaro è interpolato da vene e da ammassi stratiformi di quarzo, più o meno colorato dall' ossido di ferro e più o meno ricco di mica argentina. Vi si trovano per entro li cristalli di ferro ossidulato ottaedro, la pirite cubica, il ferro oligisto rosso terroso; e giammai vi si rinvenne il granato, tanto copioso ne' micaschisti del Tirolo. Il suo colore è ordinariamente grigio-plumbeo, talvolta grigio-biancastro, e talvolta verde-gialliccio. Maraschini parla alla distesa di tutte queste varietà che pur si ripetono nell'Agordino e nel Cadore.

Dal micaschisto di Recoaro, e d'altri luoghi dell'alto vicentino emersero filoni e masse stratiformi di dolerite di tessitura compatta e di una tinta che varia dal grigio oscuro al grigio verdastro; spesso picchiettata di macchie gialle, cilestri e verdi prodotte dal vario grado di ossidazione del ferro e dal vario modo con cui quest'ossido potè combinarsi con le terre contenute nella dolerite medesima. Alla comparsa di questa roccia vuolsi ascrivere il fenomeno dello innalzamento delle alpi recoaresi, dal fondo delle quali escirono successivamente più altre ejezioni doleritiche, ben più miti della prima, come sembra indicarlo il fatto seguente. In Val Calda il micaschisto

è tagliato da una dika doleritica che ha dentro di se un' altra dika surta dopo; e questo fenomeno dimostra che la dolerite potè erompere non già in una sola ma in varie epoche. In alcuni siti li suoi getti si mostrano coevi ai porfidi pirossenici di quel circondario, ai quali la dolerite fa passaggio (*Trattenero, Mem. sopra le acidule di Recoaro, inserita nel Politecnico di Milano* 1843.). La prima grande emersione della dolerite è anteriore o di poco posteriore alla comparsa della calcaria che ricopre l'arenaria, imperciocchè la si vede tagliare in più sensi il micaschisto, l'arenaria che sopra vi posa e le sue marne. Poche sono però le dike che si aprirono un varco attraverso l'arenaria rossa: Maraschini ne indica due; la prima si dà a vedere sulla strada che da Recoaro conduce a Pinalto; la seconda si osserva nel monte Marmalaita nel comune di Valli. Il Sig. Pasini che conosce le località più interessanti dell' alto vicentino, crede invece che la dolerite abbia continuato a sbucare anche dopo la deposizione della calcaria magnesifera (*alpina*) dell'arenaria peciliana (*gres bigarré*) e del terreno triasico, con questo divario però, che nel micaschisto li filoni doleritici sono frequentissimi, in minor numero nella arenaria rossa, e scarsi assai ne' susseguenti terreni (*Annali delle scienze del Regno Lombardo-Veneto* 1831. 4°.). Anche Trattenero, avveduto più che molti, e più che molti conoscitore della geognosia del proprio paese, scoprì un nuovo ammasso di dolerite surto tra le marne superiori della arenaria rossa, non prima veduto da nessuno e che pei suoi rapporti con le acidule interessa più che mai la curiosità del geologo. Dalla valle del Prechele, ove fu scoperto, esso si estende in linea retta verso la fonte; ed è ben dedotto il giudizio che le acidule ascendano lungo il piano verticale della dika o ammasso doleritico, e sbuchino fuori dalla roccia pirica, come ha sempre sospettato Trattenero, non già dalla arenaria rossa, come era stato indotto a credere Arduino, e dietro di lui tutti li altri che scrissero sopra quelle acque. Con questa scoperta rimane provato che tutte le acidule del circondario recoarese, non eccettuate quelle del Capitello e di

Staro, attraversano le rocce piriche poste a grandi profondità, prima di giungere alla superficie del suolo. La dolerite, di cui si parla, modificò le marne tra le quali è sbucata, e tra le quali si vede sporgere con le sue cime, o come si usa dire, con le sue teste. Volli distaccare porzione degli strati marnosi tra cui è incassata la roccia ignea, e giunsi per questa via a discoprire uno de' suoi grandi piani, quello cioè che guarda il settentrione. Quivi ho raccolti tutti i pezzi di dolerite, che meco portai a Padova per farvi sopra delle osservazioni. In alcuni vi ho scorto infinità di punti neri, che saranno probabilmente di pirosseno; ma non seppi distinguere i cristalli di felspato, che pur vidi altre volte ne' pezzi schiantati dalle dike doleritiche di que' contorni, quantunque abbia lasciata la roccia per molte ore nell'acido idroclorico, come consiglia di fare Maraschini. La totale scomparsa delle forme cristalline del felspato nella dolerite in discorso, fà supporre che la sua fusione sia stata completa ed abbia per ciò medesimo perduto l' aspetto porfidico, e assunto quello di una roccia omogenea. Quando la decomposizione è alquanto inoltrata vedesi sulla superficie della roccia una specie di polviglio bianco, il quale appare talvolta aggrumato sotto la forma di lievi concrezioni molto untuose al tatto e raschiabili dall' unghia. Vi fu chi proclamò questa sostanza per un vero silicato di allumina (*Kaolin*), quando è invece un silicato di magnesia privo di acqua (*talco anidro*). Nel vicentino li terreni di sedimento, dall' arenaria rossa fino alla calcaria jurese inclusive, si succedono senza interruzione veruna coll' ordine precedentemente accennato, mentre nel Bellunese dove il micaschisto fondamentale ricomparisce in dossi molto elevati, non si trovano li equivalenti della formazione magnesifera (*calcaria alpina*), nè quelli della formazione peciliana (*gres bigarré*) od almeno se di questa ne esistevano le tracce, elleno certo sono state distrutte dai molto estesi sconvolgimenti occorsi nelle alpi Agordine, Zoldiane e Cadorine, dopo che il micaschisto erasi già sollevato.

Quanto all' arenaria peciliana (*gres bigarré*) potrebbe anche darsi che ella esista nel Bellunese e formi la parte superiore della arenaria rossa, dalla quale non sia stata finora distinta per la mancanza del Zechstein, ovvero di quel tramezzo calcario che nella Germania settentrionale separa un' arenaria dall'altra. Sappiamo dalle osservazioni de' geologi allemanni che ove questo tramezzo vi manca (sud-ovest della Germania) le due rocce arenacee giacciono l' una sull'altra e formano in apparenza un solo e medesimo deposito. Ho detto in apparenza, perchè il gesso che ordinariamente accompagna l' arenaria variegata, e le piante delle quali abbonda servirebbero di ottima scorta per sceverarla dalla arenaria rossa che le soggiace. Questa considerazione mi porta a credere che l' arenaria di cui parlo venga nell' Agordino (*Valle Imperina*) rappresentata da una marna gessifera fortemente modificata, che nello interno della miniera vedesi sottoposta alla calcaria di monte Imperina, la quale tutto che alterata e scommessa in varie guise dalla ejezione della lava schistosa e dal trabocco della pirite cuprifera, di cui parlerò tra poco, si dà nullameno a conoscere per calcaria del Jura. Le piante contenute in questa marna cinerea appartengono alla famiglia delle conifere e si riferiscono al genere *Voltzia* di Brongniart, tanto comune nell' arenaria variegata di Sultz-les-Bains, di dove le hanno estratte li Signori Voltz e Murchison. Vi ho riconosciuto la *Voltzia brevifolia* trasmutata in una sorta di bitume pochissimo terroso, e molto lucente. Le foglie piuttosto brevi di questa specie sono coniche, inferiormente carenate, di forma subtetragona, ottuse nell'apice e con la base molto allargata. Esse corrono lungo i lati de' fusti e de' rami della pianta come si osserva nella figura che esibisco di questa specie (*Tavola II, fig.* 6 *a. b.*) (1). Sopra

(1) Il Signor Unger Professore di botanica a Gratz, cui ho mostrato alquanti esemplari di questa pianta, si avvisò di applicarvi il nome di *araucarites*, persuaso forse dell' intima sua cognazione colla *Araucaria excelsa*, o Pino dell' isola di Norfolk nell'Australia; ma le foglie della specie fossile sono corte, ottuse, non già lunghe ed acute come sono quelle della pianta vivente. Anche le parti della fruttificazione poste che

alcuni altri pezzi della suddetta marna si vede un'altra *Voltzia* avente le foglie brevi come son quelle della specie precedente, ma molto più acute nell'apice, carattere che compete anco alla *Voltzia elegans* di Brongniart, a cui però non ardirei affermativamente conguagliarle stante la poca conservazione dell'unico esemplare che ho presente. Esso è molto incompleto e troppo alterato dalla compressione perchè si possa individuarne la specie (1).

Per le esposte osservazioni s' inclinerebbe a credere che la calcaria dell' Imperina, tutto che mancante di fossili e di ogni qualunque indizio di stratificazione, si dovesse considerare un rappresentante del Muschelkalk; ma fallace sarebbe la conseguenza, poichè lungo la destra dell' Imperina evidente ne è la immediata connessione e dipendenza con la calcaria jurese della valle del Cordevole. Tornando al principale argomento nostro, dirò che appunto per assicurarmi della mancanza di alcuni membri del terreno triasico, di cui nella Zoologia fossile io ammetteva a torto la esistenza (pag. 54 e 86), intrapresi de' nuovi viaggi nel Bellunese, dove osservai effettivamente, che le formazioni di antico sedimento non presentano quell'ordine col quale si succedono nel Vicentino. Nelle regioni più eminenti del Bellunese il micaschisto è stato sollevato ad altezze molto significanti, e li suoi dirupi, spesso tagliati a piombo,

---

sieno allo stesso confronto, si mostrano differenti. I frutti della *Voltzia brevifolia* raccolti da Murchison, e paragonati dal Brongniart coi frutti della *Araucaria excelsa* coltivata ne'giardini di Parigi risultarono al tutto differenti, per lo che io convengo col Brongniart sulla reale differenza che v' ha tra il genere *Voltzia* da lui creato, ed il genere *Araucaria*, cui l' Unger sembra disposto di ravvicinare la specie della quale ci occupiamo.

(1) Fuchs parla di questa marna fitolitifera e sembra che sotto il nome di *Lycopodiolithes arboreus* egli voglia indicare la *Voltzia* che si descrive, forse per una certa somiglianza che gli parve di ravvisare tra questa specie, e la figura applicata da Schlotheim al suo *Lycopodiolithes arboreus*. Se con la Tavola XXII num°. 2 di Schlotheim avesse il Sig. Cons. Fuchs avuto sott' occhio anco la figura di Brongniart figlio (*Ann. des. Scienc. nat. T. XV. pl.* 15) io sono d' avviso, che non avrebbe lungo tempo esitato a riporre i fossili di Valle Imperina nel genere delle *Voltzie*, tanto è grande la corrispondenza di essi con la figura e la descrizione dell'Autore.

si mostrano meglio sviluppati che in qualunque altro luogo delle alpi Venete. Dal vedere che la soppressione della calcaria alpina, e della arenaria variegata si verifica ove il micaschisto attinge ad una grande elevazione, e viceversa che queste due rocce si vedono bene sviluppate dove il micaschisto appare più basso (*Vicentino*), parmi si possa trarre una importante conseguenza; cioè che oscillazioni molto gagliarde abbiano elevate le formazioni del micaschisto, e della soprapposta arenaria rossa sopra il livello del mare durante tutto quel periodo di tempo entro cui la calcaria alpina e l'arenaria variegata si sono depositate in altri paesi, poi sieno state nuovamente ricoperte dal mare, il quale vi depose i materiali del Muschelkalk, del Keuper, non che quelli della formazione liasica e jurese.

La potenza cui arriva il micaschisto nell'alto Cadorino non è minore a giudizio dell'occhio di 800 metri (Comelico), giacchè dal fondo della Valle del Piave (*sotto S. Stefano*) si eleva sin presso Dosoledo, paese il più alto del distretto; e li monti arenaceo-calcarei, di cui esso forma la base, attingono ad altezze considerabili. Quello di Nagiaruola, dal quale spiccia un' acqua solforosa, si erige 2458 metri sopra il livello del mare, nè si può dire che sia il più alto del Circondario. Però questa potenza del micaschisto diminuisce per gradi a misura che li soprapposti terreni di sedimento si fanno più alti ed estesi; e così il micaschisto come l'arenaria rossa cessano di mostrarsi intieramente quando la formazione jurese costituisce da sè sola li due terzi dell'altezza delle montagne. È in questa proporzione che il terreno del Jura si eleva sopra un brano del terreno triasico per formare il Monte Pelmo e il Monte Antelao, che sono le due principali eminenze del Cadorino. La prima, stando alla Carta topografica del Regno Lombardo-Veneto, si eleva 3350 metri sopra il livello del mare, e supera di 1669 metri la più alta cima del Jura Vodese, che arriva a 1681 metri soltanto (1); la seconda ne segna 3254, dal che si vede

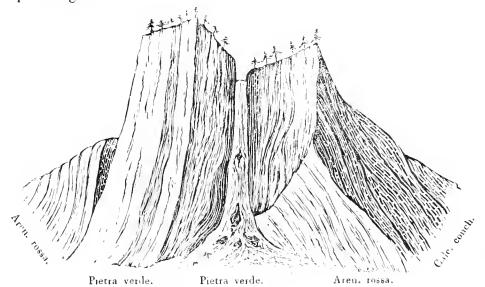
(1) Reunion extraordinaire a Chambery. Pag. 673. 1844.

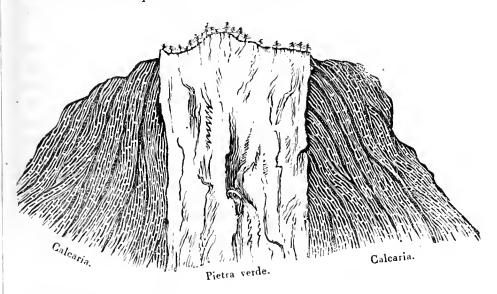
essere meritevole di correzione il giudizio di chi ammise una *eguaglianza di forma e di altezza nella calcaria jurese dell'alpi Venete*, giacchè li suoi monti non eccedono nel Vicentino l'altezza di 2000 metri (*Annali delle Scienze del Regno Lombardo-Veneto*, 1831.).

Allorquando da Innichen si viene nel Cadorino attraversando la valle di Sesto (M. Croce), osservasi in ambi i lati l'arenaria rossa composta di nodi piuttosto grossi di quarzo e di micaschisto, la quale finisce ne' dintorni di Dosoledo per dar luogo al micaschisto che gli soggiace. Nel punto di contatto le due rocce non si sono a vicenda modificate, come avviene spesse volte di osservare ne' luoghi in cui una roccia cristallina si combacia con una roccia sedimentaria. La strada che da Dosoledo conduce a S. Stefano è aperta nel micaschisto, il quale verso l' Est si dirama in dossi molto estesi sino a Campolongo, mentre al sud-est si prolunga nella valle del Piave. Quivi i banchi di micaschisto alternano a più riprese con li banchi d'arenaria rossa a piccoli elementi, e questo fatto, che si vede sulla sinistra del fiume non s' accorda con l' opinione di quelli che veggono nel micaschisto una roccia di sedimento metamorfosata dal calore e dalle emanazioni silicee derivate dal centro, imperciocchè, ammettendo questa ipotesi, non si saprebbe comprendere come l' arenaria abbia potuto in parte trasmutarsi in micaschisto, ed in parte conservare i caratteri che le sono peculiari. Fatti consimili sono stati verificati dal Napione nel Canavese, dal Fortis nella Calabria, dal Brocchi nel Bresciano (*Zool. fossile pag.* 281 *e seg.*), e dallo Studer nell'Agro Bergamasco (*Bull. de la Soc. geol. T. IV, pag.* 50.).

Dal Cadorino il micaschisto si prolunga nel Zoldiano, e di là nell'Agordino, per diffondersi nel Tirolo Italiano.

Alla dritta del Maè, sulla strada, che conduce a S. Nicolò di Zoldo lo si vede sotto la sembianza di dossi non molto elevati sempre ricoperto dalla consueta arenaria rossa talvolta gessifera, e dalle rocce che ad essa succedono.

Nel Zoldiano il micaschisto ha dato uscita alle rocce emersorie che si ammirano tra Goima e S. Nicolò, e che si ripetono nel monte Duram posto tra Zoldo ed Agordo. Comechè in questi luoghi il micaschisto rimanga occultato, pure è ragionevole supporre che vi esista, stante la presenza in que' siti dell'arenaria rossa, che ovunque lo ricopre. A Dont, presso il fiume Maè, l'arenaria rossa occupa la parte più bassa del suolo visibile; e sopra la chiesa dello stesso luogo, si vede essere colà sbucata una roccia verde che ha l'aspetto d'una Lherzolite compatta (afanite), la quale potrebbe riferirsi alle rocce pirosseniche, cui sono state associate tutte le varietà di afanite descritte dall'Hauy. Questa pietra evidentemente emersoria, di cui darò più sotto i caratteri si erige alquanto presso la chiesa suddetta, poi viene ricoperta dall'arenaria e dalla soprapposta calcaria conchigliare (Muschelkalk); indi si rialza nuovamente non lungi da Cercena, e finisce coll'aprirsi tra le due rocce un varco molto esteso, formando de' cunei di cento metri di spessore, che ascendono fino alla più alta cima di monte Zuel, posto sulla dritta sponda del Maè, come lo esprime la sottopposta figura.

Sezione di Monte Zuel.

Presso Astregal, sulla sinistra del fiume predetto, si vede un membro della stessa emersione injettato in direzione verticale tra gli strati di una calcaria, che dire non si può conchigliare perchè manca di petrificazioni, ma non manca in quel sito l'arenaria rossa, che pur serve di ottimo indizio per giudicare dell'epoca alla quale la roccia calcaria appartiene. Questa massa colossale, che allorquando è bagnata dalla pioggia splende del più bel colore verde di asparago, ha la larghezza di oltre sessanta metri, e si erige fino all'ima parte della montagna conservando sempre la stessa dimensione.

Ho già notato nella Zoologia fossile (pag. 65) che nel punto di combaciamento delle due rocce, l'una pirica l'altra nettunica, non si palesa alcuno indizio di sofferta modificazione; ma la silice trovata in tutte le calcarie che si sono messe al contatto della pietra verde, vi esiste anco nella calcaria di Astregal, sebbene in minore quantità delle altre. Non sempre le rocce ignee produssero alterazioni sensibili sulle rocce tra cui si sono introdotte; e un bell'esempio ci porge il micaschisto di Recoaro (non lungi dal ponte), dove un potente filone di

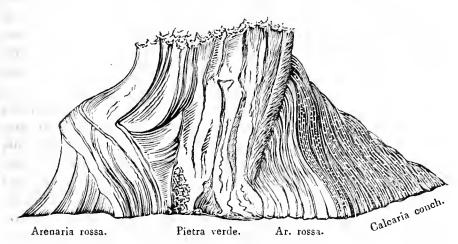
dolerite non indusse cangiamento veruno sulle parti divise della roccia sfogliosa, quantunque la primitiva sua disposizione si palesi notevolmente sconcertata.

Nell' opera sopracitata ho detto vedersi la pietra verde nella valle del Pisolot e nella vicina montagna di Piajol, posta nelle vicinanze di Bragarezza, un miglio circa dalla Pieve di Zoldo. In questo ultimo luogo la roccia verde è talmente compenetrata nella calcaria, che ne forma le salbande, che non è possibile distinguere il punto di contatto tra l' una e l' altra roccia; ma ne' pezzi che dovrebbero segnare i limiti della divisione, si vede invece un impasto formato di ambe queste pietre (*Zool. fossile pag.* 65.).

In una mia lettera al Sig. Boué, inserita nel Giornale di Treviso (1828), inciampai nello equivoco di prendere per roccia verde una roccia di sedimento che simula in particolar modo la prima, e ciò per non aver potuto in quel tempo riconoscere li suoi rapporti col resto del terreno di cui forma parte; rapporti che ora si possono distinguere mercè li tagli che si sono fatti in quel tratto della grande strada di Allemagna, che resta tra Peajo e Rumiano. Io dovrò riparlare della marna verde modificata di Peajo in altro luogo dello scritto presente, per far conoscere la certa corrispondenza di formazione ch' essa ha con una roccia conchigliacea del terreno triasico; ed intanto riprendo il mio dire sopra gli accidenti che accompagnano la giacitura della pietra verde in altri luoghi del Bellunese.

Se per recarsi ne' luoghi più sopra citati, l' osservatore vorrà partire dal paese di Agordo, ei vedrà nella sua traversata la continuazione dei fenomeni prodotti dalla uscita della pietra verde; fenomeni già descritti dall' egregio Cons. Signor Fuchs nell' opera per lui pubblicata in Vienna sulle alpi Venete (*Venetianer Alpen* 1844.).

Partendo da Agordo per Piacent e Dugon, e superata la vetta del Duram, si arriva ad un punto dove gli strati dell'arenaria rossa cangiano repente la loro giacitura; e le maniere diverse di contorsioni e di spezzature da essi sofferte, preludono

le forti perturbazioni prodotte dai sollevamenti. Pochi passi più avanti, gli strati così sconvolti prendono la direzione di ovest sud-ovest per appoggiarsi alla pietra verde, la quale per qualche metro si erige perpendicolarmente; indi va a perdersi verso il nord-est, sotto l'arenaria: mentre al sud-ovest attraversa la valle e scorre in una direzione parallela alla catena calcaria di S. Sebastiano e di monte Moscovin; poi si dischiude un varco trammezzo l'arenaria e la calcaria di questa medesima catena contorcendo e raddrizzando le stratificazioni di ambe queste rocce nel modo espresso nella seguente figura.

Ma il luogo che più d'ogni altro può metterci in chiaro sull'origine pirica della pietra verde si è la Valle di S. Lucano, e li suoi dintorni. Quivi l'arenaria rossa fiancheggia ambi i lati della Valle, e soggiace alla calcaria conchigliare, disposta in istrati presso che orizzontali o di poco inclinati. Per qualche tratto questi strati si mantengono paralleli all'orizzonte, poi nella montagna detta Malgonera, si fanno verticali in causa della pietra verde che li dislocò dalla primitiva loro posizione per nicchiarvisi nel mezzo e per erigervisi fino quasi al vertice della montagna. In questo luogo la pietra verde fa evidentemente passaggio al porfido pirossenico; e ove conserva la

ordinaria sua tinta, contiene cristalli di felspato e di pirosseno. Nelle sezioni geologiche de' Congressi scientifici di Pisa, di Firenze e di Milano, si è voluto con forza sostenere essere la pietra verde una marna indurata, non già una roccia d'eruzione, ad onta de' fatti allegati da me e dal Sig. Cons. Fuchs per dimostrare il contrario. È però singolare che quegli il quale si oppose alla verità de' fenomeni più sopra narrati, confessi adesso di non avere portato mai il piede ne' luoghi in cui li detti fenomeni si manifestano (*Atti della 6ª. Riunione degli Scienziati, p.* 578.).

Il colore della roccia di cui ho descritta la geognosia non è sempre della stessa intensità; talvolta è verde chiaro, talvolta verge al bluastro, talvolta al verde gialliccio, e più spesso al verde d' asparago. Il suo aspetto è solitamente semplice, analogo a quello delle rocce di compage omogenea. Alcune volte, come è detto, contiene piccoli cristalli allungati di felspato terroso, aventi il colore stesso della pietra in cui sono presi, e qualche volta vi si trovano per entro grani di pirosseno. La sua spezzatura si manifesta ora scagliosa, ora oscuramente granulare, ora terrosa, secondo i gradi diversi di alterazione alla quale soggiacque, quindi la sua durezza riesce molto variabile. Li acidi producono dapprima una debole effervescenza, che poi svanisce sollecitamente; e così nel colore che nella composizione si avvicina assaissimo alla Lherzolite de' Pirenei analizzata da Vogel e descritta dall' Omalius (*Des roches considerées minéralogiquement.* Paris 1841.).

Nell' analisi chimica della pietra verde già riportata per esteso nel volume sopra indicato della Biblioteca Italiana, si ottennero presso a poco li materiali medesimi che aveva ricavato dalla Lherzolite il Sig. Vogel, ad eccezione del principio colorante, che nella prima è il ferro in due differenti stati di ossidazione, e nella seconda, oltre il ferro, esistono tracce di cromo ossidato (1).

---

(1) Non conosco veruna roccia pirica che più di questa si assomigli alle Lherzoliti che attraversano le calcarie de' Pirenei, sopra le quali produssero le stesse modificazioni che noi abbiamo osservato nelle calcarie delle nostre alpi (*Bull. de la Soc. geol. de France T. XII, pag.* 330.).

Per le cose narrate resta provato, che la pietra verde delle alpi Venete è una roccia emersoria non già una *marna indurata*, come alcuni hanno creduto di qualificarla, forse scambiando con questa un' altra roccia di sedimento, che per avere anch' essa la tinta verde può essere stata confusa con la prima. Di fatto le marne altro non sono che rocce composte essenzialmente di allumina e di calce; laddove la pietra analizzata dal Signor Meneghini si appalesò poco fornita di allumina e meno ancora di calce. Meneghini da cento parti della roccia sottopposta alla analisi ne ricavò settanta di silice (*Bibl. Italiana. Vol. cit.*); e la discoperta di una sì notabile quantità di terra silicea ha messo fuori di dubbio il sospetto che le calcarie selciose dell' alto Bellunese sieno rocce modificate dalla pietra verde, con le quali si è messa al contatto. Appoggiato a questa analisi, e sostenuto dalle osservazioni che ho fatte sul disponimento della pietra verde nelle alpi Venete, ricusai di acconciarmi al giudizio del Marchese Pareto, uno de' componenti la terza Riunione delli Scienziati tenuta in Firenze, il quale propose risguardarla come roccia metamorfica; per ciò che se tale ella fosse, vi si dovrebbe trovare vicina la lava che operò sì fatta metamorfosi, tanto nella supposta marna verde quanto nelle calcarie. Ma questa lava manca in tutti i siti ne' quali la pietra verde si dà a vedere; quindi egli è evidente che aderendo al consiglio del march. Pareto non sarebbe facile individuare per via di raziocinj e di induzioni dove sia nascosta la lava che selcificò le calcarie, giacchè non è a supporsi che una roccia semplicemente modificata, quale egli crede la pietra verde, abbia potuto modificare tutte le circostanti calcarie.

Per tornare all' argomento principale di questo paragrafo dirò che dal Zoldiano il micaschisto si dilata nell' Agordino, dove contiene presso a poco le sostanze medesime che dicemmo trovarsi in quello del Vicentino, ma si presenta più in grande e sotto un numero forse maggiore di varietà accompagnate generalmente da filoni di quarzo massiccio, che le intercidono in diverse maniere di direzioni. La potenza maggiore cui arriva

il micaschisto è quella verificata dal Cons. Sig. Fuchs nel monte Armarolo, presso Agordo, dove attinge l'altezza di 1494 metri.

Marzari consiglia di non confondere questa roccia con lo schisto nero carbonioso di Riva (attiguo alla miniera) giacchè la nessuna somiglianza di questa roccia cuprifera col micaschisto e la sua posizione, rispettivamente a quella delle rocce tra le quali è incassato, consuona all'opinione di coloro che lo credono il prodotto di una emersione surta in compagnia della grande massa metallifera di rame piritoso, nella guisa istessa che il porfido pirossenico è coevo ai filoni metalliferi dell' alto Vicentino, e quindi di più recente età che non le rocce alpine circostanti. Fuchs è di contrario avviso e vuole che lo schisto nero sia coetaneo al micaschisto, solo perchè la steatite schistosa quarzifera che taglia in varj sensi la gran massa di pirite, si congiunge ne' luoghi più profondi della miniera allo schisto nero trasmutato in grafite; circostanza che prova secondo me l' indipendenza dello schisto nero e della steatite, piuttostochè la loro contemporaneità col micaschisto fondamentale. Di fatto, se il deposito metallifero eruppe in unione allo schisto nero, parmi invece più naturale il pensare che ai filoni steatico-quarzosi inclusi nel primo non fosse impedito di passare nella massa del secondo, giacchè nello stato di ignea pastosità in cui si trovavano in origine le due rocce, poterono eziandio esse stesse compenetrarsi a vicenda, come verrò dicendo in appresso.

Io visitai le località che meglio possono illuminare il geologo sulla vera origine e giacitura della roccia nera schistosa, e vidi che al sud-est appare addossata alla calcaria della valle Imperina: mentre al sud-ovest (*sotto S. Floriano di Riva*) giace sopra il micaschisto, e quest' ultimo contatto tra le due rocce schistose prende una maggiore importanza nel caso nostro, perchè accompagnato da una qualche metallizzazione, ch'è la sola visibile al di fuori della miniera. Di maggior momento è la scoperta fatta l'anno 1782 di una antica galleria, la quale finisce in un ammasso stratiforme di rame piritoso posto tra lo schisto nero che ne forma il tetto, ed il micaschisto che ne

costruisce il letto. E qui giova osservare che la calcaria (a cui soggiace il consueto tramezzo di arenaria rossa) è la roccia sulla quale posa la massa piritosa; mentre lo schisto nero ricopre la detta massa a guisa di mantello. Pochissimi per ciò stesso debbono essere i luoghi nei quali la pirite cuprifera si trovi adagiata sul micaschisto, come si ammira nella galleria sopracitata; laddove parecchi sono i punti nei quali lo schisto nero vedesi adagiato sulla preesistente calcaria, occupando così il posto della pirite. Questo singolare addossamento è stato osservato in più luoghi da varj geologi, e nessuno ch' io sappia, dalli Signori Pasini e Fuchs in fuori, dubita che lo schisto nero non sia stato spinto su dalla ejezione istessa che slanciò sopra la calcaria la massa piritosa, quella che rese famoso il distretto di Agordo per la quantità di rame che somministra all'erario, e per la copia delli operaj che da oltre due secoli vi si occupa nella escavazione, e nella riduzione del minerale in metallo. Medesimamente sono state avvertite da molti le modificazioni prodotte dalla roccia ignea sulle rocce preesistenti, e specialmente sulla calcaria, alla quale si accollò sopra otturando la valle che prima doveva esistere tra il monte Imperina e il monte Poì, e convertendo una parte della sua massa ora in gesso anidro, ora in gesso salifero, ed ora in una specie di amalgama ignea, che è lo stesso schisto intrecciato talvolta col calcare, talvolta col gesso (1). Gli effetti prodotti dalla emer-

(1) Il gesso appare salifero nel luogo detto lo Spunt di S. Antonio (dentro la miniera) dove più esteso riesce il combaciamento suo con lo schisto nero; e infinità di cristalli di solfato di soda sono stati tratti dalla massa gessosa dal Sig. Zanchi e da me (*Giornale di Brugnatelli. Bim.* 1. 2. 1820.). Il fenomeno del gesso salifero sarebbe esso solo sufficiente per giudicare dell'origine ignea della soprapposta roccia schistosa, quando anche non si sapesse che tra i materiali che la compongono vi entrano la calce e la soda. È noto che quest'alcali esiste in tutte le lave; e l'analisi ripetuta sopra lo schisto nero somministrò cinque parti di soda e otto di calce (*Giornale dell' italiana Letteratura. Bim. v.* 1821. *nella nota.*). Fu dietro questa analisi che si arguì la genesi del sale di soda e la formazione del gesso, supponendo che lo zolfo de' solfuri dello schisto nero si sia acidificato al momento della emersione ed abbia generato li due solfati di calce e di soda.

sione dello schisto nero sono visibili anche ne' luoghi dove adesso lo schisto manca. Sulla sponda destra della valle Imperina (alla foce del torrente) le marne dell'arenaria rossa hanno ricevute tali contorsioni da non ammettere dubbj sulle cause perturbatrici che possono averle generate. Più inferiormente nel lato stesso della valle medesima gli strati della calcaria soprapposta alle marne spariscono, e la montagna assume per quel verso l'aspetto di una muraglia, non più stratosa, come diceva Arduino, ma in massa, o sotto quella istessa sembianza che al Ramond si presentarono le *Penombre* dolomitiche dei Pirenei. Ciò esposto si acconsentirà forse che questi fenomeni sono da ascriversi alla comparsa della pirite cuprifera, e non alla roccia schistosa che seguì per qualche tratto la pirite per adagiarvisi sopra? Ma dov' è la pirite? non mai dove si ammirano le alterazioni indotte nella calcaria, le quali mostrano di essere state operate dallo schisto nero che gli soprasta, non già dalla pirite che là manca. Se lo schisto fosse una roccia semplicemente modificata dalla pirite come pensano alcuni, e non il materiale istesso del micaschisto fondamentale fuso e spinto su dalla forza della ejezione, ognuno vede che ci sarebbe tolta la via di spiegare il fenomeno, non potendosi ammettere che una roccia solida, uno schisto semplicemente modificato, sia stato capace di gessificare il carbonato di calce, di rendere salifero il gesso, e di produrre le amalgame rammentate più sopra. Non si vuol già negare che la pirite non abbia prodotto effetti grandissimi nelle rocce sopra le quali si è coricata; ma questi effetti non sono stati finora osservati da nessuno, perchè a nessuno è dato di portare lo sguardo fino alla roccia che serve di letto alla massa piritosa, quantunque gli scavi fatti attraverso la medesima sieno stati condotti ad oltre duecento metri di profondità verticale. Per l'opposto, le osservazioni pubblicate dal Co. Marzari e da me intorno i fenomeni della valle Imperina sono conformi a quelle di tre distinti professori di geometria sotterranea, Demscher, Mayer e Tommasi, e sono quindi rivestite di quel carattere imponente di autenticità, che non ammette eccezioni.

Al nord del Friuli il micaschisto presenta presso a poco li stessi fenomeni che abbiamo osservato nell'alto Bellunese; non mai però si erige ad altezze così cospicue come sono quelle a cui attinge nel Cadorino. Viene a quando a quando attraversato da vene e filoni di quarzo come da per tutto altrove (tra Val Buffon e Germoglia), e porta ovunque sopra di se la consueta arenaria rossa, composta talvolta di nodi piuttosto grossi di micaschisto e di quarzo in massa. Non credo per ora di fermarmi a indicare i luoghi delle alpi Carniche ne' quali il micaschisto e l'arenaria rossa sono visibili, perchè avrò argomento di ricordare ambo queste rocce quando parlerò delle calcarie fossilifere, cui esse servono di base.

TERRENO TRIASICO.

FORMAZIONE DELLA ARENARIA ROSSA.

La più antica delle rocce di sedimento è l'arenaria rossa, che ricopre, come dicemmo, il micaschisto di molte località, stendendosi dall'alto Vicentino alle alpi Bellunesi sotto la forma di banchi più o meno poderosi, senza però mostrarsi in ogni punto dello spazio compreso tra le indicate provincie. Se si pone mente al suo progressivo andamento si scorge che ove le formazioni che la ricoprono sono molto potenti, essa lasciasi appena vedere o manca del tutto; e, ove le dette formazioni si palesano poco sviluppate, riveste saltuariamente ora le sembianze d'una roccia *indipendente*, ora quelle di una roccia *subordinata*. L'aspetto di questa arenaria non è da per tutto costante, nè sempre conserva lo stesso colore. Contiene cementati nella sua pasta argillo-ferruginosa il quarzo, il felspato ed il micaschisto, talvolta in pezzi molto grossi, talvolta in grani così esigui da non poterli discernere con la lente, e in questo caso si assomiglia più che ad altro ad una argilla indurita spesse volte schistosa. Il suo colore può essere grigio-oscuro, bianco-sudicio, e più di sovente rossastro. Questa ultima tinta attribuita da alcuni alle parti ferruginose dei porfidi che si trovano

al suo contatto può esistere anco in quelle arenarie che giaciono più centinaja di leghe lungi dal porfido (*Zool. fossile, pag.* 40.).

Nel vicentino l'arenaria rossa si eleva a notabili altezze, ma non sempre ha per base il micaschisto, imperocchè giace talvolta sopra la dolerite surta prima (*Recoaro*). Non contiene avanzi animali di sorta alcuna, ma abbonda invece di piante, che la rendono bituminosa. Io possiedo un grosso tronco di palmacite convertito nella sostanza istessa della roccia, ad eccezione di poche scaglie di bitume, che occupano il luogo della corteccia, benchè nella massa arenacea da cui fu tratto esista infinità di vene di litantrace perfetto (Recoaro). Tronchi di piante arundinacee colla sola corteccia bituminizzata vi trovò Maraschini, e molti esemplari sono stati da esso depositati nel gabinetto Castellini, alcuni de' quali sono analoghi alle piante che il Capitano Gutbier riconobbe caratteristiche del *rothe tode liegende* della Sassonia. Il Signor Trattenero scoprì al di sotto della fonte acidula uno strato di litantrace ben più grosso di quanti se n' erano veduti per lo innanzi nella arenaria rossa di quella provincia; e questi fatti dimostrano che il vero carbon fossile non manca all'Italia, come è sembrato a taluno di poter asserire.

Oltre il litantrace racchiude l' arenaria recoarese nodi di ferro ossidato con indizj di malachite; e sulla faccia esteriore de' suoi strati si scorgono talvolta delle efflorescenze saline di magnesia solfata e di gesso.

In nessun luogo dell' Italia il terreno triasico si presenta così completo come lo si osserva nel vicentino, imperciocchè cominciando dall'arenaria rossa fino al Keuper, le rocce si succedono dal basso all'alto coll' ordine seguente: = 1°. Arenaria rossa con litantrace. = 2°. Calcaria magnesifera (alpina) e le sue marne. = 3°. Arenaria peciliana (gres bigarré) con calcaria oolitica rossa e con gesso. = 4°. Muschelkalk e le sue marne con fossili caratteristici di questa formazione. = 5°. Arenaria Keuperiana la quale si associa alla precedente in tutti i

luoghi in cui si trova, e soggiace alla calcaria jurese. La nettezza di queste cinque formazioni dimostra quanto poco sia fondata l' opinione di coloro che suppongono essere stata soppressa nelle alpi Venete la serie delle rocce di sedimento anteriori alla formazione del Jura, e fa conoscere ad un tempo che nelle alpi vicentine si ripetono con lo stesso ordine di successione quelle rocce medesime che si osservano nella Germania settentrionale.

Ciò che a Recoaro merita speciale riguardo si è il porfido pirossenico, sbucato in varj siti di quelle alpi, e adagiato sotto sembianze parecchie nelle valli, o sulle pendici de' monti, producendo diverse sorta di modificazioni. Alla emersione di questo porfido vuolsi attribuire il sollevamento degli strati del sistema jurese e del sistema cretaceo, entrambi dolomitizzati dalle emanazioni magnesiache che accompagnarono la sua uscita. L' apparizione di questa roccia porfidica, che seco addusse i filoni metalliferi da cui è intersecata, sembra essere stata coeva alla gigantesca emersione delle roccie pirosseniche del Tirolo e dell' alto Bellunese avvenuta dopo il consolidamento della parte superiore del terreno cretaceo.

La zona arenacea di cui imprendo a parlare ricomparisce nell' agro Feltrino, e nominatamente nella valle del Miss, dove si mostra in connessione concordante con la soprapposta calcaria conchigliare. Di là passa nelle vicinanze di Vallalta per erigersi in dirupi molto alti e scoscesi. Quivi l'arenaria assume l'aspetto d' un conglomerato composto di frammenti grossissimi di micaschisto; e piegando verso la valle delle Monache, la si vede al contatto del porfido rosso quarzifero tanto diffuso nel vicino Tirolo. De Buch e Marzari hanno collocato questo porfido tra il micaschisto inferiore e l'arenaria variegata superiore riputandolo più antico del Muschelkalk; laddove Fuchs, nella recente sua opera sulle alpi Venete si mostra molto perplesso nel decidersi sull'età relativa di esso, rispetto a quella dell'arenaria rossa inferiore di Vallalta. Fatto sta poi, che l'apparizione del porfido rosso quarzifero non risale ad un'epoca tanto lontana

quanto la vorrebbero li nominati geologi, benchè la sua emersione abbia preceduto quella del porfido pirossenico, ed ecco gli esempj. A Lavis il terreno triasico, segnatamente il Muschelkalk, ha subìto una forte modificazione dalla massa fusa del porfido rosso quarzifero accollatavi sopra; e la stessa alterazione ha sofferto la calcaria jurese in tutti i luoghi, ne' quali essa trovasi al contatto di detta roccia (Valle della Brigida, ecc.). Medesimamente ove il grès variegato, a detto di De Buch (*Ann. de Chimie. Tom.* XXIII) sembra superiore al porfido (Kollmann e Castelruth) si vede invece che il secondo è addossato al primo, ed appartiene ad un' epoca più recente. Del resto il porfido quarzifero della valle delle Monache contiene filoncelli di baritina rossa e cristalli di calce fluata, sostanze che pur si veggono nelle enormi masse porfidiche descritte dal barone De Buch nelle sue lettere dettate a Pergine nel 1798 ed in altri suoi scritti posteriori.

Ho accennato più sopra che a Vallalta l' arenaria rossa si converte in un conglomerato composto di rottami di micaschisto; ed ora debbo aggiungere che questa roccia perde l'aspetto di conglomerato, diviene per gradi schistosa verso la sua base, e dà ricetto ad una miniera di cinabro, ove più ove meno ricca di mercurio. Appresi dalle ispezioni ivi fatte negli anni addietro che il cinabro trovasi disposto in vene di tre o quattro linee di spessore, ed anche a spruzzi o macchie, sovente accompagnate da grani di pirite. Le vene sono di colore grigio-fosco e di aspetto cristallino, laddove le macchie hanno una tinta rosso-vermiglia ed uno aspetto terroso. La prossimità di questa miniera ai gran depositi metalliferi di valle Imperina e di Tiser, come pure le forti ondulazioni che si scorgono nel suolo di Vallalta, e la strana positura assunta dagli strati dell' arenaria rossa e del micaschisto, di cui il suolo stesso è quasi intieramente costituito, fanno supporre che tali perturbazioni sieno state prodotte dallo sbocco del porfido quarzifero e da forti ejezioni metalliche. Questa congettura tanto conforme alle idee generalmente ammesse dai geologi sulla origine dei metalli,

conduce a pensare che la miniera di Vallalta sia il prodotto di sublimazioni emanate dal centro della terra, le quali tanto più debbono comparire copiose, quanto più gli scavi verranno profondati; giacchè, percorrendo le osservazioni fatte in diverse miniere dell' Europa, si rileva che i depositi metalliferi sono in generale molto ricchi nelle parti più vicine al centro dal quale derivano, e poveri o sterili nelle più lontane. Difatto, li frammenti di arenaria impregnata di cinabro, che, varj anni sono, staccai da un pozzo allora poco profondo, si palesano alla bilancia di Nicholson meno gravi degli altri che mi furono non ha guari presentati dal Signor Bosio, attuale proprietario della miniera; e gli assaggi docimastici che si sono fatti confermano ancora più il predominio del mercurio ne' pezzi di roccia schiantati nelle parti più basse de' pozzi, in confronto di quello ricavato ne' depositi arenacei superiori. E qui credo di aggiungere che il mercurio esiste in altri luoghi della zona arenacea Bellunese, avendolo io veduto in una serie di venuzze a Cadena nel monte Visdende, ove ha origine il fiume Piave; e straterelli dello stesso metallo sono stati osservati nel Comelico, e nel così detto Pian di Cordevole (*Zool. fossile, pag.* 317.).

L' arenaria rossa è specialmente sviluppata alle falde settentrionali delle alpi Cadorine, che guardano la Pusteria. Da Innichen ascendendo la valle di Sesto, per riescire nell' alto Comelico, non altro si vede che arenaria rossa inchiudente pezzi angolari di micaschisto e di quarzo con indizj di litantrace, la quale continua fino al vertice di Monte Croce, e si mostra eziandio nel versante occidentale fin presso Dosoledo, ove scomparisce per cedere il posto al micaschisto sul quale riposa (1). Pei mutamenti di giacitura indotti da' sollevamenti

(1) Anticipo qui la notizia d' una osservazione di cui dovrò divisatamente parlare in altro mio lavoro. A Campo Torondo, sulla sinistra del torrente Padola, ad un' altezza di oltre due mila metri sopra il livello del mare, si erige un potente deposito di molasse grigio riferibile al terreno terziario medio; e sullo stesso piano ha potuto del pari accumularsi un deposito egualmente esteso di calcaria d' acqua dolce. Ambo queste formazioni sono appoggiate alla catena jurasica, che s' innalza all' occidente della strada,

essa ricomparisce, com' è detto, nella valle del Piave (*S. Stefano*) sotto forma di banchi colossali che alternano con li banchi di micaschisto. Se dalla massima altezza a cui attinge l' arenaria rossa nella valle di Sesto si tira una linea, e la si abbassa fino al livello cui la stessa roccia s' innalza nella valle del Boite, essa formerebbe coll' orizzonte un angolo di oltre ottanta gradi di inclinazione, e ciò porta a scoprire che la potenza dell' arenaria di Monte Croce sta a quella dell' arenaria della Valle del Boite come otto ad uno. Si vede da ciò, che volendo percorrere la strada di Allemagna da Tai fino a Toblach, senza penetrare nella sottoposta valle del Boite (*Perarolo*) che gli è parallela, ci è vietato di vedere la roccia su cui riposano li terreni triasico e jura-liasico di detta strada, giacchè quanto più la roccia progredisce verso ponente tanto più degrada la sua potenza, finchè, ridotta minima la sua altezza, si perde sotto il letto del fiume prima forse di giungere al ponte di Cibiana. Non saprei decidere se il fenomeno della sua scomparsa possa avere qualche legame con l' apparizione delle rocce abnormi o di trabocco che dislocarono li terreni calcareo-arenacei posti tra Borca e Rumiano, ma so bene che in nessun punto della strada Ampezzana si scorge l' arenaria rossa; meno poi nelle valli che convergono in quella del Boite, le quali hanno sempre per fondo ora la calcaria conchigliare, ora la jurasica.

Se nelle gole per me visitate che mettono nella valle Ampezzana le acque non giunsero a denudare la roccia più bassa del terreno triasico, è però molto probabile che altre gole da me non esaminate, quella principalmente che si apre al di sotto

---

e sembra che l' arenaria rossa sia la roccia che loro serve di base, giacchè alla sinistra del torrente non altro si osserva che banchi di questo conglomerato. Così il molasse come la calcaria d' acqua dolce sono rocce che vengono, a preferenza d' ogni altra, adoperate come pietra da fabbrica.

Il molasse, o arenaria grigia di Campo Torondo, si rassomiglia perfettamente a quello che si estrae a Fregona nel Cenedese, ed è il più alto de' depositi terziarj ch' io m' abbia osservati nelle alpi Venete.

di Cima Banche (1) per la quale esce il Rienz, sia stata più profondamente solcata delle altre, e mostri nel suo fondo la roccia di cui siamo andati favellando finora. Massi erratici piuttosto voluminosi di arenaria rossa incontrai sulla strada che dal ponte sotto cui passa il Rienz conduce al lago di Toblach; ned essendo riuscito a vederne di simili in altri punti della valle entrai nel ragionevole sospetto che il torrente li abbia colà portati nelle frequenti sue piene.

Sulla progressione dell' arenaria rossa nelle alpi Agordine, Zoldiane e Cadorine ho già parlato abbastanza nelle pagine precedenti, e più diffusamente nella Zoologia fossile. Solo dirò qui di transito, che presso Agordo (San Lucano, Colle di Foggia, ecc.) quest' arenaria, per sofferta modificazione, simula l'aspetto porfiroideo, e costituisce una pietra refrattaria, molto adoperata nella costruzione de' forni fusorj della vicina miniera di rame. Ad onta dell' alterazione cui soggiacque la roccia, vi si veggono per entro de' ciottoli di quarzo e di micaschisto, i quali non lasciano alcun dubbio sulla sua origine sedimentaria.

Dirò per ultimo, che se nell' arenaria rossa del Vicentino mancano le reliquie organiche animali, altrettanto non si può dire di quella di Saisser nel Tirolo, che contiene copiosi modelli di bivalvi conguagliabili al genere Chama (*Zool. fossile, pag.* 53.); nè dell' altra del Zoldiano in cui trovai impressioni d' un *Ammonites* fornito di più serie di varici o di spine sui lati, e conseguentemente riferibile alla famiglia degli armati di De Buch. Impressioni e modelli di bivalvi sono stati dal Consigliere Sig. Fuchs osservati nell' arenaria rossa dell' Agordino, i quali mostrano di avere qualche analogia con li modelli da me trovati ne' massi erratici che dissi aver veduti tra il villaggio di Landro ed il lago di Toblach, i quali contengono eziandio infinità di fusti di Palmacite trasmutati essi pure nella sostanza medesima della roccia.

---

(1) Cima Banche (Gemerk) ch' è il punto più alto della Regia Strada, s' innalza sopra il livello del mare 5000 piedi. Quivi il Rienz si divide dal fiume Boite per unirsi ad un confluente dell' Adige, mentre il Boite cala nella valle Ampezzana per congiungersi al Piave.

FORMAZIONE DEL MUSCHELKALK.

Tutte le osservazioni locali fatte in varj luoghi delle alpi Vicentine rivelano che sopra l'arenaria rossa riposa una calcaria grigia magnesifera priva di fossili, di frattura talvolta scagliosa, talvolta concoidea, la quale riceveva in addietro la denominazione di calcaria alpina. Laddove questa roccia è attraversata dalla dolerite, essa appare modificata in calcaria granosa d' un bianco grigiastro, ed anco in marmo di colori diversi, quando contiene molta argilla. Questa calcaria, già divisatamente descritta dall' Ab. Maraschini è coperta, come altrove ho detto, dall' arenaria peciliana, mancante essa pure di fossili, accompagnata frequenti volte dal gesso e da una calcaria oolitica rossa considerata dal Maraschini come caratteristica della formazione peciliana (1). È sopra di questo tramezzo arenaceo che si eleva il Muschelkalk, di cui tocca parlare. Codesto si trova disposto in tre grossi banchi, l' inferiore de' quali contiene segni di litantrace, impronte di vegetabili e conchiglie. Queste ultime vedonsi con più di frequenza sulla superficie degli strati, e sono *Terebratule*, *Avicule*, *Myophorie* e *Posidonomye*, associate a fusti di *Crinoidi*, tra cui ven' ha alcuni di tetragoni. Il secondo banco, più ferruginoso del precedente, si risolve in calcaria ocracea bruna, e lascia sovente isolate le conchiglie e li crinoidi che vi sono per entro, e che si mostrano analoghi a quelli del banco inferiore. L' ultimo consiste in piccoli strati duri, compatti, sonori, spesso dendritici e stelliferi, a cui sembra soprastare un' altra calcaria grigia, frammentaria, a frattura scagliosa, piena di conchiglie per modo che ne risulta una lumachella. Fra questa calcaria e quella di Bleyberg Maraschini vi trovò grande analogia, astrazione facendo dal lustro perlaceo

---

(1) Nel grès bigarré della valle di Mondonovo presso Schio il Signor Pasini trovò modelli e impronte di bivalvi vicinissime alle veneri, le quali non eccedono la grandezza d' una lente (*Zool. fossile. pag.* 105.).

ed opalizzante che si ammira in quella della Germania (*Saggio sulle formazioni del Vicentino, pag.* 82.). Vedremo in altro luogo che il muschelkalk della valle Ampezzana non manca neppure di questo carattere per essere compiutamente simile alla calcaria conchigliare della Carintia.

In generale tutti questi banchi sono alcun poco magnesiferi, e contengono la silice a segno da poterne trarre scintille coll'acciarino. Al sasso della Limpia vi sono conchiglie, che da calcarie che dovevano essere in origine si sono quasi per intero cangiate in selce. Un fatto consimile è stato avvertito ultimamente dal Signor Coquand a Colmar nel dipartimento del Varo, dove la selcificazione del muschelkalk è stata così grande, che li gusci de' fossili si sono per intero selcificati, mentre l' interno loro potè riempirsi di cristalli di spato fluore, di galena e di altre sostanze ivi recate per sublimazione dalle emanazioni ignee che accompagnarono l'apparizione delle rocce piriche di quella contrada (*Bull. de la Soc. geol. T. IV, p.* 329.) (1).

Il muschelkalk del Vicentino è spesso metallifero, come lo è in molti luoghi dell'alto Bellunese, e contiene nella sua massa la baritina, il piombo solforato, la blenda ed il manganese. I luoghi ne' quali si può specialmente osservare questa roccia sono il monte Spitz, ed il seguito della catena montuosa posta al sud-ovest di Recoaro. Si vede pure a Rovigliana, cominciando dal Capitello della Commenda, e continuando lungo le alture sino a Pinalto; come si mostra in parecchi monti di mezzana altezza nella comune di Valli, in molti luoghi del Tretto, ne' contorni di Posina, ecc., ecc. Nel Veronese, dove le roccie visibili più antiche spettano al terreno del Jura, è più che verisimile che il terreno triasico vi manchi, nè so averlo mai

(1) Tali modificazioni occorse in un gran numero di luoghi, ove sonovi terreni d' injezione o di trabocco, non si debbono confondere con quelle osservate ne' terreni di sedimento, che distanno da rocce eruttive, imperciocchè quest' ultime vogliousi prodotte da cause elettro-chimiche. (Virlet. Notes sur quelques phénoménes de déplacements moleculaires qui se sont operès dans les roches posterieurement a leur depôt. *Bull. de la Soc. geol.* Deuxieme serie. Tom. II, pag. 198.).

incontrato in nessuno de' monti che ripetute volte ho visitati di quella provincia. Tuttavia il Sig. Boué, nella Memoria sui terreni secondarj delle alpi Alemanne (*Annales des mines N.° 4, 1824*), dice che il muschelkalk esiste nel Veronese, ma si astenne dall' indicare il luogo in cui lo ha veduto.

Se nel Vicentino l' intera serie delle formazioni triasiche e juresi è molto bene sviluppata (*Valle del Prechele*), altrettanto non si può dire delle formazioni analoghe che si dilatano in altri paesi del Veneto, imperciocchè in tutte le località del Bellunese dove si trova l' arenaria rossa, la roccia che gli sta sopra è sempre il muschelkalk. Questa affermazione non patisce eccezioni a meno che non si voglia derogare all' autorità de' fatti che ci porge la paleontologia.

Chi visita le alpi Bellunesi non deve quindi lasciarsi trattenere dalla presenza dell'arenaria rossa adagiata sul micaschisto per giudicare dell' età relativa della calcaria che la ricopre, perchè allora la si prenderebbe per calcaria alpina; alla quale determinazione si opporrebbero le petrificazioni a cui essa dà ricetto. Codeste indicano chiaramente al paleontologo che quella roccia, lungi dall' essere coeva al Zechstein del quale simula la giacitura, appartiene invece alla calcaria conchigliare o muschelkalk degli Alemanni.

Nella Zoologia fossile, stando ai caratteri geognostici, applicai il nome di *Alpina* alla calcaria in discorso, benchè fin d' allora, ed anco prima d' allora, i suoi fossili me la facessero conoscere per calcaria conchigliare. Ne sia prova la Memoria inserita nel Tomo XL del Giornale dell' Italiana Letteratura per l' anno 1823 in cui tolsi a dimostrare l' analogia zoologica tra la supposta calcaria alpina ed il muschelkalk della Germania, desunta dalla simiglianza de' fossili della prima con quelli attribuiti da Schlotheim alla seconda. Maraschini, male interpretando il mio concetto, credeva avessi io voluto ravvicinare alla formazione del muschelkalk la vera calcaria alpina del Vicentino e del Nord della Germania; nè si avvide che malamente, in quella mia Memoria, argomentavo dalla giacitura l' età relativa

della sola calcaria grigia del Bellunese, non già di quella d'altri paesi (*Saggio sulle formazioni del Vicentino, pag.* 87. 1824.).

Per non entrare in troppo lunghi e nojosi dettagli sull'identità del muschelkalk vicentino con quello che si dirama in altri luoghi delle alpi Venete, io mi farò a considerare questa roccia nella sua più grande generalità, accennando i siti principali in cui mi fu dato di osservarla.

Entrando, presso Gron, nella valle del Miss, e attraversando nel senso della sua larghezza gran parte della catena jurese per alzarsi verso Agordo, si vede una calcaria grigia, che in qualche punto ricopre l'arenaria rossa, la quale conserva la sua direzione in istrati che pendono dal nord verso l'ovest; laddove quelli del circostante terreno jurese sembrano dirigersi dal nord-est verso il nord-ovest. Molto al di sopra de' Giaroni gli strati della calcaria grigia, o conchigliare, hanno ricevuto piegature alquanto forti, indi, prolungandosi ne' gioghi che si erigono tra Ren e Tiser, diventa metallifera, come diventa tale repentinamente tutto il complesso delle rocce con cui si trova in connessione (*Zool. fossile, pag.* 68 *e seg.*). In questa calcaria ho trovato avanzi riconoscibili di bivalvi e qualche impronta di piante; e il Consig. Signor Fuchs assicura che ascendendo la valle Imperina, e internandoci verso Tiser gli strati della calcaria si fanno più grossi inferiormente, e si mostrano più o meno zeppi di fossili. Le conchiglie ch' ei trovò in maggior copia, sono gl'individui della *Posidonomya Becheri*, Bronn, quelli del *Pecten discites* e della *Chamites lineata*, Schlotheim (*Plagiostoma lineata* Voltz) che sono specie vulgatissime nel Trias (*Die Venetianer Alpen, pag.* 6.).

La calcaria grigia, trasfigurata in più modi dalla pietra verde, ricomparisce a Framont (*nord di Agordo*) e sotto di essa va a perdersi l'arenaria rossa tanto diffusa ne' contorni di Agordo (*Colle di Foggia, S. Cipriano, Valle di S. Lucano, ecc. ecc.*). Piegando verso l'ovest, a dritta del Cordevole, la si osserva di nuovo molto bene sviluppata presso Faè al ponte del Ghirlo, un miglio sotto Cencenighe. In questa località gli strati della

calcaria grigia si fanno più marnosi, ed assumono l' aspetto d' una oolite a globuli minuti, struttura che vuolsi attribuire alla copia grande di conchiglie che annida nella sua massa. Difatto il muschelkalk di Séeberg nelle adiacenze di Gotha, e quello di Weper presso Gottinga hanno la struttura precisamente oolitica, e sono a dovizia provveduti di fossili (*Zool. fossile, pag.* 107.).

Egualmente ricca di conchiglie e di crinoidi è la calcaria marnosa del Ghirlo. Quelli che vi si trovano in maggior copia sono gl' individui della *Gervillia angusta*, e quelli della *Lima gibbosa* e della *Tellina canalensis*. Le Terebratule (*T. cassidea* e *T. amygdala*), varie specie di *Pentacrinites*, ed una del genere *Cyathocrinites* si rinvengono con minore frequenza delle altre.

Dal Ghirlo un ramo di questa calcaria si dilata a Valt ed a Vallés (*ovest di Cencenighe*), mentre un altro ramo si dirige verso il nord lungo il Cordevole (*Alleghe*) per prolungarsi nella valle di Levinallungo e unirsi al muschelkalk di S. Cassano, di Pizzo e de' Tre Sassi, di cui la nostra calcaria grigia non è che una continuazione. Ad Alleghe le rocce di sedimento antico sono state squarciate da dike di dolerite, della quale ad ogni passo s' incontrano pezzi erranti nell' alveo del Cordevole (1).

Dall' Agordino la calcaria conchigliare passa nel Zoldiano, accompagnata spesse volte dalla soggiacente arenaria rossa. Ambe queste roccie appajono in estranio modo sconcertate nel monte S. Sebastiano e nel monte Duram, posti all' est di Agordo, sopra i quali l' uscita della pietra verde produsse gli effetti che abbiamo narrati nelle pagine precedenti.

Li fenomeni che si ammirano nel monte Duram non divariano dagli altri che saltuariamente si veggono appiè delle alpi Zoldiane. Qui le emersioni sbucarono, come ad Agordo, tra le

---

(1) Questa roccia emersoria, contemporanea ai porfidi neri surti nel Tirolo, che si vede anco a Solergna sopra Lozzo, e si ripete in più siti del Cadorino, non è stata ancora veduta da nessun Geognosta Italiano, perlocchè abbiamo pensato descriverla nella seconda parte della presente Memoria.

due rocce sedimentarie più antiche, cioè tra l'arenaria rossa e la calcaria conchigliare, ad eccezione di qualche luogo (*Astregal*) in cui la pietra verde si è interposta tra li soli strati della detta calcaria.

Alle Bove de' Medoli presso Dont, e segnatamente a valle Inferna sopra Arsiera, le rocce triasiche hanno subíto grandi contorcimenti, per effetto de' filoni metallici che ne occupano il centro. Nella calcaria di queste località, la galena si accompagna con la baritina, con la blenda, con la pirite e con la gelamina, o zinco solforato silicifero (*Zool. fossile, pag.* 73.).

Per delucidare la presenza del muschelkalk nel Cadorino vuolsi penetrare le valli che più profondamente intercidono le soprastanti formazioni.

Ascendendo la valle del Boite, nel punto ove il torrente si unisce al Piave, si vede a sinistra dell'acqua l'arenaria rossa ricoperta da un ingente massa di gesso, che si eleva verso l'alto della montagna detta la Greola (1).

Tirando innanzi, sempre sul letto del Boite, si ravvisa la calcaria grigia a grana compatta, posta allo stesso livello del gesso col quale è legata. Sotto qualunque rapporto si voglia considerare le dette rocce, si troverà che appartengono entrambe ad una medesima formazione, e costituivano in origine un identico deposito. A Lozzo (*presso il torrente Rin*) e in altri paesi del Cadorino (*Domegge, Lagole, ecc.*) si vede chiaramente che i gessi dovevano essere simili alle calcarie che lor sono vicine, anco sotto l'aspetto della composizione, imperciocchè ove tali calcarie sono grigio-fosche venate di bianco, grigio-oscuri e con le medesime venature sono i gessi coi quali si trovano in connessione. A Lozzo la parte superiore di monte Ravis è di pura calcaria bianca, oscuramente oolitica, riferibile alla parte più alta del terreno jurese. Li suoi letti, inclinati verso il sud-ovest, non eccedono lo spessore di quattro decimetri, e riposano

(1) Da questa massa discese la frana che nel 1823 ostruì il pian terreno de' casamenti in Perarolo.

sopra banchi di gesso candido più o meno intaccati dalle azioni atmosferiche, e contenenti talvolta indizj di zolfo. Sotto di questi banchi succede immediatamente il gesso oscuro vergato di bianco, il quale forma la metà inferiore del monte e va a perdersi sotto le ghiaje del torrente Rin, che gli scorre ai piedi. Conservando questo gesso la più perfetta somiglianza col lias di Lozzo, non si può dubitare che non sia lo stesso lias gessificato dall' azione esercitata in quel sito da gagliarde emanazioni solforose, di cui sussistono ancora le reliquie nelle acque epatiche del Cadorino e della Carnia (1).

A Rumiano (*sulla strada di Allemagna presso Peajo*) si torna a vedere la calcaria conchigliare, con tutti li caratteri ordinarj di questa roccia. Essa s'innalza di pochi palmi a dritta di chi ascende verso Borca, e ben tosto si occulta sotto il Keuper verde modificato. Gli strati di quest' ultima roccia s' inclinano alquanto verso l' est, e sostengono per alcun tratto la calcaria liasica con le sue marne; poi si perdono anch' essi di vista in causa de' dislocamenti ivi prodotti dalla emersione di una potente dika doleritica, che dal fondo della valle si prolunga verticalmente fino alla vetta della montagna.

Gli strati delle rocce liasiche appajono raddrizzati, e le marne che sono al contatto della dolerite si trasformarono in uno schisto nero, molto solido e duro. Questa roccia pirica conserva i più manifesti segni di somiglianza con le doleriti osservate dal Barone De Buch nella Carintia (*Taschenb. di Leonhard* 1824, *pag.* 396), e come queste presenta, nelle parti più esposte all'azione degli agenti esteriori, un aspetto arenaceo. Il Sig. Pasini porta un'opinione diversa, poichè avrebbe veduto nella roccia emersoria di Rumiano un' arenaria marina (*Atti dell'Istituto di Venezia. Tom.* III, *pag.* 173.); mentre il Cons. Signor Fuchs la vuole una brecciola prodotta dalla alterazione spontanea della dolerite (*Die venetianer Alpen, pag.* 12.). La

(1) Noi riparleremo del fenomeno della gessificazione quando si tratterà delle rocce eruttive di Solergna, di Rumiano, di Alleghe e di altri luoghi dell' alto Bellunese.

brecciola di Rumiano, che si distende anco sul lato opposto della valle del Boite, non è che la ripetizione di quanto si osserva nella villa di Toss sopra Alleghe, al di sotto di Caprile (*sinistra del Cordevole.*). Quivi la dolerite rimane incassata tra le rocce triasiche e conserva nelle maggiori sue altezze l'aspetto cristallino, ma a misura che più si abbassa, si va scomponendo, finchè, giunta appiè dell' eminenza, trapassa gradatamente in una brecciola simile a quella della valle del Boite.

Presso Borca, sulla falda occidentale dell' Antelao, la calcaria conchigliare forma una balza di circa 60 metri di altezza; ed è questa potenza del muschelkalk la più ingente che si conosca nell' alto Bellunese.

Nel 1832, in compagnia del chiarissimo Professore Signor Meneghini, staccai dalla calcaria di questa località li fusti piuttosto lunghi dell' *Encrinites liliiformis*, e qualche valva di una *Mya* vicina all' *elongata* di Goldfuss. Due anni dopo ritornai sul luogo coll' intendimento di raccogliere quel maggior numero di fossili che per me si poteva; e fu in questa occasione che rinvenni *la Terebratula macrocephala*, la *Ter. vulgaris* di Schlotheim, i fusti del *Rhodocrinites*, e le varie parti dell' *Encrinites liliiformis*, di cui diedi li disegni nella terza tavola. I banchi grigio-foschi di questa calcaria sono quasi orizzontali e poderosi, non però costanti nella loro spessezza, nè intercalati da strati di altre rocce. La estensione in lunghezza di questa balza non sorpassa, a giudizio dell' occhio, li 300 metri, ma è probabile che si dilati ancor più sotto le alluvioni dell' Antelao, che ivi sono alte e molto estese.

Da Borca il muschelkalk si avvia sotterraneamente verso le parti più occidentali della valle. Ad Ampezzo ricompare, al di sotto del Boite, senza che si possa scorgere le rocce che verosimilmente dividono la calcaria conchigliare dalle Dolomie che le sono superiori. Le alluvioni che stanno a ridosso dell' alpe dolomitica impediscono di scoprire la base del terreno jurese; e sarebbero tuttavia invisibili anco i dossi del muschelkalk di cui parliamo se una gran parte dell' alluvione che li

copriva non fosse stata rimossa dalle piovane del 1843, che tanto danno recarono al paese di Cortina. La calcaria conchigliare, che sorregge quelle colossali e nude eminenze dolomitiche, è straordinariamente piena di gusci di conchiglie la più parte bivalvi, che riflettono con lo splendore perlaceo i colori dell'iride. Lungo la Begontina, torrente che lambisce le radici del Crepadel, e sotto il sassame che cinge la base dell'alpe chiamata Crepa Rotta, si veggono pezzi di muschelkalk staccati dai dossi che spuntano dalla terra, i quali sono molto ricchi di fossili. Io ne raccolsi parecchi: tra quelli che fin ora ho potuto determinare citerò li seguenti: *Myophoria curvirostra*; *Lima* che si approssima alla *gibbosa*; *Avicula* vicina alla *inaequivalvis*; *Pecten laevigatus*? ed un fusto di *Rhodocrinites* simile a quelli che trovai nel muschelkalk di Borca.

Da Cortina a Landro non si vede indizio alcuno che palesi l'esistenza del muschelkalk, giacchè le grandi eminenze, che fiancheggiano questo tronco della strada di Allemagna, sono composte di dolomía bianca. Rimane da sapersi se penetrando ne' botri trasversali che mettono nella valle si possa scoprire qualche roccia che seguì l'ultimo termine della calcaria jurese. Io ne visitai due al di sotto del luogo detto *Albergo*, nè mi riuscì di scorgerne alcuna oltre la dolomía.

La catena alpina che da Landro torreggia a dritta di chi discende al lago di Toblach, presenta alle sue radici un complesso di rocce parte liasiche e parte riferibili al terreno del trias, senza che si possa scorgere l'arenaria rossa, tanto potente nella valle di Sesto. Si adeguano alle prime gli strati alquanto sconvolti, che un miglio più sopra il lago suddetto, costituiscono la parte inferiore del terreno jurese; e spettano alle seconde una calcaria grigia disposta in istrati diretti verso il nord-ovest, e inclinati al sud, che si vede sul fianco orientale del lago stesso. Questa calcaria forma l'estrema parte del fianco dritto della strada di Allemagna, ed è gremita di fossili simili a quelli di *Cortina*. Da questo punto la strada esce da' monti, e si prolunga nel vasto altipiano chiamato *Campo di Toblach*, circoscritto

per un verso dalla Pustería, e per l'altro dal versante settentrionale delle alpi Cadorine e Ampezzane (1).

Da Innichen, lasciando a dritta le alpi di Niderndof ove ricompare il micaschisto, m' innoltrai nella valle di Sesto per vedere se la calcaria conchigliare ricopriva in qualche luogo l'arenaria rossa, di cui ho parlato in precedenza, ma dal punto dove comincia la valle fino alla cima di Monte Croce non ho veduto che sola arenaria. Nell' ascendere vidi sul letto del Sextenpoch, ch' è scavato in questa roccia, alcuni massi di calcaria grigia de' quali non saprei indovinare la derivazione, non conoscendo ivi nessuna località in cui si possa osservare in posto una roccia diversa dall' arenaria rossa. Massi piuttosto voluminosi della stessa calcaria con reliquie di Encriniti adocchiai sul vasto altipiano arenaceo di Monte Croce disgiunti tra di loro da intervalli di molte e molte centinaja di metri; i quali si ripetono, sebbene con minore frequenza, sul pendìo meridionale del monte medesimo. Calando verso il Comelico si vede il torrente Padola, che lambisce per un verso le falde più basse di Monte Croce, e per l'altro lascia allo scoperto la parte inferiore dell' alpe jurese, che si eleva sulla dritta sua sponda. Dopo varcato il monte Santa Catterina (*a S. Stefano*) quasi intieramente costituito di micaschisto e d'arenaria rossa, si comincia a trovare presso Auronzo il gesso. Piegando a settentrione s'incontrano gli strati della calcaria grigia disposti in tutte le sorta di direzioni, e privi di fossili. A Grigne questa roccia abbonda di Gelamina e di Galena, li cui banchi sono eretti come quelli della calcaria che li racchiude. In altri luoghi di questo distretto (*sotto Villa Piccola*) la calcaria appare modificata; e gli strati delle marne probabilmente liasiche che la ricoprono veggonsi convertiti in uno schisto nero simile a quello di Rumiano, anche pel molto ferro che contiene.

(1) In quella parte dell' Altipiano più prossima al paese d' Innichen escono le sorgenti della Drava, le quali ben tosto si uniscono insieme, e formano quel modesto ruscello, che presso la Chiesa de' Francescani si versa nel Sextenpoch, e toglie a questo grosso torrente il nativo suo nome.

Li sovvertimenti e le trasformazioni subíte dalle rocce sedimentarie di Auronzo impedirebbono di riconoscere l' ordine di successione con cui sono state depositate, se in qualche luogo non offerissero nelle petrificazioni il mezzo di distinguerle con precisione. La calcaria grigia di cui ho fatto parola si mostra in più siti lungo l' Ansiei, e finisce in un dirupo molto istruttivo che si vede a dritta di questo fiume presso li Tre Ponti, dal quale ho schiantati alcuni fossili, non già analoghi, ma identici a quelli che rinvenni nel muschelkalk di altri luoghi del Cadorino. Da Lozzo a Pieve, e da questo paese fino a Perarolo la formazione del muschelkalk non si lascia così di leggeri distinguere dalla liasica per la mancanza del tramezzo arenaceo, che d' ordinario separa queste due rocce, e per essere entrambe destituite di fossili. Per vieppiù assicurarsi che la serie del terreno triasico è quivi manchevole di qualche membro gioverebbe riprendere in nuovo esame la parte più bassa della valle del Piave da Pelos a Perarolo, lo che intendo di fare nel vegnente autunno 1846.

Con questi brevi cenni, intesi di dimostrare la fallacia dell' opinione che il muschelkalk manchi nella più gran parte di Europa (*Bull. T. xiv, pag.* 65), e più particolarmente di convincere qualche illustre geologo Italiano dell' esistenza nelle alpi Venete di rocce più antiche del lias.

Gli esami ch' ebbe occasione d' instituire lo Studer nella valle Brembana lo condussero a scoprire la formazione d' un argillite, ch' è un vero rappresentante del Keuper, giacchè sotto di essa vide il muschelkalk con fossili caratteristici di questa roccia (*Bull. de la Soc. geol.* Seconde serie. *T. ii, p.* 348.). Tale scoperta dee riuscire interessante in quanto accresce lo scarso numero de' luoghi in cui la calcaria conchigliare era stata negli anni addietro osservata nelle alpi Lombarde.

SPECIE ORGANICHE FOSSILI DEL MUSCHELKALK DELLE ALPI VENETE.

Terebratula macrocephala. Nob.

Tav. I. Fig. 5. *a b c.*

Testa subrotundata, utrinque convexa; valva majore in umbonem mediocarinata, nate elevata, incurva; foramine magno.

È la più grande delle Terebratule che finora ho trovate nelle antiche formazioni marine delle alpi Venete; nè tra le fossili descritte dagli autori ve n' ha alcuna che sia capace di superarla in volume. La sola *Terebratula tetragona* di Pusch le può essere paragonata in grandezza (*Polens. Pal. Tab. IV, fig.* 9.). Dell' individuo, che prendo a descrivere non resta che il solo modello essendo il guscio intieramente svanito. La sua lunghezza è di sette centimetri dalla punta della valva dorsale al margine, e la lunghezza di sei; donde risulta che la sua forma riesce piuttosto orbiculare che ovale, astrazione facendo dal beccuccio (*crochet*) o prolungamento del cardine, ch' è grande e alquanto incurvato. Ove il cardine della faccia dorsale s' incurva e si prolunga, si vede innalzarsi nel mezzo una carena che dall'orifizio del foro si estende per qualche linea verso la schiena della faccia medesima. Il foro è assai più amplo di quello che si vede nella figura della *Terebratula ovoides* di Sowerby, riprodotta da De Buch (*Mem. de la Soc. geol. de France. T. III, Tab.* 19, *fig.* 17.), e piega leggermente verso il lato dritto della conchiglia. Le facce sono ambedue convesse, e la ventrale non decresce in grandezza nella regione del cardine, come si osserva nella *Terebratula ovoides*, nè sono come in questa provedute di pieghe trasversali, ma soltanto vi si veggono con la lente alcune rughe, che sono i segni dell' accrescimento, lasciati dalle valve che più non sussistono. Per questa mancanza è

impedito distinguere quella piccola porzione di guscio che forma la parte inferiore dell' apertura circolare, cui fu dato il nome di *Deltidium*, perchè conserva la figura di un delta alquanto troncato nell' apice.

Non mi è riuscito di mettere insieme che due soli esemplari di questo brachiopodo, uno malconcio nella parte del cardine, l'altro mancante di una porzione del margine, che è appunto quello di cui offro la figura. Trovasi nel muschelkalk del Cadorino, sopra Borca, ove sono pure frequenti i fusti dell'*Encrinus liliiformis*, tanto copiosi nella roccia analoga del Vicentino.

OSSERVAZIONI.

Non avendo trovato nelle opere che mi sono note nessuna figura la quale combini col mio originale, inviai al Sig. Bouchard Chantereaux il disegno affinchè si compiacesse dirmi se fra le numerose specie di terebratule della ricca collezione di Brachiopodi ch' egli possiede qualcuna ne avesse di simile alla nostra (1). Nella breve descrizione con cui accompagnava al mio collega il disegno, ommisi di aggiungere che la conchiglia mancava del guscio, ma ad onta di questa ommissione il detto uomo si avvide che la questione versava sopra un modello al tutto privo della coccia. Ecco, nella responsiva ad una mia lettera, com' egli si esprime in proposito di questa terebratula: « Quant à vòtre Terebratula macrocephala, qui peut bien être bonne espéce, ne possédant pour toute piéce d'ètude que vôtre dessin, il me semble impossible d' établir un jugement solide avec lui seul, d' autant plus qu' il me semble avoir été fait d'aprés un individu incomplet, et voici les motifs qui me donnent cette opinion. Tout dans ce dèssin me semble incértain, comme le serait celui d' un simple moule; le trou d'un pé-

(1) È noto come il Sig. Bouchard Chautereaux di Boulogne-sur-mer è presso a pubblicare la desideratissima sua Monografia delle Terebratule, lavoro che sortirà la più favorevole accoglienza presso i dotti di tutte le nazioni.

doncule d' attache fait éxcéption et me parait trop bien prononcé pour expliquer l'absence du deltidium: le *natice* est d'une forme anormale, e n' est pas en rapport avec la commissure des valves; enfin je ne m' explique pas l' absence des deux petits sinus que bordent ce *natice*, ils semblent en continuation de la dépression formée par le déltidium, et cela est impossible, a moins que le têt en soit disparu; alors ces *sinus* ne sont autre chose que ce que l' on voit sur toutes les terebratules depourvues de têt c' est-à-dire les *fossettes* servant à loger les dents dorsales. Examinons maintenant les caractères qui vous ont parus propres à èlèver cette coquille au rang d'éspèce, et discutons-les ensemblé. C' est la plus grande que vous ayez encore trouvé dans les formations marines des alpes Venitiennes, et vous pensez que les auteurs n' en ont pas signalé d' aussi grandes. Cela est vrai, du moins je le pense, puisque je crois posséder tous les principaux auteurs sur cette matière, mais aussi cela tient a la même cause, qu' on peut leur reprocher à tous, c' est d' avoir fait des descriptions d'après un ou deux individus, et cela est un grand défaut, sur tout pour cette famille où les individus d' une seule et même éspéce sont souvent si dissemblables, qu'avec ce mode on en pourrait souvent faire autant d' éspéces différentes. Révénans à la taille de votre espèce, je vous dirai que je posséde et que j' ai vù dans vingt collections la *Terebratula ovoides* Sowerby plus grande que la vôtre, et si variée dans sa taille et dans sa forme qu' elle offre des individùs parfaits, entiérement orbiculaires et passant de cette forme a celle ovale par une infinité de nuances. Du reste, comme vous le savez sans doute, les descriptions et les dessins de Sowerby sont considérés comme des plus mauvais. Ce qui a mon avis, parle plutôt que tout le reste en faveur de votre nouvelle espéce c'est son gisement, c'est d' appartenir au muschelkalk. Si j' en avais un seul individu avec le têt à pouvoir comparer avec mes ovoides, je vous donnerais probablement un opinion plus positive et plus circonstanciée. »

TEREBRATULA ACULEATA. N.

Tav. I, fig. 6. *a b c*.

T. subtetraedra, sub globosa, utrinque costata; 4 costis crassis ad apicem subtilis; margine sinuoso-deflexo, quadripunctato; nate in apicem incurva; foramine canaliculato.

Ambe le valve sono convesse provvedute di quattro coste grosse inferiormente, e terminate superiormente da uno spigolo acuto, le quali si estendono oltre il margine sotto la forma di punte finissime. La maggiore porta nella sommità cardinale un *beccuccio* che si prolunga visibilmente sopra la valva ventrale, e finisce in un foro perfettamente circolare, non già angoloso come quello che si ammira nella *Terebratula trigonella*, la quale manca eziandio del *beccuccio*, o appena se ne veggono le vestigia. Un' altra notabile differenza tra queste due conchiglie, è la estensione delle coste, che a guisa di appendici si prolungano al di fuori del margine molto sinuoso delle valve in tutti gl' individui d' ogni età della *T. aculeata*, e non mai in quelli della *T. trigonella* di Sclotheim.

Col ponderato confronto delle indicate due specie ho potuto fino dal 1827 rilevare il divario che v' ha tra l' una e l' altra, ma la figura che diedi in quell' epoca nella Zoologia fossile (*Tav. I, fig. B. b.*) non rappresenta convenevolmente l' originale, perchè il cardine dell' una è diverso da quello dell' altra. Quella figura, volendo assomigliarla ad alcuna delle specie cognite di terebratule, si potrebbe più che verun' altra paragonarla alla *trigonella* ad onta dell' allungamento delle coste, che in questa non si scorge giammai. Di fatto Bronn e De Buch, il primo nella Lethaea geognostica, il secondo nell' eccellente sua Memoria sopra le Terebratule, hanno efficacemente insistito affinchè la terebratula da me descritta non sia presa per una specie distinta, ma si dovesse appena considerare una varietà della *T. trigonella*, con la quale la citata figura mostra di avere gran rapporti di somiglianza.

Il disegno di grandezza naturale, che ora esibisco della *T. aculeata* sta in armonia con gli epiteti esposti nella frase specifica e nella descrizione; e siccome le differenze che ho notate dipendono dalla particolare organizzazione dell'animale che fabbricò la conchiglia, così io credo si debbano risguardare come specifiche (1).

Stimo necessario avvertire che questa conchiglia è bensì comunissima nel muschelkalk del Vicentino (*Rovigliana*), ma non è ovvia cosa distaccarla intera dal piano degli strati sopra il quale ordinariamente si trova in compagnia di più altre specie congeneri. Talvolta esiste anco nella parte più massiccia degli strati medesimi, e in questo caso forma parte integrante dell' impasto costituente la pietra, che per essere molto solida, riceve una bella politura. In generale le conchiglie del muschelkalk contengono la silice a segno da poterne trarre scintille coll'acciajo. Il guscio ha il colore della pietra, e l' interno n' è ostruito da spato calcario bianco, per lo che, quando la roccia è levigata, presenta un fondo grigio-oscuro pezzato di bianco.

---

(1) Il Signor Bouchard Chautereaux, stando alla semplice ispezione delle figure che gli ho trasmesse a Boulogne-sur-mer, crede non essere la *Ter. aculeata* che un doppio impiego della *Ter. trigonella*, per lo che ho creduto di spedire al conchiologo di Boulogne l' originale di quest' ultima specie affinchè possa col fatto assicurarsi, che la turgidezza soverchia delle valve nella figura devesi ascrivere all' inesattezza di chi l' ha disegnata.

Circa le Terebratule del Jura e della Creta, io farò sentire a suo luogo per quali specie egli convenga, e per quali dissenta dalla mia classificazione.

Quanto alla *Terebratula diphya*, di cui si levò tanto scalpore nella Sezione di Geologia del Congresso di Milano, così egli mi scrive: « Je dèsirerois tout particulièrement la *T. triangulus, T. diphya et Antinomia*; relativement a ce dernier je partage entièrement votre maniere de voir, et je suis comme vous convaincu que dans leurs formes percées vers le centre, il y a plusieurs espèces avec les quelles on peut former un groupe charmant.

TEREBRATULA TRIGONELLA. SCHLOTH.

Tav. I, fig. 7. *a b c.*

BRONN LETHAEA. Tab. XVIII, fig. 7.

Ha quattro coste molto salienti e assottigliate nell' apice, due più lunghe nel mezzo, e due più brevi ne' lati di ciascuna valva, come si osserva nella *Terebratula aculeata*; è però assai meno turgida, e di forma più allungata; nè questi sono li caratteri più notabili che distinguono l' una dall' altra. Nella *T. trigonella* l' apice del cardine della valva maggiore si discosta appena dall' umbone della valva ventrale, e manca del beccuccio. Il foro dell' apice n' è grande, e comparisce angoloso non solo ne' grandi, ma anco ne' piccoli individui, purchè si voglia esporli sotto un favorevole riflesso di luce.

Di questa conchiglia ho dato la figura di due individui di età differente per dimostrare che sotto ogni qualunque grandezza i caratteri principali della specie sono sempre gli stessi. Lascio poi giudicare adesso, se tra la *T. aculeata* e la *trigonella* vi corrano differenze così leggere da poter credere che la prima sia una semplice varietà della seconda.

Questa specie si trova nel muschelkalk Vicentino in tutti i luoghi ne' quali esiste la *Terebratula aculeata*. De Buch dice essersi rinvenuta tanto negli strati superiori del Jura, quanto nel muschelkalk (*Mem. de la Soc. geol. T. III, pag.* 190.).

TEREBRATULA ELONGATA. SCHLOT. Petrefac. I.

Tab. XX, fig. 2.

BUCH, *Mem. de la Soc. geol.* T. III. Tab. XIX, fig. 10.

Questa specie trovasi nel muschelkalk dell'alto Vicentino, e vedesi rappresentata sotto tre differenti aspetti nella Memoria del Barone De Buch (*Tab. XIX, fig.* 10) che la copiò fedel-

mente dalla Tavola XX del primo *Nachtrag* di Schlotheim. Tra gli individui che ho raccolti nel 1842 a Rovigliana e a Recoaro, ve ne sono alcuni più piccoli degli altri: tutti però si assomigliano nella forma, nella struttura del cardine e negli altri caratteri che servono alla distinzione della specie. I piccoli individui della lunghezza di mezzo centimetro, si mostrano al tutto lisci, laddove gli adulti compariscono leggermente segnati da strie trasversali, come si osserva nelle citate figure.

Osservazioni.

M' era noto sino dal tempo nel quale pubblicava la *Zoologia fossile* che la *Terebratula elongata* abbonda nel *Zechstein* di qualche paese della Germania, e credeva effettivamente che quella roccia fosse *Zechstein*, perchè adagiata sull'arenaria rossa. Per la stessa ragione io chiamava *Zechstein* il muschelkalk del Bellunese, essendo anch' esso disposto sotto le medesime circostanze di giacitura, ma coll' esame de' suoi fossili mi sono convinto che appartiene ad una antichità meno remota; e lo stesso io credo si possa dire del supposto Zechstein di Glucksbrunn, nel quale si ripetono gl' individui della *Terebratula elongata*. — Tra li brachiopodi avuti in cambio dal Sig. Bouchard Chantereaux, tratti dalla calcaria Devoniana di Boulogne-sur-mer, alcuni ne trovai di adeguabili alle specie che annidano nel muschelkalk delle provincie Venete e delle alpi Tirolesi. Tra le prime ricordo qui la *Terebratula elongata* di Schlotheim, e tra le seconde accenno l' *Orthis elegans*, dello stesso Bouchard, che trovai adeso al muschelkalk di Levinallungo (*Buchenstein*) pieni di articoli dell' *Encrinites liliiformis*, del quale fa cenno Boué nel Bullettino della Società geologica di Francia (*Séance du 6 Decembr.* 1841, *pag.* 81.).

TEREBRATULA VULGARIS. SCHLOTH.

Tav. III, fig. 1. *a b c.*

(BUCH, *Mem. de la Soc. geol.* Tom. III, tab. XIX, fig. 1.
— SCHLOTH. Petrefact. III. Tab. XXXVII, fig. 9.)

È più comune della specie precedente, e si trova con molta frequenza nel muschelkalk della Comonda, ed in quello di Rovigliana nel Vicentino. Tra gli esemplari di questa bivalve che ho avuto tra mano, non ne ho veduto nessuno il quale non si uniformi perfettamente alla citata figura di De Buch, benchè tutti riescano alquanto più piccoli di essa (1). Bronn applicò a questa terebratula la fig. 5 *a b*. Tab. XI della Lethaea; ma, valga il vero, essa non si affà alla specie nostra, essendo di forma più allungata, e portando due piegature longitudinali sulla valva ventrale, ed una più grande sulla dorsale, che mancano affatto nella figura di De Buch. Dalle figure citate da Bronn conviene parimente escludere quella di Schlotheim, indicata sotto il numero 5 della Tavola XXXVII atteso che è provveduta anch' essa di pieghe.

A scanso di equivoci ho dato la figura di questa specie sotto tre differenti aspetti, perchè si vegga l' enorme discrepanza tra essa e le figure di Bronn, e la molta sua corrispondenza col disegno di De Buch, dal quale si discosta non per altro, che per essere alquanto più piccola.

La *Terebratula vulgaris* trovasi in copia nel muschelkalk di molti paesi della Germania, e non mai in altre rocce; per lo che viene considerata una delle conchiglie più caratteristiche di questa formazione (Buch).

---

(1) Dopo estesa la descrizione di questa specie, trovai nel muschelkalk del Cadorino due individui notevolmente più grandi di quelli che rinvenni nella roccia analoga del Vicentino, de' quali fo qui un cenno per dimostrare vieppiù la corrispondenza zoologica che v' ha tra la calcaria conchigliare di un paese, e quella d' un altro.

TEREBRATULA AMYGDALA. NOB.

Tav. IV, fig. 2. *a. b.*

T. ovato-elongata, subcompressa, laevi; striis concentricis remotis; nate producta, non incurva.

Questa specie è lunga quattro centimetri, e larga due. La valva ventrale, nella metà più vicina al cardine, si mostra alquanto turgida, indi si appiana a misura che più si avvicina al margine inferiore, ed è questo il solo carattere che ha comune con la *Terebratula ornithocephala* di Sowerby, descritta e figurata da De Buch (*Tab. XIX, fig.* 9.). In ambe le valve si scorgono gli avanzi di pieghe trasversali concentriche, che confluiscono verso il cardine, come si osserva anco nella *Ornithocephala*, se non che il margine inferiore di questa riesce flessuoso, mentre in quella che descriviamo non presenta indizio alcuno di flessuosità. Nella nostra, l' apice della valva dorsale non si ripiega sulla ventrale, e il foro del cardine è quindi molto discosto dall'apice della valva opposta, non già contiguo, nè così grande come è quello della *Terebratula ornithocephala*. La *Terebratula cymbula* di Pusch, di cui ho sott' occhio la figura (*Polens. Paleont. pag.* 25. *Tab. IV, fig.* 11.) potrebbe più d'ogni altra essere a prima giunta scambiata con la nostra, ma la struttura del margine ch' è flessuoso nella *cymbula*, non lascia verun dubbio sulla differenza che v' ha tra queste due specie. Non ho trovato nel muschelkalk dell' alto Agordino che due soli individui di questa *Terebratula*, uno de' quali malconcio nella regione del cardine.

TEREBRATULA CASSIDEA. DALMAN.

Tav. IV, fig. 4. *a b c d e f.*

Questa specie, come ha osservato anche De Buch, è talvolta più larga che lunga, talvolta più lunga che larga secondo

l'età dell'individuo. Ne' più giovani, in cui la larghezza è maggiore della lunghezza, la valva ventrale appare molto rigonfiata nella parte più vicina al cardine, il quale finisce in un becuccio alquanto rilevato, ricurvo, e munito d'un foro capillare. Ambe le valve sono provvedute di tre o quattro rughe trasversali, che mai non arrivano fino al cardine, ma si dileguano prima di giungere alla metà della lunghezza delle valve medesime. Negli individui più lunghi che larghi, le pieghe sono in maggior numero, e s' innalzano più sotto la regione della cerniera, senza mai superare questo punto, mentre nelle figure riferite da De Buch a questa specie (*Tab. XIX, fig.* 12.) si prolungano al di sopra della piegatura cardinale della valva maggiore.

Questo testaceo fu trovato negli anni addietro nel Zechstein di Salza, non lungi di Nordhausen nella Prussia, ma s' incontra eziandio nel muschelkalk dell' alto Agordino, dove ho potuto raccorne quattro esemplari di ambe le età.

Non so vedere la ragione per cui Bronn associò questa specie alla *Trigonotetra* (*cassidea?*), la quale invece di pieghe trasversali è rigata per lungo da raggi simili a quelli de' pettini (*Lethaea, p.* 78. *Tab. II, fig.* 9.). Certo vi deve essere corso equivoco nella citazione e nella applicazione delle figure.

AVICULA SOCIALIS. BRONN.

Tav. II, fig. 2.

BRONN *Lethaea pag.* 116. Tab. XI, fig. 2. *a. b.*
Mytilus socialis SCHLOTH. Petrefac. III. Tab. XXXVII, fig. 1. *a. b.*

Nella Zoologia fossile (pag. 118) io conguagliava al genere *Mytilus* le bivalvi che pel verso della loro lunghezza sporgono fuori dalla massa del muschelkalk di Recoaro, cui sono sì tenacemente aderenti, che si può dire essere con esso incorporate. Parevami ancora in quel tempo che alcune si potessero riferire alla figura D. 2 (*Tab.* 90.) dell' Indice di Gualtieri,

attribuita da Linneo al *Mytilus lithophagus*, ed altre si conformassero alla fig. F della stessa Tavola, che non devesi confondere con quella che le sta a sinistra, segnata essa pure con la lettera F, alla quale Gmelin conguaglia la *Chama canaliculata*. Dichiarai fin d'allora, che il ragguaglio che io faceva non era giusto, atteso lo stato in cui si trovano i nicchi, de' quali rare volte o non mai si giunge a vedere per intero una delle valve, essendo l' altra imprigionata sì fattamente nella roccia, da non potervi discoprire vestigio alcuno della valva opposta. Più spesso la specie manca del guscio, e presenta solo il modello interno, e talvolta la si vede sotto la sembianza di pure impressioni rappresentanti le fattezze esteriori ora del guscio, ora del modello.

Sopra uno de' pezzi di roccia che ho per le mani v' ha un individuo che lascia vedere la forma esteriore del cardine, ed anco le strie trasversali arcuate del guscio. La porzione visibile di questa conchiglia, paragonata con le citate figure di Bronn e di Schlotheim, vi si uniforma perfettamente. Il margine del lato anteriore si prolunga, ed alquanto s'incurva, mentre quello del lato opposto appare leggermente rotondato. L'apice del cardine della valva più grande s'incurva e sorpassa di poco in lunghezza l'apice dell'altra valva, come si ammira nelle figure che ho allegate.

È ben singolare che tra le spoglie d' una specie così diffusa nel muschelkalk Vicentino, non si abbia ancora potuto scoprirne nessuna disgiunta dalla roccia, nè conservata in modo da potervi riconoscere i suoi distintivi caratteri. Sappiamo per altro che l'*Avicula socialis* è una delle specie più difficili ad essere convenevolmente determinata. Deshayes che fu il primo a proporre l' associazione del *Mytilus socialis* al genere delle Avicule, confessa essere al sommo imbrogliata la classificazione di questa conchiglia, e ne allega per prova la discrepanza che regna tra i Naturalisti rispetto al genere cui devesi conguagliare. Di fatto alcuni l' hanno riposta tra le specie del genere *Modiola*, ed altri tra quelle del genere *Mytilus* e *Cypricardia* (*Coquilles caractéristiques des terrains. pag.* 64.).

A questa specie *esclusivamente propria del muschelkalk* si riferiscono forse tutti i modelli di una bivalve comunissima a Rovigliana, giacchè la lunghezza dal margine al cardine, e la lunghezza trasversale la fanno credere piuttosto il nocciuolo interno dell'*Avicula socialis* che di altra bivalve.

MYOPHORIA CURVIROSTRA. BRONN.

Tav. II, fig. 3.

LYRODON CURVIROSTRIS. GOLDFUSS. Petref. Germaniae

Tab. 135, fig. 15. *c.*

Mi sembra riconoscere questa specie per la grande somiglianza che mostra d'avere con la citata figura di Goldfuss, benchè gli originali per me raccolti nel muschelkalk del Recoarese non sieno che modelli privi del guscio, e quindi mancanti de' cingoli trasversali che si veggono nella figura. Tre sono le coste molto prominenti che dall'apice del cardine si prolungano fino al margine, e tutte restano sulla metà della valva che guarda il lato dritto, essendo l'altra metà affatto liscia o priva di coste. Codeste corrono lungo la valva a guisa di raggi e diventano più grosse a norma che si avvicinano al margine, senza comparire flessuose, come sono quelle della figura *b* (*Tav.* 36) di Schlotheim, applicata da Bronn a questa specie. Precisamente identici agli individui della *Myophoria curvirostra* del Vicentino sono quelli riscontrati nel muschelkalk di Levinallungo sulla strada detta i Tre Sassi.

Le mioforie del Vicentino non si trovano mai distaccate dalla roccia, nè mai sono arrivato a scoprire esemplari ne' quali l'inflessione del cardine riesca più apparente di quello si possa scorgere nell'individuo di cui presento l'imagine.

La *Myophoria curvirostra* si rinviene in varie formazioni del terreno triasico (*Goldfuss. Tom. II, pag.* 198.) e più frequentemente in quella del muschelkalk.

Posidonomya Becheri. Bronn.

Tav. 11. fig. 4.

Goldfuss. Petref. Germaniae. Tom. II, pag. 119.

Tab. 113, fig. 6. *b*.

Gli esemplari che ho rinvenuto nel muschelkalk del Bellunese e del Vicentino hanno una forma compressa, un poco tumida verso la regione del cardine; come si scorge anco nella figura di Goldfuss che ho allegata, la quale in altro non differisce che per avere un maggior numero di cingoli trasversali, che dal margine si succedono fino all' apice del cardine; laddove negli individui fossili non arrivano mai all' apice, ma si arrestano alcun poco al di sotto, come lo dà a conoscere il disegno che ho dato di questa specie.

Quanto alle due figure esibite da Goldfuss ho preferito quella che rappresenta la specie molto ingrandita, perchè a questa più che all'altra indicata co' segni 6. *a*; combina il volume degli originali che ho dinanzi. Di fatto gl' individui tratti dal muschelkalk Cadorino sono lunghi quattro centimetri, mentre la figura di Goldfuss non arriva che ad un centimetro o poco più di lunghezza.

Brongniart assegna per sede a questa specie gli schisti di Werden e le Ampeliti di Dillenburgo, rocce che sono anteriori alla formazione del muschelkalk (*Tableau des terrains, p.* 425.); mentre Broun e Goldfuss la riferiscono al terreno triasico, cioè al lias schistoso (*liasschiefer*) ed al muschelkalk. Nelle alpi Venete fu trovata soltanto in quest' ultima roccia, e non mai con la frequenza che si presentano alcune delle specie precedentemente descritte. A Recoaro ed al Tretto non ne ho rinvenuto che quattro soli individui, ed uno soltanto ne raccolsi nel Cadore (*Borca.*). Meno scarsi di Posidonomie sono gli strati di calcaria conchigliare di Cencenighe, di cui dovrò parlare in appresso. Il Conte Carlo Avogadro, esimio cultore della Storia

Naturale, un altro ne trovò sopra un pezzo di calcaria grigia, che vide erratico in una valle del Feltrese, colà recato forse dai torrenti che discendono dall' Agordino. Io ho istantemente pregato il Sig. Conte a voler trovare qualche ritaglio di tempo, e donarlo alla ricerca de' petrefatti, col perlustrare, a preferenza d' altri luoghi, quella porzione delle alpi che resta al Nord-Ovest di Belluno, avendo egli le cognizioni necessarie per occuparsi anco di questo studio, e per giovare efficacemente ai progressi della Paleontologia Italiana.

Posidonomya radiata. Goldfuss.

Tav. II. fig. 5.

Goldfuss. Tab. 114, fig. 2. *Magnitudine naturali.*

Era perplesso se alla *radiata* ovvero ad un' altra specie si dovesse riferire questa *Posidonomya*, imperocchè posta al confronto con la descrizione e con la figura di Goldfuss, io trovava esservi tra queste e il mio originale qualche differenza. Sulle prime inclinavo a crederlo una forte varietà della *Posidonomya Becheri*, benchè la forma di quest'ultima riesca meno lunga, e li suoi cingoli trasversali più numerosi di quelli che si osservano sulle valve dell'individuo che descriviamo. Di fatto nella *Posidonomya Becheri* i cingoli sono dieci, mentre nel nostro non se ne contano che sei. Anco nella figura attribuita da Goldfuss alla *Posidonomya radiata* i cingoli sono in maggior numero, e mi sarei astenuto di conguagliare a quella specie la mia conchiglia, se le valve non fossero segnate per lungo da strie molto apparenti, giacchè senza di questo niuno si avviserebbe di collocarla tra gli individui della specie predetta.

Di questa specie non ho trovato finora che sei esemplari, uno de' quali è congiunto al pezzo stesso di roccia che comprende la *Posidonomya Becheri*, ma che ho fatto disegnare separato, affinchè meglio risalti all' occhio dell' osservatore il divario che v' ha tra queste due specie, Fossile nel muschelkalk del Cadorino, di Valle d' Agordo, e del Tretto nel Vicentino.

Gervillia angusta. Münster, e *Lima gibbosa*. Sowerby.

Tav. IV, fig. 1. *a*. *b*. *c*.

Altre due bivalvi ho potuto discernere tra le molte che mi sono procurato nell' alto Agordino, cioè la *Gervillia angusta* e la *Lima gibbosa*. Ambedue sono adese in maniera alla roccia che inutile tornerebbe ogni industria se si volesse distaccarle. La prima si adegua alla figura di questa specie esibita da Goldfuss (*Tab. CXV*, *fig*. 4. *b*.), e la seconda combina col disegno dato da Bronn nella Tavola XIX, figura 4. *b*. della *Lethaea geognostica*.

Il muschelkalk che si eleva presso il ponte di Canale di Agordo contiene in buon numero gl' individui della *Gervillia angusta*, che si ripetono eziandio nella roccia analoga del Würtemberghese (Goldfuss) e di S. Cassano nel Tirolo (*fig*. 1. *a*.). Quelli della *Lima gibbosa* sono copiosissimi, e più frequentemente esistono sotto la forma di modelli disposti sopra il piano degli strati, non già nell' interno de' medesimi; circostanza che non trasando di accennare, perchè si verifica anco nel muschelkalk di altri paesi, segnatamente in quello del Vicentino (*fig*. 1. *b*.). La *Lima gibbosa* è altresì comune nel muschelkalk di Duram, tra Zoldo e Agordo; e stando a ciò che dice Sowerby, fu scoperta anco nelle Ooliti inferiori dell' Inghilterra e della Francia in compagnia della *Pholadomya Murchisonii*.

Tra il tritume di gusci di bivalvi, contenute nella calcaria conchigliare, che s' innalza alla sinistra del Biois, vi ho scorto le valve della *Posidonomya radiata*, e spoglie irreconoscibili di qualche testaceo univalve.

Gli avanzi organici fossili non descritti in questo elenco, ma soltanto accennati, furono posti accanto gli altri che meritarono una qualche descrizione, e tutti sono ostensibili nell' I. R. Gabinetto di Storia Naturale dell' Università di Padova, cui ne feci gratuito e spontaneo dono.

Tellina canalensis. Nob.

Tav. 4. fig. 4.

Testa oblonga, valde compressa, antice sinuato-angulata, subtilissime transversim striata.

È forse la sola specie del genere *Tellina* finora trovata nel terreno triasico delle alpi Venete. Somiglia alla *Tellina obliqua* di Goldfuss (*Tab.* 147, *fig.* 12.); ma è alquanto più piccola. Essa è rotondata in ambi i lati, l' inflessione del lato anteriore è molto apparente, ed il cardine non è nel mezzo della valva, ma più vicino al lato posteriore. Le strie trasversali compariscono più elevate presso il margine inferiore che nel rimanente della conchiglia. Questa bivalve è oltremodo comune nella calcaria marnosa conchigliare di Canale presso il ponte del Ghirlo, e trovasi sempre accompagnata da una moltitudine d' individui della *Gervillia augusta* e della *Posidonomya minuta* Becheri, i quali ricoprono intieramente il pezzo di roccia lungo due piedi che ho sotto gli occhi.

Ad un' altra specie di *Tellina* appartiene probabilmente una bivalve comunissima nel muschelkalk di Recoaro, più piccola della precedente, e affatto liscia. Mi sembrava anni sono di poterla credere una specie inedita (*Catalogo delle Specie fossili raccolte nelle alpi Venete*, *num.* 6.); ma ora non sono abbastanza convinto di averla a buon dritto classificata. Molti individui di questa stessa *Tellina* io ho veduti nel muschelkalk delle Marendaore sopra S. Giuliana, due miglia o poco più da Recoaro, i quali essendo colorati in verde dalla clorite danno alla roccia un aspetto singolare (*Nuovi Annali delle Scienze Naturali di Bologna. Tomo VI*, 1841.).

Crinoidi.

Li crinoidi che Müller separò da' polipi per annestarli alla classe degli Echinodermi, esistono nelle calcarie di tutte le formazioni, cominciando dal muschelkalk che n' è il più ferace, e

terminando con la calcaria grossolana, che ne contiene in minor copia delle altre. La presenza de' Pentacriniti nel terreno terziario mi tornò molti anni addietro al tutto nuova; nè risovvenendomi di aver letto alcun autore che li avesse veduti prima di me, volli fino dal 1823 annunziarne la scoperta ne' giornali scientifici di Padova e di Pavia (*Ferussac. Bull. T. IV, pag.* 35.). I fusti molto grossi che trovai nella calcaria miocena del Veronese non sono mai accompagnati dalle plache costali e scapolari formanti il bacino di sì fatti animali, e questo stato di mutilazione de' crinoidi veronesi fa pensare che sieno stati esposti all' azione violenta delle onde marine prima di depositarsi ne' luoghi in cui si trovano adesso. Più sconnessi, o divisi in un maggior numero di articoli, mi apparirono i fusti de' Pentacriniti della Creta e della Calcaria jurese, nè mai seppi scorgere in queste rocce orma alcuna delle plache superiormente ricordate. Solo nel muschelkalk del Vicentino vi trovai per entro impastati de' pezzi ora cuneiformi ora di una figura che si approssima alla quadrata, avente un lato curvato in arco, ed il lato opposto più largo e più convesso degli altri, i quali si danno a conoscere per altrettante parti del bacino globulare posto sull' apice del fusto. Giova avvertire che dove esistono tali corpi, li fusti che lì appresso si trovano appajono cilindrici, carattere che li ravvicina al genere *Encrinites* compreso nella prima sezione della famiglia dei Crinoidi stabilita da Müller, e al quale dovrebbero del pari appartenere li pezzi suddetti.

Pentacrinites scalaris. Goldfuss.

Tav. III, fig. 1. *a. b.*

Li fusti pentagoni di questo crinoide hanno le facce esteriori munite di papille trasversali disposte in due serie; le quali, riunendosi talvolta insieme, assumono la forma di cingoli paralleli tra di loro. La superficie interna degli articoli conserva appena i segni della stella che d' ordinario si ammira ne' fusti delle specie congeneri, e in luogo del foro centrale elevasi una

piccola prominenza formata dal materiale calcario infiltratosi col mezzo dell' acqua attraverso le commessure naturali del fusto. Parmi che a questa specie si possa conguagliare il numero piuttosto grande di tentacoli digitiformi che conservo sopra due pezzi di muschelkalk staccati dal Sasso della Limpia, ch'è pure il luogo nel quale trovai li fusti sopra descritti (*fig.* 2.). In questa opinione mi conferma vieppiù la perfetta somiglianza che hanno i tentacoli recoaresi col disegno che diedero gli autori, e particolarmente il Goldfuss del *Pentacrinites scalaris* (*Goldfuss. Tab.* 411.).

A Recoaro, dove soglio recarmi tutti gli anni, ho raccolto unitamente alla specie suddetta alquanti fusti di un altro crinoide, che ha molta attenenza col *Pentacrinites cingulatus* di Münster. Le coste trasversali e prominenti di questi fusti si ripetono di spazio in spazio, come si osserva nella figura 1. della Tavola LIII di Goldfuss, attribuita a questa specie. Li miei esemplari non sono più lunghi di due centimetri, nè più grossi di due linee.

Rammento ancora esservi altri luoghi del Vicentino ne' quali la catena del muschelkalk contiene copiosi esemplari del *Pentacrinites cingulatus*; avendone io trovato parecchi in quello del Tretto.

PENTACRINITES BASALTIFORMIS. MÜLLER.

Tav. III, fig. 3.

Si affà perfettamente con la figura 12 della Tavola XVII della *Lethaea* di Bronn applicata a questa specie, cioè mostra di avere gli spigoli del fusto rotondati, gli articoli brevi, e le stelle formate di raggi petaliformi molto eleganti. S' ingannò Bronn conguagliando a questa specie la figura 13 (*Tab. XVII*) della sua *Lethaea*, che rappresenta il *Pentacrinites subteres* di Münster, e s' ingannò del paro rimandando per quest' ultima specie alla figura 5 della Tavola LII di Goldfuss, la quale vedesi invece effigiata nella Tavola LIII di questo autore.

I fusti o colonne del *Pentacrinites basaltiformis* esistono nel muschelkalk dell'alto Agordino presso il ponte del Ghirlo, un miglio sotto Cencenighe, e con più frequenza si rinvengono nel muschelkalk della valle di Levinallungo, in quello di S. Cassano, e di altri luoghi del Tirolo.

Pentacrinites? subteres. Münster.

Tav. III, fig. 4. *a. b.*

Seguendo Goldfuss e Bronn applico ai fusti cilindroidi che ho raccolti a Recoaro il nome di *P. subteres* sul fondamento delle figure che hanno dato di questa specie, benchè finora non sia stata trovata nessuna parte del corpo, entro cui risiedeva l'animale. Potrebbe anco darsi che appartenessero ad un *Encrinites* per la molta somiglianza che hanno co' fusti di questo genere. Una gran parte della colonna dell'*E. liliiformis* è cilindrica, e per ciò medesimo li fusti che sono così conformati potrebbero rappresentare a vicenda ora l'una ora l'altra delle indicate due specie. Gli articoli che descrivo non sono tra di loro congiunti per mezzo di suture serrate, come in generale son quelli de' fusti degli Encriniti, tra cui però ve n'ha alcuni che hanno il contorno della sutura affatto liscio. Le facce interne presentano cinque raggi lineari, non già petaliformi, come si ammira in alcune delle specie precedentemente descritte. Tra un raggio e l'altro v'ha una grande affossatura triangolare: e nel centro si vede un foro così minuto che per distinguerlo è d'uopo aguzzare lo sguardo, o giovarsi della lente.

Il *Pentacrinites subteres* fu trovato eziandio nel muschelkalk di S. Cassano (Bronn), e può ripetersi anco nelle rocce inferiori del terreno jurese.

Tetracrinites Recoarensis. Nob.

Tav. III, fig. 5.

Tetracrinites columna acute quadrangulari, cingulata; articulis subaequalibus.

In mezzo ai molti fusti di Crinoidi diseppelliti nel Sasso della Limpia alcuni ne trovai di tetragoni, con le facce leggermente incavate e con gli spigoli acuti. Essi sono rigati per traverso da cingoli molto vicini tra di loro; e le superficie interne degli articoli sono mancanti della stella, per essersi intieramente spatificate. La maggiore lunghezza della colonna non eccede tre centimetri; ed una delle facce riesce alcun poco più larga, e meno incavata delle altre.

OSSERVAZIONI.

Nel 1824, onorato in Vicenza di una visita del ch. Professore Bronn di Eidelberga, volli informarlo degli innumerevoli fusti di crinoidi, che alquanti giorni prima io aveva raccolti nelle alpi Recoaresi, tra cui quelli di figura quadrata formarono il principale soggetto del nostro discorso. Il Sig. Bronn, d' altronde espertissimo naturalista, e della paleontologia germanica benemerito in particolar modo (1), non seppe persuadersi che tra li crinoidi angolati esistere ne potesse alcuno di tetragono, e senza ammettere dubbj di mezzo, negò a dirittura il fatto. Era questo il partito più spicciativo, se non il più satisfacente. Io non poteva in quel momento convincerlo della verità del mio asserto coll' ostensione de' pezzi, giacche non ancora erami giunta da Recoaro la cassa che li conteneva. Tre anni dopo diedi una circostanziata descrizione de' Tetracriniti vicentini, e memore dell' opinione contraria emessa dal Signor Bronn, citai gli autori che oltre un secolo prima ebbero per assunto di illustrare nelle loro opere questi stessi fossili (*Zool. fossile, p.* 121

(1) Il Sig. Bronn pubblicava nello stesso anno 1824 l' opera intitolata *System den Urweltlichen Konchylien*, che fu condotta al suo termine nel 1825.

e seg.); ma neppure per questo mezzo ottenni il mio scopo (1). Egli continuò tuttavia a dubitare dell'esistenza de' crinoidi quadrangolari, imperciocchè li escluse affatto dall'elenco degli Echinodermi pedicillati inserito nella *Lethaea* data in luce nel 1837. Però l' esempio di questo rispettabile paleontologo non fu seguitato dal Professore Sig. Pusch di Varsavia, che nell' egregia sua opera sopra i fossili della Polonia esibì le figure di alquante crinoidi quadrangolari, e le accompagnò di lunghe e giudiziose osservazioni (*Polens Paleontologie pag.* 5. *Tab. II. a b c d e.* Stuttgart 1837. 4°.).

Encrinites liliiformis. Schloth.

Tav. III, fig. 6.

Le colonne o fusti cilindrici di questo crinoide sono i più lunghi che finora ho trovati nel muschelkalk delle alpi Venete, giacchè attingono la lunghezza di tre pollici e mezzo essendo grossi un centimetro. Gli articoli sono esteriormente convessi, eguali tra loro, senza essere tramezzati da articoli piani, come si vede d'ordinario in molti individui di questa specie. Debbo avvertire però, che nel pezzo medesimo di roccia contenente il fusto del quale esibisco il disegno, vi si veggono qua e là degli articoli piani alquanto più sottili di quelli che prendo a descrivere. L' interna superficie di ciascun articolo è fornita della consueta apertura centrale, entro cui, secondo alcuni, l' animale doveva penetrare con una porzione del proprio corpo. Da questo foro non sempre si veggono a spiccare li solchi stelliformi, che in molti fusti dello stesso genere vanno dal centro alla circonferenza di ciascun articolo, ma in alcuni la superficie appare liscia e priva di raggi. Questa differenza deriva dallo stato diverso di fossilizzazione nel quale si trovano gli Encriniti,

(1) Di fatto nella Tavola prima della *Lithographia Angeburgica* dell' Elvingio si vede rappresentato un crinoide di soli quattro lati, ed uno simile si può osservarlo nella Tav. XIII, num. 1170 dell' *Ichonographia* del Luidio; figura eseguita sopra un originale che custodivasi nel museo del celeberrimo Listero.

avendo le cento volte osservato che tali solchi mancano in tutti i fusti che si sono non solo petrificati, ma ben anco convertiti in calce carbonata spatica laminare, dotata di lucentezza perlacea, e simile a quella che raffigura il guscio degli Echinidi fossili di molte contrade. Spatificati sono i fusti racchiusi nel muschelkalk Cadorino; del più lungo de' quali diedi la figura (*fig.* 6.).

Vi si contano trenta articoli forniti del foro centrale, e mancanti, come ho detto, de' solchi; laddove gli analoghi che staccai dal muschelkalk Recoarese (*Sasso della Limpia*) sono cortissimi, composti tutt' al più di quattro articoli di aspetto terroso, e conseguentemente con la faccia interna guernita di raggi più o meno perfetti. Altri articoli, invece della stella, presentano delle zone concentriche composte di granulazioni moniliformi; altri hanno la superficie centrale liscia col margine rigato all' intorno da strie talvolta di forma alquanto gonfia, talvolta appena visibili ad occhio inerme, e tutti sono forati nel centro. Non saprei decidere se queste diverse configurazioni delle facce interne degli articoli si debbano tenere in conto di differenze specifiche, com' è inclinato a credere il Sig. Müller riguardo ai fusti cilindrici del *Rhodocrinites*, ovvero si debbano ascrivere all' età degli individui, i quali nello stato giovanile presentino de' caratteri che possano mancare negli adulti; ma comunque si voglia pensare, egli è certo che queste differenze sono patenti ne' fusti che ho sotto gli occhi, e che ho creduto bene di figurare nella tavola sopraindicata (*fig.* 7. *a. b.*). A Recoaro, come ho notate altrove, si rinvengono, benchè di rado, le plache di altri crinoidi, le quali confrontate con le figure date da Goldfuss e da Bronn, si conformano alle scapolari, ovvero a que' pezzi destinati a sorreggere le braccia digitate dell' animale.

È degno di speciale ricordanza il corpo intero dell' *Encrinites liliiformis* sprovveduto del fusto, che trovai negli strati più bassi del muschelkalk Cadorino, non essendomi noto che altri ne abbiano veduto nelle nostre contrade. Esso appartiene

ad un individuo giovane, non essendo più lungo di quattro centimetri, nè più grosso di due. Di una sottigliezza proporzionata al volume del corpo dev' essere stato il fusto, del quale rimangono ancora le vestigia. Vi si veggono le placlie ben connesse tra di loro; dalle superiori rappresentanti le spalle sorgono cinque braccia articolate che si dividono in dita tentacolari, composte esse stesse d'un gran numero di articoli, e strette insieme attorno l' apertura della bocca situata nel centro. Io ho figurato questo encrino anche pel verso della base, perchè si veggano le tre serie di plache componenti la parte inferiore del corpo (*fig.* 8.).

Rhodocrinites verus? Müller.

Tav. III, *fig.* 9. *c. d.*

È il più grosso de' fusti che ho presenti ed ha la lunghezza di tre centimetri poco più. Lo spessore degli articoli è circoscritto da solchi molto esigui, e quali si addicono ai crinoidi collocati da Müller nella sezione de' *Semi-articolati.* Il foro del centro riesce più grande che quello de' fusti, superiormente descritti, e la faccia interna degli articoli appare oscuramente raggiata. Quest' ultimo carattere, che si rileva armando l'occhio di lente, si ripete in tutti gl' individui che ho raccolti nel muschelkalk del Bellunese. Il canale non è quindi circondato di sinuosità petaloidee com' è quello del *Rhodocrinites verus*, ed i fusti sono perfettamente cilindrici. Uno solo ne trovai di figura subpentagona, che essendo rotto nel senso della lunghezza lascia vedere l' andamento delle strie trasversali dall' esterno all' interno. Codeste si rendono manifeste in tutta la grossezza del fusto, cioè dalla faccia esterna sino al foro del centro, il quale appare ostruito di materia calcaria bianchiccia portatavi dentro dall' acqua. Sulle facce interne degli articoli, tranne le strie capillari indiscernibili ad occhio nudo, non seppi scorgere niuno de' molti rilievi configurati in varie foggie, che Müller ha osservato, e che possono, per suo avviso, servire di ottimi

contrassegni per accrescere il numero delle specie appartenenti al genere *Rhodocrinites* da lui creato, quantunque, valga il vero, non ne abbia egli distinta che una sola.

Pel riconoscimento di questo genere mi sono unicamente attenuto alla forma cilindrica del fusto, all' uniforme grossezza degli articoli, ed alle strie raggiate delle facce interne de' medesimi; non avendo mai trovato nessuna delle plache del bacino su cui poter estendere le mie osservazioni e li miei confronti con le figure che di esse hanno dato gli autori.

È inutile far osservare che questo crinoide non è esclusivamente proprio del *Mountain limeston*, o calcaria delle montagne, che soggiace alla grande formazione carboniosa dell' Inghilterra, del Nord della Francia e del Belgio, giacchè come abbiamo veduto esso esiste nel muschelkalk dello Stato Veneto, e si trova altresì in quello della Polonia (*Pusch. Polens Paleontologie ; pag.* 8. *Tab. II, fig.* 7.).

Cyathocrinites rugosus? Müller.

Tav. III, fig. 109. *h. i.*

Ha la forma cilindrica di un tronco, con la faccia esterna segnata trasversalmente da strie equidistanti un poco flessuose, e con la superficie interna di ciaschedun articolo munita di circoli concentrici, che vieppiù si attenuano a misura che si accostano al centro, ove risiede l' apertura. Tutti questi caratteri mi determinarono a considerare il mio fossile una specie di *Cyathocrinites*, tutto che presenti alcune differenze messo che sia al paragone con le figure applicate da Goldfuss a questo genere (*Gold. Tab. LIX.*). La figura 1. *m* attribuita al *Cyathocrinites rugosus* conviene meglio d' ogni altra col nostro originale tanto nella forma generale che nell' ampiezza del foro orbiculare del centro, ma differisce per altri riguardi, e principalmente per le strie raggiate del piano circolare, che mancano nel mio individuo, e per non avere che tre soli circoli concentrici, mentre nell' originale ve n' ha un maggior numero.

Gli esemplari di questo crinoide si trovano con qualche frequenza nel muschelkalk dell' alto Agordino, in un luogo chiamato Valt posto a poca distanza da Canès.

In alcuni luoghi la calcarià di Valt comparisce cribrata di fori cilindrici che penetrano molto addentro la sostanza del masso sulle pareti interne de' quali sussistono tuttavia le impressioni articolari de' *Cyathocriniti* a cui davano ricetto. L'esemplare che ho figurato rappresenta anche la nicchia lasciata vuota da un individuo della medesima specie, la quale è così grande che può dare accesso al pollice della mano.

Ammonites nodosus. Brugniere.

Encyclop. Method. Tom. 1, num. 22.

Tav. IV, fig. 5. *a. b. c.*

Al dorso munito di una larga carena, alla forma e disposizione de' nodi tanto interni che esterni del primo anfratto, ed alla ampiezza e forma della apertura, nessuno ricusa di riconoscere nel fossile che ho presente un individuo dell'*Ammonites nodosus*, di cui il Signore de Haan fece un genere particolare col nome di *Ceratites*. Il nostro esemplare messo al confronto con la figura applicata da Bronn a questa specie (*Tab. XI, fig.* 20. *a. b.*) vi si affà esattamente, eccetto che nella forma de' lobi, i quali compariscono dentellati nella figura, mentre nel nostro Ammonite sono rotondi, e affatto lisci. Tutti convengono che gli Ammoniti compresi nella sezione de' *Ceratiti* abbiano le selle prive di dentellature, ma non convengono del pari che ne sia destituita anco la parte inferiore de' lobi, come in fatto si osserva nella specie che descriviamo (1). Non si può

(1) Elia di Beaumont promulgò prima d'ogni altro la mancanza di dentellature negli *Ammoniti* delle formazioni anteriori a quella del muschelkalk, e Bronn, a detto di De Buch, aggiunse a questa osservazione un fatto non avvertito dianzi, cioè che le dentellature de' lobi si fanno più rade e spariscono del tutto a misura che si avanza verso le rocce più antiche. Difatto gli Ammoniti del terreno carbonioso e degli schisti mancano affatto di dentellature, ed è questo uno de' caratteri di cui si valse de Haan per formare la sezione de' suoi *Goniatites*.

quindi mettere in dubbio che in alcuni individui dell' *Ammonites nodosus* i lobi non sieno privi di dentellature, ed appartengano tuttavia a' Ceratiti di de Haan, non già alla sezione de' *Goniatiti*, giacchè in questi ultimi li lobi sono appuntiti nella base, non mai rotondati come sono quelli del nostro fossile.

Negli anni addietro rinvenni questo cefalopodo tra il pietrame asportato fuori delle miniere di Valle Inferna (*Zool. fossile, pag.* 81.); poscia lo trovai di bel nuovo nel muschelkalk della contigua montagna di Sovelle, tra Forsenighe e le miniere suddette. Nella Zoologia fossile associai a torto questa roccia alla calcaria alpina, il che fu causa della diversità di posizione ch' io accordava in quel tempo all' *Ammonites nodosus* col risguardarlo promiscuo a due rocce zoologicamente dissimili; quando invece lo si doveva considerare una delle specie più caratteristiche e più distintive del muschelkalk. Nè io sono stato il solo ad inciampare in questo equivoco, imperocchè nello stesso torno di tempo il barone De Buch qualificava per *Zechstein* la calcaria di Durrheim posta al nord della sorgente del Necker, quantunque pe' fossili trovati da Walchen si desse esso stesso a conoscere per muschelkalk (*Zool. fossile, pag.* 82.).

CYSTOSEIRITES NUTANS? STERNBERG.

Tav. IV, fig. 6.

Questo fucoide sarebbe perfettamente rappresentato dalla figura 8 della Tavola XIV di Bronn se le parti che hanno l' aspetto di fronde fossero nella figura più brevi, alcun poco più grosse, e meno acuminate. Codeste nel nostro fossile decorrono lungo i rami e lungo il fusto come si osserva nel disegno di Bronn.

Staccai anni sono questo fitolito dal muschelkalk di Roviglinna, ed è similissimo ad un fucoide, che vidi sopra un pezzo della stessa roccia custodito nella Collezione geognostica posseduta dal Dottore Sig. Biagi medico di Recoaro.

È opinione di alcuni geologi che li Fucoidi sieno piante caratteristiche della creta, tutto che si sappia essersi trovato il *Fucoides Brardii* nelle rocce inferiori al terreno cretaceo di Pisalpinson, ed anco nello schisto ramifero di Frankeenberg nella Sassonia (*Journ. de Géologie, num.* 2. 1830.).

FORMAZIONE DEL KEUPER.

L'ultima delle rocce del terreno Triasico è il Keuper, ovvero quell' arenaria che in molti paesi ricopre la calcaria conchigliare, e viene ricoperta dalle rocce del terreno jurese. Essa è la meno sviluppata delle arenarie di sedimento antico delle alpi Venete, e manca non di rado ne' luoghi stessi ne' quali si crederebbe a ragione di doverla trovare. A Recoaro la si vede occupare l' ordinaria sua sede; ma in altre parti di quel distretto la sua formazione è stata soppressa, e per conseguenza la calcaria jurese ricopre immediatamente la calcaria conchigliare, lo che potrebbe indurre a supporre le due calcarie come membri contemporanei di uno stesso deposito, se li fossili organici della conchigliare non ci facessero accorti della differenza che v' ha tra l' una e l' altra calcaria. — A Recoaro (*Spitz*) il Keuper non oltrepassa in potenza li dieci metri, ed è sempre di tinta rosso-brunastra più o meno carica, nè contiene orma alcuna di fossili.

Anche il Keuper delle alpi Venete ha sofferta l' influenza di quelle rocce di trabocco, che scaturendo dal sotto in su, e iniettandosi attraverso le rocce nettuniche, ovvero adagiandosi sopra i loro fianchi, produssero le varie sorta di metamorfosi che in esse osserviamo. Molto gagliarda dev' essere stata l'azione prodotta dalle rocce emersive delle alpi Cadorine, e particolarmente della dolerite, che raddrizzò gli strati della formazione liassica, tra la quale si è incassata, trasformando le sue marne in uno schisto duro di color plumbeo, e modificando notevolmente il Keuper di quella contrada; come egualmente forte riuscì l' influenza della roccia pirica coricatasi per apposizione

sopra il dosso degli strati sedimentarj del Vicentino. Maraschini è d'avviso, che quella specie di falso porfido da lui osservato ne' monti della Rasta e di Frajeck, sia lo stesso Keuper modificato dai porfidi pirossenici usciti dal fondo, e addossati sulle chine de' monti secondarj; ed in questa opinione lo confermarono vieppiù la evidente subordinazione del falso porfido con le rocce di sedimento, e la niuna immediata dipendenza de' porfidi ignei, i quali le cuoprono invece per apposizione, avendo anche riempiuti li bacini che là vi esistevano (*Maraschini. Saggio sulle osservazioni del Vicentino, pag.* 94.).

È da osservarsi che ne' luoghi ove il Keuper appare modificato, le rocce calcarie, con le quali trovasi in connessione, si sono del pari modificate, non solo nella tessitura, ma ancora nella composizione.

Oltre le alterazioni chimiche e fisiche indotte dalle rocce plutoniche sulle rocce nettuniche, ed oltre al rialzamento degli strati operato dallo sbocco delle prime, un altro fenomeno produsse la forza del sollevamento nell'atto dell' ejezione, cioè la rottura degli strati calcareo-arenacei, ed il successivo sdrucciolamento delle parti distaccate sulle pendici della montagna. Io non saprei in quale altro modo si possa spiegare la derivazione delle rocce di sedimento, che sotto la forma di masse angolari si veggono inviluppate dentro le grandi dike doleritiche del Cadorino; nè a quale altra causa si debba ascrivere la presenza de' massi colossali di marmo jalino sepolto sotto le alluvioni che vi sono sui fianchi e sulle pendici de' monti di Predazzo nel Tirolo. Non posso ricordare questi massi senza aggiungere, che la perfetta loro simiglianza col marmo statuario ha fatto nascere in alcuni scultori il desiderio di tentarne la escavazione, e d' informare nel tempo medesimo l' Academia di belle arti di Venezia della scoperta fatta colassù di una cava atta a somministrare all' architettura ed al lusso un marmo simile a quello che si ritrae dalle pietraje del carrarese. Ma il marmo di Predazzo, anzi che trovarsi disposto in corsi regolari e continui, esiste solamente in ispezzoni talvolta isolati, e tal-

volta congiunti tra di loro per mezzo di grossi filoni spatici generati dalle particelle calcarie portate dall' acqua dentro lo spazio che divideva l'un masso dall'altro. Dalle relazioni testè avute dall' egregio chimico Sig. Domenico Leonardi, uno degli incaricati a riconoscere se la supposta cava di marmo sia tale da potervi fondare utili speculazioni, appresi che anco li singoli massi marmorei sono trinciati di venature spatiche; dal che si può argomentare non potersi neppure con li massi, per quanto vasti sieno, lavorare statue, colonne e cornicioni, senza che in qualche parte della loro estensione, non venga interrotta l'omogeneità della pietra dal materiale calcario che riempì le crepature. Da ciò si vede non potersi dare a quelle masse il nome di cava non essendo elleno che pezzi distaccati dalla calcaria jurese (1) in conseguenza degli urti fortissimi da essa sofferti nell'epoca in cui seguì l'emersione del granito tirolese, e quindi essere meritevole di correzione il giudizio di coloro che li annunziarono estesi abbastanza per supplire a qualunque inchiesta nelle arti (*Annali delle Scienze del Regno Lombardo Veneto, fascicolo VI*, 1831.). Questo granito, come è noto a tutti li geologi, fa passaggio non solamente alla sienite amfibolica, ma anche alla dolerite.

Tornando al Keuper dirò, che ove le calcarie liassica e jurese attingono a qualche altezza (Cadorino) quivi appunto l'azione delle rocce ignee è stata più forte, e conseguentemente maggiore apparisce l'alterazione sofferta dalle dette calcarie, dalle marne liasiche e dal Keuper che suole accompagnarle. Vedremo, a suo luogo, le varie fatte di metamorfosi che subirono le calcarie e le marne di antico sedimento tra cui sonosi iniettate le rocce plutoniche; e in quanto al Keuper credo di poter asserire che molto difficile sarebbe distinguerlo,

---

(1) Vedremo in altro luogo, che ad onta delle alterazioni e raddrizzamenti sofferti dalle rocce di Predazzo, la calcaria contiene tuttavia avanzi di conchiglie riconoscibilissime, e tra queste il *Cardium triquetrum*, ch' è la più caratteristica delle specie jurassiche.

se nella massima parte de' luoghi ne' quali esiste non si trovasse al contatto delle rocce liasiche, e non contenesse quasi sempre le stesse specie di petrefatti. Questa difficoltà deriva dai colori e stati chimici differenti assunti dal Keuper in virtù di quelle stesse cause che hanno agito sopra le rocce alle quali è congiunto. Ove il Keuper appare modificato in una marna indurata di tinta verde, esso simula in particolar modo quella roccia pirica di cui ho parlato nelle precedenti carte, e fu in grazia di questa simiglianza che inciampai nell' equivoco di credere pietra verde anche il Keuper di Peajo, quello stesso che il Sig. Pasini assicurava di aver veduto in una corsa per lui fatta nel Cadorino. Ho già allegate in altro luogo le ragioni per le quali era impedito a chiunque, nel 1828, di ben osservare la giacitura di quella marna, ed ora dico averla io stesso riconosciuta per una vera roccia di sedimento, all' occasione di una corsa fatta nel passato autunno (1844) nell' alto Cadore in compagnia del Sig. de Zigno. Ma se la roccia di Peajo è nettunica, non ne viene però che anco le pietre verdi del Zoldiano e dell' Agordino sieno tali, dandosi elleno palesemente a conoscere per rocce di trabocco, e quali appunto io aveale qualificate fino dall' anno 1824 (*Giorn. di chimica e storia natur. di Pavia*, *Bim. secondo.*). Questa mia vecchia e salda opinione, da cui ha voluto discostarsi il Sig. Pasini, venne non ha guari rafforzata dalle osservazioni del Consigliere Signor Fuchs più sopra raccontate, al quale non era ignota la calcarea arenacea verde dell' Agordino, che, secondo il mio modo di vedere, occupa lo stesso orizzonte geognostico della marna verde di Peajo, e rappresenta anch' essa il Keuper degli odierni geologisti.

Conscio il Sig. Fuchs della divergenza di opinione tra me e il Signor Pasini sull' origine della pietra verde, ed assicurato dalle sue proprie osservazioni che nel Bellunese esistono effettivamente due rocce dello stesso colore, ma di origine diversa, insisteva in una sua lettera affinchè io volessi far presente alla Sezione di geologia del sesto Congresso degli Scienziati « che « il Sig. Pasini può aver benissimo ragione, dichiarando la sua

« pietra verde una marna; ma la sua pietra verde non è certo
« la nostra; e quella che noi chiamiamo *pietra verde* è ben
« diversa dalla roccia alla quale egli applica lo stesso nome,
« contenendo essa gran copia di augiti e di felspati, mentre la
« pietra verde del Sig. Pasini ribocca di conchiglie per la più
« parte intiere, e facilmente determinabili (1) ».

Nell' alto Bellunese la roccia Kenperiana si scorge adagiata sopra il muschelkalk, e viene ricoperta da una calcaria, che ove non sia modificata e sconvolta, fa conoscere la sua identità con la calcaria liassica, come appresso avremo occasione di dimostrare. Li caratteri mineralogici di questo Kenper non sempre sono gli stessi, presentando talvolta l' aspetto di una calcaria arenacea, talvolta le sembianze d' uno schisto, e talvolta quelle di una marna indurata di tinta verde d' erba, che per essere fortemente modificata, simula in particolar modo, come diceva, la pietra verde del Zoldiano e dell' Agordino. Tale è quello che in banchi alquanto inclinati verso l' est, si eleva dal suolo di Peajo (*Cadorino*), e per breve tratto si mostra incassato tra le indicate due calcarie, per seppellirsi poscia sotto gli strati raddrizzati del lias e delle sue marne. Quivi il muschelkalk n' è appena visibile, ed il Keuper manca affatto di fossili, difetto che viene largamente compensato da' sopra riferiti caratteri di giacitura che gli sono peculiari, e da qualche cefalopodo proprio del lias che rinvenni nella calcaria che lo ricopre.

Se a Peajo il Keuper trasmutato in marne verdi silicifere non contiene conchiglie, posso però assicurare che in altri luoghi del Cadorino esso n' è a dovizia provveduto, benchè appaja egualmente modificato così nella tessitura come nella composizione. Quello spazio di terreno che resta tra li Tre-ponti e Lozzo ci porge un esempio.

---

(1) Brano staccato da una lettera del Consigliere Fuchs, letta alla Sezione di Geologia del Congresso di Milano, di cui si è ommesso di far menzione nel *Diario*.

Calando nella valle del Boite, presso Venas, e ascendendo da Cibiana il monte Rite ricco di gelamina, si rivede il Keuper verde sotto l' ordinaria sua tessitura arenacea, il quale si prolunga verso l' Ovest fino alla miniera di piombo argentifero posta nella Valle Inferna. A Rite li suoi strati sono quasi orizzontali, incassati tra il lias e la soggiacente calcaria grigia. In questo brano del terreno triasico vi scarseggiano li petrefatti, ed i pochi che mi riuscì di raccogliere sono modelli di bivalvi simili agli altri che vidi al di sopra di Lozzo, circostanza che avvalora vieppiù il concetto che mi sono formato sulla contemporaneità di queste due rocce.

Ad eccezione quindi di pochi luoghi ne' quali il Keuper appare trasformato (*Peajo, e Valle Inferna*) esso contiene ovunque le medesime specie di conchiglie. Li suoi caratteri, com' è detto, sono molto variabili: quello di Malgonera (*Agordino*) ha l' aspetto schistoso e la tinta bruno-rossastra; simile in ciò all' altro che staccai dalla base di Monte Sovelle all' est della Pieve di Zoldo; mentre il Keuper di Duram (*Agordino*) ha l' apparenza di una calcaria sabbionosa di color verde, che passa per gradi ad uno schisto nero indurito molto effervescente negli acidi, e che potrebbe forse riferirsi alle marne del lias, cui il Keuper soggiace; ma in mezzo a queste differenze di colore e di composizione, salde sono sempre le stesse specie di petrefatti. Codeste si riferiscono all' *Avicula pectiniformis* e alla *Posidonomya minuta?* Bronn, di cui parlerò tra poco.

Alla prima di queste specie si conguagliano le bivalvi contenute nel Keuper rosso-cupo che accompagna il muschelkalk di S. Cassano e de' Tre-Sassi, nel tenere di Levinallungo, di cui mi furono regalati esemplari dal Sig. Stapf farmacista d' Innichen, ove ho passata una notte.

Gl' individui dell' *Avicula pectiniformis*, che è forse l' *Halobia Lommeli* di Wissmann, esistono in quantità così strabocchevole da poter ricoprire l' intero piano degli strati piuttosto sottili del Keuper (*Malgonera, Sovelle*, ec.); e quelli della *Posidonomya minuta?* occupano, sebbene in minor numero, la

pagina opposta dello strato medesimo, nè mai eccedono il volume d'una lenticchia (1).

Avicula pectiniformis. Bronn.

Tav. I, fig. 1ª.

Tutti gli esemplari del Keuper che ho sotto gli occhi presentano infinità d'impressioni perfettamente piane conguagliabili ad una specie del genere *Avicula*, che per essere solcata alla foggia de' pettini risveglia tosto il sospetto che all' *Avicula pectiniformis* debba appartenere. Schlotheim non dà di questa specie descrizione veruna, e soltanto, a detto di Bronn, si contentò di applicare ad un individuo esistente nella collezione di Menke il nome di *Gryphites pectiniformis*. Bronn esibì le figure di due individui giovani, in cui abbastanza bene si distinguono i caratteri della specie (*Lethaea Tab.* 18, *fig.* 22. *Tab.* 27, *fig.* 13.): e Goldfuss diede un disegno che più d'ogni altro s'accosta alla specie nostra, se pure non è la stessa (*Tab.* 120, *fig.* 9. *a. b. c*). Le valve, o meglio le impressioni di queste, hanno, secondo l'età, grandezze differenti: le maggiori non eccedono il diametro di un pollice: nelle meno imperfette si ravvisa la cerniera dritta, e poco inclinata: le impressioni lasciate dalle orecchiette si veggono talvolta accompagnate da qualche lieve traccia delle appendici che si prolungano nella parte posteriore del cardine.

(1) Il Sig. Boué che visitò 23 anni addietro tutti i paesi della Germania, affine di studiare sul luogo il terreno triasico, ricorda quattro specie di Pettini come caratteristiche del Keuper, e sono queste il *Pectinites punctatus*, il *radiatus*, il *longicollis* e l'*anomalus* (Schlotheim) (*Jour. de Physique Mai* 1822.). Osservo però che tra le 20 specie di Pettini descritte da Schlotheim (*Die Petrefactenkunde* 1820) nessuna ve n'ha la quale porti o l'uno o l'altro de' nomi surriferiti, e nessuna che venga sotto quei nomi riportata da Bronn nella sua Lethaea geognostica, che pur comprende una sinonimia molto estesa.

Questa specie è certamente, tra le fossili, una delle più difficili ad essere convenientemente classificata, in causa delle molte differenze alle quali va sottoposta rispetto alla grossezza e numero de' raggi, ed alla maggiore o minore inclinazione della cerniera sull' asse longitudinale della conchiglia, per cui la vediamo riposta dagli autori ora in uno, ora in un altro genere. Schlotheim, come da noi fu osservato, la riputava una *Gryphites*; Münster la qualificò una specie del genere *Monotis* (*M. similis*); ed altri la riferirono al genere *Halobia*. Alle impressioni di questa specie, altre se ne veggono associate nel Keuper di Sovelle le quali superano in grandezza le precedenti, ed hanno i raggi molto più esigui, interrotti di spazio in ispazio da *solchi longitudinali assai profondi* (Tav. 1, fig. 2.). Quest' ultimo carattere, che manca nelle figure delle Avicule fossili che mi sono passate per le mani, sarebbe sufficiente per crederla una specie particolare; ma la circostanza di non averne incontrata nessuna fornita del cardine, chè in tutte è mutilato, mi astiene dal farvi sopra ulteriori osservazioni. Di fatto, in mezzo ad una farragine d'impressioni rappresentanti le fattezze della valva piana o superiore, appena potei trovarne una, se non intera nella regione del cardine, almeno con qualche vestigio dell' apice, o base della conchiglia. Attese le differenze superiormente notate, ho stimato di dare la figura di questo fossile, anche perchè dall' esame di essa possa qualch' uno decidere se nel Keuper di altri paesi si sono trovate Avicule simili alla nostra, il che sopra tutto importa di sapere nel presente argomento.

L' *Avicula pectiniformis*, tanto copiosa nel Keuper delle alpi Bellunesi, non è esclusivamente propria di questa formazione, imperciocchè, stando alle indicazioni date dagli autori circa la sede da essa occupata, si rileva essere stata rinvenuta anche nel lias di Wirtemberga, e negli strati più profondi delle ooliti jurassiche (*Goldfuss. Tom. 1, pag.* 139.); ed è questo, secondo alcuni geologi, un novello esempio di fossili identici tra di loro, annidati in formazioni diverse.

Fuchs assicura di aver trovato anch' egli l'*Avicula pectiniformis* nelle ooliti inferiori di S. Tomaso e di Andrich sopra Agordo (*Die Venetianer Alpen, pag.* 5.), ma un esame anche superficiale ci capacita immantinente che l'Avicula jurese dell' Agordino, appartiene ad una specie non ancora conosciuta, i cui individui si ripetono nella dolomía delle alpi Lombarde, come ho potuto accertarmi confrontando gli esemplari di S. Tomaso con quelli che mi furono presentati dall'egregio Sig. Giulio Curioni, distinto geologo milanese. Le valve di quest' Avicula sono bensì rigate da un gran numero di coste longitudinali, che partono dall' apice del cardine e vanno al margine, ma a misura che i raggi vieppiù si allontanano dal cardine, ciascuna delle coste appare scanelata da un solco visibile ad occhio nudo, il quale manca onninamente negl' individui delle Avicule più sopra descritte (*Tav. I, fig.* 3.). In altro luogo ci tornerà forse in acconcio di estenderci un poco più intorno a questa bivalve.

Quand' anche l' *Avicula pectiniformis* si trovi talvolta associata ai fossili del lias, e a quelli della calcaria jurese della Baviera, io non credo per questo si possa assolutamente escluderla dal novero delle specie che contrassegnano il Keuper Bellunese, imperciocchè, se alcuni pochi individui, ad onta de' mutamenti occorsi nelle condizioni climatologiche necessarie alla vita, hanno potuto sopravvivere alla distruzione de' loro contemporanei, e attraversare qualcuna delle formazioni che succedono al Keuper, egli è anche certo che assai scarso è il numero di questi superstiti nel terreno jurese, e pochissimi i luoghi ne' quali si trovano. Per la qual cosa io penso, che ove li testacei riferibili ad una data specie sono molto copiosi, il terreno che li racchiude venga dalla loro presenza caratterizzato, anche allora che un qualche individuo della stessa specie si trovasse fuori dell' ordinaria sua sede.

Seguendo nella determinazione de' terreni questa dottrina, si toglierebbero di mezzo le questioni insorte tra li paleontologi, tra quelli principalmente, che per essere religiosamente addetti

a qualche particolare sistema, negano la promiscuità di alcune specie, e vogliono che i fossili di una singola formazione, mai si possono ripetere nelle formazioni che gli sono contigue.

Vedremo nel seguito delle nostre osservazioni che questa sentenza è lontana dall' essere esatta, avendovi nelle alpi Venete infinità di esempj che prova in varie guise il contrario (1).

---

(1) Questi esempj si riducono ai seguenti: — Una specie organica fossile, che per la quantità degl' individui che la rappresentano fissa l' epoca di formazione del piano in cui si trova, può anche presentare le sue reliquie, tanto negli strati che sono superiori al detto piano, quanto in quelli che al piano medesimo si mostrano inferiori. In ambi questi casi le reliquie, delle quali parliamo, sono scarsissime, e come raminghe in mezzo alla farragine delle specie proprie della formazione cui gli strati predetti appartengono. Gli esempj de' fossili Keuperiani, che in numero assai ristretto si trovano, quasi direi, a disagio nel terreno jurese della Baviera, li abbiamo citati più sopra; quelli delle dolomíe juresi, che sotto le medesime circostanze si ripetono nel sistema cretaceo, li ricorderemo alla lor volta, e qui basterà a compimento della presente nota, ch' io richiami alla memoria de' lettori altri fatti degnissimi di ricordazione. Il *Conoclypus conicxcentricus*, di cui ho data la descrizione e la figura del Tomo V degli Atti dell' Accademia di Padova (1839), fu trovato nella zona cretacea superiore del Veronese, quantunque sede precipua di questa specie sia la calcaria terziaria che ricopre la creta. Questo fatto troverebbe spiegazione se gli strati della creta e quelli della calcaria grossolana mostrassero di essere stati raddrizzati da un sollevamento; perchè allora potrebbesi credere, che nell' atto in cui seguì l' emersione de' basalti veronesi qualche individuo della specie suddetta sia stato evulso dal terreno terziario, e trasportato sul piano della creta, ma li fenomeni locali di Valdonega, dove ho rinvenuto il *Conoclypus*, non sono tali da poter supporre che ivi sia occorso un sollevamento. Non vi essendo in quella situazione nessun fatto geologico il quale torni in acconcio per ispiegare d' onde addivenga che una specie fossile del terreno terziario si trovi talvolta raminga nella creta, parmi si possa dare una ragione del fenomeno ammettendo « che un qualche raro germe del *Conoclypus conicxcentricus* abbia potuto svilupparsi quando il mare « conduceva a compimento il sistema cretaceo, e che, cessate le cause impedienti questo « sviluppo, lo svolgimento totale de' germi, già animati da una forza vitale molto vigo- « rosa, siasi effettuato con singolare celerità, allorchè il mare deponeva li materiali del « terreno terziario ». Col sussidio di questa ipotesi, e con la ragionevole supposizione che qualche raro individuo abbia potuto sorvivere a' suoi simili, e portare le sue spoglie ne' piani di un altro periodo geologico più recente, si spiegano le associazioni finora osservate di fossili d' una formazione con quelli di un' altra formazione, sia che

Dissi più sopra che all' *Avicula pectiniformis* trovasi associata un' altra bivalve, cui da taluni fu applicato il nome di *Posidonomya minuta*, quantunque non si rinvenga di essa che i soli modelli adesi tenacemente al Keuper, i quali d' altronde sono così esigui, che ad occhio inerme si prenderebbero piuttosto per grani schiacciati e rotondi di arena, che per testacei. Le reliquie che quì accenno non sono tanto copiose nel Keuper quanto mostrano di essere nel lias dell' Agordino, dove pure

---

codesti esistano nella zona superiore al piano da essi ordinariamente occupato, sia che si trovino nella zona che al detto piano riesce inferiore. Ambidue queste anomalie sono state ultimamente verificate nell' Isola di Wight in una formazione anteriore al Gault e posteriore al calcare neocomiano, la quale fu distinta dal D' Orbigny col nome geografico di terreno *apticno*. Una sola delle molte specie contenute in questa formazione ha potuto passare nel Gault (*Solarium dentatum*, D' Orbig.); mentre nella roccia neocomiana che gli soggiace se ne trovarono quattro, cioè la *Nucula obtusa* (Fitton), la *Nucula scapha* (D' Orbig.), la *Nucula simplex* (Desh.), e l'*Arca Marullensis* (D' Orbig.). (*Bull. de la Société géolog. — Tomo secondo della seconda serie, pag.* 90.).

Un altro fatto, del quale non seppi dare la spiegazione senza ricorrere alle ipotesi, è quello delle faune omonime incluse in formazioni tra di loro diverse del sistema cretaceo. In una Memoria epistolare, letta al Congresso di Lucca, io diceva che nelle alpi Venete le Rudiste hanno stanza nel calcare neocomiano, non già nelle sabbie verdi superiori come si ammira nella Francia, ed aggiunsi che questa anomalia non impedisce di dare ai caratteri paleozoici quell' importanza che loro venne attribuita, quando si voglia ammettere « che il mare abbia deposto in una medesima epoca, e sopra fondi « posti a livelli geognostici differenti, le stesse specie d' animali. » Col sussidio di questa supposizione parvemi di poter concludere « che nell' epoca in cui il mare recava al « suo termine la terza zona del sistema cretaceo della Francia, cominciasse nelle alpi « Venete ad innalzare il terreno della creta con la deposizione de' materiali che costi- « tuiscono la parte inferiore del terreno medesimo, rappresentata dalla zona neocomiana. » È incontrastabile che nel Friuli, nel Bellunese, nel Trevigiano, nella Dalmazia, e forse anche nella Lombardia, le faune fossili del sistema cretaceo non istanno in armonia con le faune divisate dal cel. D' Orbigny nel terreno cretaceo della Francia, ma occupano un orizzonte geognostico diverso. Questo fatto può acquistare grande importanza nelle questioni di geogenia perchè, studiato che fosse in ogni sua parte, condurrebbe a scoprire la contemporaneità di alcune zone del terreno cretaceo che finora si sono credute geognosticamente dissimili. Formazioni sincrone, pei fatti più sopra narrati, sarebbero le *sabbie verdi superiori* della Francia, e la *calcaria neocomiana* delle Provincie Venete. (*Annali delle Scienze Naturali. Tom.* x, *pag.* 263. *Bologna.*).

occorrono sotto forme di modelli, che costantemente conservano lo stesso volume delle altre incontrate nel Keuper. Era necessario, ch' io facessi menzione di questa conchiglia, e n' esponessi lo stato in cui esiste, perchè non si avesse a confonderla con la *Posidonomya minuta*, la quale esiste invece nella dolomía dell' Agordino, ed in quella delle alpi Lombarde, come vedremo a suo luogo.

PARTE SECONDA.

TERRENO JURASSICO.

SUA ESTENSIONE.

Il geologo che da *Innichen*, nel Tirolo, viene verso la Provincia Bellunese può entrare per due strade principali: quella della valle di *Sexten*, che mette ne' paesi più orientali del Cadorino (Dosoledo), e quella detta *Ampezzana* che conduce nelle parti più occidentali del Cadorino medesimo. Salendo la prima, ben più disagevole dell' altra, e meno atta a procurare intervalli di riposo all'occhio del pari che al piede, si cammina pel tratto di circa dodici miglia italiane sopra il terreno *psammeritrico* di Sesto e di Monte Croce già descritto ne' paragrafi precedenti; e piegando verso la seconda, ovvero attraversando il *Campo di Toblach*, vi si entra lasciando a dritta il Rienz nel punto in cui questo torrente esce dal lago. La strada è ovunque spalleggiata da formazioni calcarie, che finiscono in piramidi pittoresche, le quali, ove la valle si allarga, prospettano in semicerchio ostentando la forma di grandi obelischi, di castella turrite e di anfiteatri, che vanno via sfumando gradatamente per perdersi nell' orizzonte. I maggiori allargamenti che presenta la valle si potrebbero forse fissare ne' seguenti punti: al di sopra di Landro non lungi da *Rienz Kopf*, a *Cima Banche* (*Gemerk*) e ad *Ampezzo*. Da questi luoghi si ammirano

sotto varia ordinanza di figure e di colori i gioghi alpestri di *Creppa Rossa* (*Rothen Wand*), delle *Tre Punte*, di *Croda d'Ancora*, di *Cristallin*; e dall'albergo Barberia in Ampezzo le *Cime del Pelmo* (all' ovest), quelle a più piramidi di *Termin* e di *Sasso del Mezzodì*, che pur si veggono alzandosi di poco sul versante meridionale di *Monte Crepadel* presso Cortina.

Progredendo verso Borca, la zona jurassica che si eleva a sinistra ha del pari le sue vette conformate in guglie e piramidi non inferiori a quelle de' monti che abbiamo rammemorati, le quali si scorgono anch' esse a distanze grandissime (Cime dell' Antelao); ma continuando il cammino verso *Pieve di Cadore* e di là fino al monte *S. Catterina* che divide il *Comelico* inferiore dalla comune di *Auronzo*, l' altezza della zona si fa minore e li suoi dintorni divenendo più selvosi coprono gran parte della sua nudità. La catena jurese finisce sul fianco orientale di *M. Santa Catterina*, dove per lo spazio di circa sei miglia (sud - est) appare interrotta da grandiosi dossi di micaschisto altrove descritti, e ricomparisce sopra *Prezenagio*, ove ha parte di sua base il monte *Visdende* (est), per estendersi verso la Carnia (sud-est). Quivi con le sue diramazioni e protendimenti invade più distretti di quella Provincia, ove intrecciandosi talvolta con rocce evidentemente eruttive si gessifica e riceve attorcimenti e raddrizzamenti più o meno degni di nota (Monti di *Tolmezzo* presso *Amaro*). Dalla Carnia sotto forma di dirupi, ora stretti e rovinosi, ora protesi in falde profondamente squarciate (M. Progajene, Dosso di Prebutana, ec.) passa per Cimolais e di là nell'*Alpago*, dove forma la base di varie eminenze (Sochero), indi piegando verso il Sud di Belluno, si erige in montagne coperte ovunque di pascolo (Faverghera, Valdart, S. Pietro in Tuba, Dussoi, ec.) (1).

Le stesse diramazioni hanno luogo nelle parti più occidentali e meridionali del Cadorino, se non che, quelle innalzantesi

---

(1) Il monte Dussoi è nudo di vegetazione nella metà superiore, e l' austerità della sua salita è resa più difficile dai massi scommessi caduti dall' alto che s' incontrano tra via.

al sud-est di Borca (*Arsiera, Rite, Cibiana*, ec.) sono più complesse e forse più metallifere delle altre che spiccano dal punto opposto della catena per inoltrarsi nel Friuli.

Ciò che ho detto sull' andatura delle alpi juresi cadorine si può sotto certi riguardi ripetere anco di quelle che lungo il Cordevole nell' Agordino si distendono in varj rami nel Feltrino, e al nord-ovest di Bellnno; salvi peraltro li depositi di rocce emersorie e di rocce sedimentarie più antiche che in diversi luoghi ne interruppero o ne impedirono la continuazione, e salvi li terreni di formazioni più recenti che talvolta li ricoprono intieramente.

Partendo da *Digonera*, paese finitimo col Tirolo, la zona jurese Agordina, o la valle del Cordevole che ne determina la principale sua direzione, corre per due miglia o poco più dal nord all' est; e prima di attingere *Caprile* si dirama nelle due valli che portano il nome de' torrenti, a cui danno passaggio (*Pettorina* e *Fiorentina*). Poco sotto *Caprile* si torce verso il sud, e presso *Villa del Tos* riceve nel suo lato orientale una curvatura entro la quale ebbero luogo forti movimenti emersorj (tra *Calloneghe* ed *Alleghe*); poi si curva di nuovo verso occidente (Cencenighe), e giunta a Taibon porta le sue braccia nella valle di *S. Lucano* che si apre alla dritta del Cordevole, e di là nel monte *Pape*, dove apparisce modificata da' melafiri, che ivi s' incontrano nelle più alte cime. Da *Taibon* discende sino alle *Fucine* ove riesce del pari travisata dalle rocce pirometalliche di *Valle Imperina*. Quivi la catena, rispetto ai torrenti che ne seguono l' andamento, si può concepire divisa in due rami principali: uno penetra nella *Valle Imperina* posta a dritta della miniera (sud-ovest), l'altra piega a sinistra (sud-est di Agordo), e si distende verso il basso Bellunese, formando dall' un lato le eminenze juresi di *Caudaten*, di *Peron*, di *Talavena*, di *Terne*, di *Serva* e di *Cernoi* (ove ha sua origine l' *Ardo*); e dall' altro li monti *Pizzon*, *Stornado*, *Alto*, a' quali puossi assegnare per confine la manca riva del Miss; il ramo che s' interna nell' *Imperina* si congiunge ai monti metalliferi di Tiser,

cui sono legate le balze dolomitiche di *Prabello*, di *Pizzocco*, e di altre montagne che spiccano dalla dritta del *Miss* per prolungarsi verso il Tirolo. Di fatto le alpi di questo ramo, facendosi ove più rotte, ove più scoscese, si distendono nel Feltrino (*Monte Palle, Sasso largo*, ec.) per attaccarsi ai greppi dolomitici di *Pizz* e di *Cima d'Eva*, posti all'oriente di *Primiero.*

Le alpi juresi Vicentine sono esse stesse diramazioni della catena principale Tirolese le quali per le gole di *Vallarsa* e di *Campo Grosso* poste al nord di quel territorio, si diffondono ne' circoli montani di *Schio* e di *Recoaro*, assumendo forme che rappresentano in qualche luogo la viva imagine delle alpi Cadorine, con cui ebbero comune l' origine. Però le altezze loro non sono tali da farsene paragone con quelle di Civita, del Pelmo e dell' Antelao, che vogliono essere distinte come le più considerabili del Veneto.

L' emersione dolomitica Tirolese dilatò le sue propagini anco nell' agro di Verona, dove si può vederne l' andamento in più d'un luogo e particolarmente al nord del Benaco presso *Torbole*, oppure ascendendo la valle d' *Illasi* fin oltre *Ghiazza* (nord nord-est di Verona). Le propagini benacesi, forse in causa di forti commozioni sotterranee ivi sofferte dal suolo, vanno a mescersi con le rocce ammonitiche meno antiche erigentisi in colossali eminenze sulla sponda occidentale del lago (*M. Baldo*); laddove le seconde costituiscono la base visibile delle montagne poste al N. E. di Verona, per esempio di quella di *S. Pietro* (*Badia Calavena*), ove in effetto la *dolomía rosea* porta sopra di se le calcarie ammonitiche, le quali sono esse pure ricoperte dalla creta bianca che si distende sopra tutto l'altipiano che conduce alla pesciaja di Bolca (*Zool. fossile, p.* 195.).

Avrei potuto allungare assai più che non feci l' enumerazione de' paesi ove sonovi dolomíe ora sole, ora associate ad altre rocce; ma essendo mio intendimento di considerarle più divisatamente sotto ogni aspetto, riserbo a miglior tempo le ulteriori notizie che potrei dare di altri luoghi delle alpi Venete dove le ho ravvisate.

ROCCE PRINCIPALI DEL TERRENO JURASSICO.

Il terreno jurassico delle alpi Venete può essere diviso in quattro gruppi, i quali, cominciando dal più basso, si succedono come segue: 1°. Una calcaria grigio-nerastra, sovente assai compatta talvolta selciosa, talvolta inquinata di bitume, la quale è un vero rappresentante del *lias*; 2°. Una calcaria ordinariamente bianca, di grana più o meno cristallina identica sotto ogni rapporto alla *dolomia* ed alla calcaria bollosa (*Rauchkalk*) delle alpi Tirolesi; 3°. Una calcaria *oolitica* inferiore, ora bianca, ora cinerea, i cui strati spesso orizzontali alternano qualche volta con gli strati di calcaria compatta; 4°. Una calcaria *oolitica superiore* talvolta conchigliacea. A questi quattro gruppi il Barone De Buch proponeva nel 1844 di aggiungerne un quinto associando al terreno jurassico la calcaria rossa ammonitica, che fino allora reputavasi la più antica delle rocce cretacee; ed il Cav. Collegno, sul riflesso giustissimo che tale calcaria scompagnare non si possa dal *biancone*, consigliava di trasportare anche questo nel terreno del quale ci occupiamo.

Io ricusai di acconsentire alla proposta separazione di due calcarie dal terreno cretaceo per registrarle fra le rocce jurassiche, e ciò per le convincenti ragioni allegate in un recente mio scritto (1), le quali verranno in parte riprodotte nella presente Memoria. Comechè queste ragioni sieno più che mai valevoli a corroborare il mio assunto, pure nell' alternativa in cui versano alcuni Geologi di ammettere o la classificazione del Cav. Collegno, o quella che considera come rocce *infracretacee* la calcaria ammonitica ed il biancone, dichiaro non essere io così pertinacemente attaccato alla seconda delle dette classificazioni quanto si è voluto far credere da chi per difetto di osservazioni, meno aveva il diritto di entrare in siffatte contro-

(1) Osservazioni sopra una Nota del nob. A. de Zigno intorno alla non promiscuità de' fossili tra il biancone e la calcaria ammonitica, inserita negli Atti dell'I. R. Istituto. Tomo V.

versie. Anzi penso che senza punto nuocere al piano de' miei lavori paleontologici, e coerentemente al fondamento della promiscuità de' fossili toccato nelle citate osservazioni, posso appellare *soprajurassica* la formazione costituita dalle accennate due rocce, a quel modo per esempio che altri proposero di chiamare *sopracretacea* la calcaria miocena de' terreni terziarj. Ciò è appunto il cambiamento che sono per introdurre nella *Geognosia paleozoica* delle alpi Venete, di cui non esibisco adesso che un Saggio.

Formazione della Calcaria Liassica.

Stando ai caratteri della giacitura io non avrei saputo distinguere questa calcaria che in due o tre luoghi del Cadorino, giacchè da Borca al lago di Toblach non mi sono abbattuto di vedere nessuna roccia, la quale si potesse con sicurezza conguagliare al *lias*. Bensì tra Landro ed il lago suddetto (sulla dritta del *Rienz*), appiè delle alpi dolomitiche, si vede una serie di strati calcarei aventi lo spessore di otto o dieci centimetri che sembrano appartenere al *lias*, ma non arrischierei affermare che in realtà tali essi siano. Questi strati in generale sconvolti e rotti, si elevano di poco sopra il suolo, e ciò impedirebbe di conoscere i punti verso i quali s' indirizzano, se in qualche luogo non si mostrassero oscuramente inclinati al nord est. La roccia non contiene orma alcuna di fossili; ha una tinta grigio-carica che verge all' azzurrigna; una tessitura più o meno compatta, talvolta cristallina secondo che appare più o meno modificata da rocce eruttive. Spesso è intercisa di vene spatiche bianche insinuatesi nelle fenditure prodotte dai dislocamenti posteriori alla sua consolidazione (Calalzo, Lozzo, ec.).

Io non conosco verun luogo nelle alpi Venete dove le rocce liassiche si lascino studiare così completamente come a *Peajo*, paese che distà venti miglia da Landro, e quattro circa da Pieve di Cadore. Un altipiano di qualche estensione (campagna di Peajo) separa le sublimi vette dell' Antelao dai dirupi surti

presso la valle di Rumiano (Ruviniano), e propriamente nel punto in cui lo stradale d'Allemagna riceve una forte curvatura. Quivi si vede un complesso di strati raddrizzati, il più basso de' quali, ch'è il *muschelkalk* si eleva di poco sopra terra, e l'osservatore lo avrebbe sotto i suoi piedi se il sentiero non fosse stato inghiajato per comodo delle carrozze. All'evento che i materiali recati giù dai torrenti, e messi a profitto per acconciare la via, si alzassero a grado di coprire lo strato, può non pertanto il Geognosta assicurarsi della sua esistenza discendendo nella valle del Boite che soggiace alla strada. Sopra di questo strato posano i banchi verdi del Keuper, de' quali ho dato contezza nel paragrafo precedente. Codesti s' innalzano sopra terra non più di quindici piedi e si prolungano per lo spazio di venti piedi soltanto; laddove nel 1828 occupavano una lunghezza molto maggiore, differenza che vuolsi attribuire all' uso che ne fu fatto, e che si fa tuttavia di qualche porzione del dirupo che guarda verso Borca, per impiegarlo ne' ristauri della strada (*Giornale delle Scienze e lettere, N.° XI. Treviso* 1828. 8°.). Da questo punto fin oltre Vallesina, una potente massa di dolerite, inattaccabile dagli acidi, si è aperta uno sfogo squarciando l'alto deposito de' sedimenti marini che si opponevano alla sua uscita, e modificando in varie foggie le rocce con cui si è messa al contatto. Gli strati raddrizzati del lias e delle sue marne si sono adagiati sui fianchi della dolerite, che a guisa di colossale piramide, si eleva più centinaja di piedi al di sopra della strada. Questi strati, che di rado eccedono la grossezza di un decimetro, si trasformarono in una calcaria nerastra molto dura effervescente agli acidi, talvolta minutamente scagliosa nella spezzatura, talvolta granulare e più spesso compatta; ma ciò che è da considerarsi si è un infinità di bernoccoli stiacciati che si veggono sulle faccie delle commessure degli strati medesimi, i quali si prenderebbero a prima vista per gusci di bivalvi, e che dall'inglese naturalista Sig. Charters si sospetterebbero invece reliquie di piante. Io non saprei sottoscrivermi nè all'una nè all'altra di queste opinioni, e credo

invece che que' rilievi sieno un effetto dell' azione esercitata dalla lava al momento della sua comparsa. Le marne al contrario si modificarono in una roccia schistosa durissima, sparsa di pagliette micacee, ma scevra anch' essa di conchiglie.

De' fenomeni di Peajo darò in altra mia opera la descrizione accompagnata da relative figure. Noteremo soltanto che alle emanazioni solforose, surte con l' uscita della dolerite di Peajo, vuolsi attribuire la conversione della calcaria di *Monte Zucco* in gesso e forse anche la costante mineralizzazione delle sorgenti epatiche che ivi esistono. La calcaria liassica passa poi da Vallesina a Valle di Cadore, e drizzando i passi verso la parte più orientale della strada, la si vede di nuovo tra Pieve e Calalzo, ove occupa la parte più bassa di quelle brevi eminenze. Discesi nella valle del Molinà, che soggiace alla strada (Lagole), ma un' alta e antica alluvione lasciata ivi dal Piave ricopre il versante sud-est dell' alpe, e impedisce di riconoscere se il lias discenda fino a quella profondità, o abbia sotto di sè una qualche roccia triasica (1). Non saprei dire se dal punto in cui l' acqua del Molinà si scarica nel Piave fino a Lozzo vi si scorga indizio alcuno di rocce liassiche, ma so bene che l' alpe gessosa di Domegge si prolunga interrottamente fino a Lozzo, dove il fenomeno della gessificazione appare così manifesto da non ammettere alcuna dubbiezza circa le cause che ho prodotto. A Solergna (Montagna delle Pecore) due miglia all' est di Lozzo si erige in mezzo a' terreni sedimentarj antichi una considerabile *Dika* o muraglia di dolerite contenente macchie e punti d' amfibolo, le quali danno alla roccia l' aspetto porfiroideo. Dell' estensione occupata dalla dolerite di Solergna e delle modificazioni subite dalle rocce circostanti che preesistevano alla sua comparsa, mi riserbo di parlare nell' opera sopracitata; per ora basti dire che il monte *Ravis* posto a sinistra di Lozzo, e del quale ho fatto cenno in altro luogo di questa

(1) Ciò che di meritevole d' osservazione offre questa valle, segnatamente nel sito detto Lagole, non lungi dal Piave, è stato da me descritto nell' Opera sopra i Terreni postdiluviani del Veneto; pag. 191 e seg. 1844, in 8°.

Memoria, presenta un complesso di rocce parte gessose e parte calcarie, in cui è facilissimo riconoscere le tre zone principali del terreno jurese, metamorfosate quasi per intero dalle emanazioni solforose che accompagnarono l' apparizione della dolerite. La più bassa di queste zone raffigura la calcaria liassica bigio-nerastra con vene bianche, tanto diffusa nel Cadorino e nel Friuli, della quale conserva intieramente la fisonomia così ne' colori, come nella forma e modo d' intrecciamento delle vene che la intersecano: la media rappresenta la dolomía bianca della quale ritiene spesse volte la tessitura granulare: e la terza, su cui non si è fatta sentire l'influenza delle cause modificanti, presenta tutti i caratteri della calcaria oolitica superiore, simile sotto ogni rapporto a quella che forma la cima dell' Antelao presso Borca. Lo zolfo in grani che l' egregio chimico e fisico Sig. Sebastiano Venzo di Lozzo vide interposto nelle screpolature della dolomite, ora mutata in gesso, e le molte sorgive epatiche esistenti appiè delle alpi cadorine, sono altrettanti fatti che depongono contro il parere di coloro che attribuiscono ai gessi del Veneto un' origine eruttiva, mentre per l' opposto avvalorano mirabilmente l' opinione che considera il gesso come *un prodotto della trasformazione locale della calcaria, operata dalle emanazioni solforose che sopra vi si effusero.* Di gran lunga più naturale, e più consentanea alle osservazioni è sembrata quest' ultima opinione anche al Sig. Virlet, che la adottò per ispiegare la genesi dei gessi della Savoja.

Da Lozzo ai Tre Ponti, le rocce che stanno a sinistra dell' Osservatore, formano dossi di brevissima altezza, composti di banchi ora verticali, ora così fattamente sconvolti che riesce difficile discoprire l' andatura di quelli che pur sono inclinati verso l'orizzonte (1). Fra queste rocce così sconcertate si vede il Keuper di tinta verdiccia ricco di bivalvi, incastrato fra i banchi verticali di una calcaria oscura, che serba tracce di

(1) Le strane torture e contorsioni che soffersero le rocce sedimentarie di questa parte del Cadorino vogliońsi ascrivere all' emersione del micaschisto che ne occupa il centro, di cui la comparsa de' filoni metalliferi Auronzesi è stata la conseguenza.

petrefatti riferibili alla formazione del *lias*. Il Sig. Zanon juniore che mi fu compagno nella corsa ivi fatta nel 1845 ebbe la ventura di trovarne alcuni che, sebbene malconci, mostrano tuttavia di appartenere a specie liassiche. Tale mi sembra essere un frammento di *Ammonites*, in cui si riconosce il complesso de' caratteri assegnati da Schlotheim all'*A. hiricinus*, ed anche a quello che lo stesso autore distingue col nome di *A. lineatus*, i quali furono entrambi collocati da Bronn nella sinonimia dell'*A. fimbriatus* di Sowerby.

Nel tratto di suolo che abbiamo descritto non si ripetono le marne liassiche che vedemmo a Rumiano, ma progredendo verso Auronzo esse ricompariscono copiose, e sempre sotto l' aspetto d' uno schisto grigio-scuro, che per essere dotato d' una durezza significante, si cava dagli Auronzesi per impiegarlo come pietra da fabbrica.

Ne' dintorni d' Auronzo non si distingue che a stento la calcaria riferibile alla formazione delle marne cui è congiunta, forse per essere stata essa medesima trasformata in roccia schistosa. Per la maggiore intensità del calore che quivi regnava al momento dell' emersione del micaschisto il lias potè probabilmente metamorfosarsi, e ricevere dalla roccia modificante la molta mica e li grani di quarzo, di cui sono spesse volte seminate le marne liassiche di questa contrada (1).

Questa serie di luoghi che andai accennando, ne' quali si mostra il lias, si potrebbe allungare assai più se tutte le indicazioni che mi sono procurato sulla sua esistenza in altri paesi del Veneto io volessi quì riferire. Però prima di terminare il mio discorso sulla roccia di cui finora ho parlato non posso ommettere di ricordare alcuni altri punti, ne' quali essa esiste nel basso Bellunese.

---

(1) Dal letto dell' Ansiei, che resta a sinistra della strada dischiusa nelle marne suddette, sporgono fuori masse di gesso bianco e bigio nelle quali penetrò a modo di vene e di piccoli banchi il quarzo massiccio accompagnato talvolta da grani di blenda gialla, simile per questo rispetto al gesso roseo di monte Varolo presso Schio.

Appiè del versante nord di Serva (*Valle dell'Ardo presso Mortis*), e di sotto alla calcaria jurese che soggiace alle *ooliti* formanti la cima di questa montagna, si veggono gli strati d'una roccia nera fortemente selciosa, inquinata di bitume, di tessitura ora scissile ora compatta, la quale fu da noi altre volte descritta sotto il nome di *Schisto siliceo*, attesa la molta sua conformità col *Kieselschiefer* de' geologi tedeschi. Nell' interno di alcuno di questi strati ho scorto infinità di corpi di figura botrioide, composti del materiale medesimo dello strato, e distaccati dalle pareti del vano che li racchiude, alla maniera de' noccinoli delle *etiti*. De Buch ha osservato un fatto consimile nello schisto siliceo d'una montagna presso Cristiania (*Zool. fossile, pag.* 57.). Gli strati decisamente liassici di questa roccia sono fra di loro divisi da una marna scissile bituminosa entro la quale li Signori Petland e Charpentier hanno con forti lenti ravvisato avanzi organici e probabilmente squame di pesci. Ho presentato al Congresso scientifico di Firenze alquanti esemplari di queste rocce, e molte discussioni si sono fatte circa il posto ch' esse dovrebbono occupare nella serie cronologica delle formazioni, benchè nessuno degli intervenuti a quel celebre Congresso le avessero vedute sul luogo (1) (*Atti del Congresso di Firenze, pag.* 155 *e seg.* 1841. 4°.).

La mancanza in valle dell'Ardo di rocce modificanti mi aveva fatto prendere per roccia pirica la calcaria nera selciosa

(1) Il chiarissimo Presidente della Sezione di geologia di quel Congresso appoggiandosi all' autorità del Prof. Studer insisteva a considerare cretacee le rocce di monte Serva; ma una lettera che conservo dello Studer mi dichiara non aver egli penetrata così addentro la valle dell' Ardo da poter vedere co' suoi occhi medesimi la giacitura di quelle rocce. *M. Serva* è composto da capo a fondo di rocce juresi, e se una piccola parte della china guardante il sud (tra *S. Michele de Ros* e *Sergnano*) appare formata di *Scaglia rossa*, ciò non prova che tutto il resto dell' Alpe appartenga alla formazione cretacea; anzi ognuno può ocularmente assicurarsi che la *Scaglia* di S. Michele di Ros contenente coralli, un tempo legata a quella di Cugnano, di Tambre, di S. Croce ecc. non è che per apposizione congiunta alla calcaria jurese dalla quale è sorretta. Difatto se li suoi strati s' internassero nel massiccio della montagna si mostrerebbero anche nel versante nord dove certo la Scaglia non esiste.

del monte Serva, ma convinto ora che tale ella non sia, continuerò in avvenire a considerarla come il prodotto del più antico fra i sedimenti dell' era jurassica. Gli strati dolomitici adagiati sopra questa roccia modificata appajono incurvati in maniera da raffigurare altrettanti circoli spirali, non dissimili da quelli osservati da Saussure nella valle di *Salanche*, e da Brocchi alla sinistra del Mella, quasi di prospetto alla terra di Eto (*Miniere del Dipartimento del Mella. T. II, p.* 247.) (1).

Alla formazione del lias si potrebbe forse conguagliare una calcaria nera bituminosa contenente arnioni di pirite cuprea, che vidi anni sono fra *Lintiai* e *Cesana* (sud-ovest di Belluno), e propriamente nel punto ove la catena jurassica si abbassa alquanto verso occidente e va poscia a perdersi sotto il letto del Piave. In questo brano del terreno jurese parvemi regnare gran discordanza di posizione tra gli strati dolomitici superiori e gli strati del lias posti inferiormente. Il non convenirsi con la pendenza degli strati più alti la direzione de' più bassi, può essere effetto delle azioni emersorie che sconvolsero e ridussero in frantumi gli strati del lias, senza produrre le stesse alterazioni nelle calcarie che li ricoprono. Dagli strati liassici di questa località si estrae gran copia del materiale che si adopera a Belluno e ne' paesi limitrofi, per pavimentare le stanze.

Il lias non è stato peranco distinto da nessun Geologo nelle alpi Vicentine. Narra Maraschini che la calcaria jurese di quella provincia è sorretta da una calcaria nera che per essere sprovveduta di Grifee e segnatamente della *Gryphaea arcuata* non può essere per suo avviso riferita alla formazione liassica. Dice però che in quella roccia occorrono reliquie di Trochi, ma non dice a quale specie esse appartengano. Ora mercè più accurate osservazioni e confronti si potrebbe forse scoprire fra que' testacei le spoglie de' *Trochus duplicatus, similis* e *imbricatus* di Sowerby, che sono specie caratteristiche

(1) Ho fatto sentire in altri scritti il sospetto nel quale io sono che al di sotto del lias di Serva si possa trovare, ad una certa profondità, del carbon fossile.

del lias (*Maraschini. Saggio geologico sulle rocce del Vicentino 1845, pag. 96 e seg.*). Il Sig. Pasini ne' suoi *Rapporti geognostici fra alcuni punti degli Apennini e delle Alpi* si mostra indeciso se la calcaria nericcia di monte *Cengio* nella valle della *Leogra* appartenga al *muschelkalk* ovvero ad una roccia più recente, e questa sua incertezza sembra derivare dalla mancanza del *Keuper*, che in altre località del Vicentino vedesi incassato fra il *muschelkalk* e le rocce inferiori del terreno jurassico. Ad onta di questa sua perplessità egli propose di ravvicinare la roccia di Cengio alla calcaria nericcia del lago di Lugano, la quale stando alle osservazioni del Cav. Collegno sopra i terreni stratificati delle alpi lombarde costituisce la parte più bassa delle calcarie juresi, ed è generalmente conosciuta sotto il nome di *Marmo di Varenna*. Ne' luoghi dove questa calcaria diventa schistosa, non è raro trovarvi avanzi di pesci (Valle d' Esino) e modelli di bivalvi (Guggiate) che hanno le loro analoghe nel lias dell' Inghilterra. (1)

Del lias Veronese non potrei dare indicazioni sicure, benchè dall' esame delle rocce e fossili che ho raccolti nel lungo mio soggiorno a Verona si possa verosimilmente congetturare ch' esso esista in qualche luogo, cioè nella valle di *Briago*? nel tenere di *Grezzana*, e nel *Bosco delle Piche* non lungi da *Lugo*. Il lias di quest' ultima località si ripete a *Lughezzara* ed anche a *Zichesin* presso *Veio* dove contiene vestigia di corpi organici che ritengono l' apparenza di Polipai ed anche quella degli Entrochi. Io attendo dal mio amico e collega Dott. Giulio Sandri di questi polipai in migliore stato di conservazione de' finora trovati, per meglio appoggiare il giudizio che dubbiamente

(1) Descrivendo nel 1819 la geognosia di M. Civillina posto all' ovest di M. Cengio, non tralasciai di ricordare la calcaria di cui si ragiona, e sebbene in quel tempo le dottrine Werneriane prevalessero appo noi sopra quella di Arduino, io non pertanto riconobbi prima d' ogni altro il *Porfido eruttivo di Manfron* posto fra il micaschisto e la calcaria in parte gessificata di quella località, non senza avvertire le varie modificazioni sofferte dalla roccia schistosa ne' suoi punti di contatto col porfido nero suddetto (*Mem. mineralojico-chimica sull' acqua minerale di Civillina. Verona* 1819. 8°.).

ho portato sull' età di quella roccia. Sono però molto incerto se la roccia nera di Briago giaccia inferiormente alla dolomía o appartenga piuttosto ad una formazione meno antica, quindi trovomi nella necessità di procurarmi ulteriori schiarimenti sulla vera sua posizione. Nel Veneto sonovi calcarie nere simulanti il lias anco nel terreno cretaceo, e ne sia prova la calcaria screpolosa che vidi non ha guari a *Valdiperero* negli Euganei.

Osservazioni.

Parlando del lias Bellunese io doveva altresì fare un cenno di quello che vidi alla base di monte Sochero posto all' est di Belluno, e che sembra prolungarsi sotto le calcarie ippuritiche dell' Alpago e della valle di S. Croce. Il suo aspetto è terroso, la tinta grigio-carica, e le specie organiche talvolta opalizzanti, delle quali è a dovizia fornito, spettano al genere delle *Terebratule*. Fra queste ho potuto distinguere la *Terebratula acuta* di Sowerby. Era necessario ch' io facessi peculiare ricordanza di questa roccia già descritta in una mia Memoria letta all'Accademia di Padova nel 1832 (*Vol. IV degli Atti, pag.* 3.), affinchè non si continuasse a credere vero l' annunzio dato nel Bollettino della Società geologica di Francia (Marzo e Giugno 1845) sulla recente scoperta del lias nelle alpi Venete.

FORMAZIONE DELLA CALCARIA JURASSICA E DELLE OOLITI CHE L' ACCOMPAGNANO.

In nessun paese del Veneto questa calcaria appare divisa dal lias mediante quel tramezzo marnaceo detto Oolite ferruginosa (*Eisenschüssige oolithen*), e soltanto occupa talvolta il suo luogo qualche straterello di argilla, prodotto dalle consuete alterazioni cui soggiaciono due rocce nel punto del loro combaciamento. Ma se mancano le vere ooliti ferruginose, vi si trova una qualche volta nella dolomía veneta taluno de' depositi che sogliono accompagnarle. Tali mi sembrano essere le

Stipiti (1) che adocchiai sotto forma di filoncelli nella calcaria jurese compatta, che s' innalza sulla dritta del Piave tra *Candidopoli* e *Rivalgo* (Cadorino), nella quale l' egregio chimico Sig. B. Zanon rinvenne, oltre la magnesia, tracce di rame.

La calcaria jurese, della cui estensione ho dato contezza nel principio di questo paragrafo, presenta caratteri molto variabili così nel colore e nella struttura come nella composizione. Ve n' ha di bianco-candida, di bigia, di rosso-carnicina che pende qua e là al rosso più o meno carico ed anco al giallognolo. I luoghi più lontani tra loro ne' quali offre queste ultime varietà di colori sono: la valle Ampezzana sotto il castello di *Peutelstein*, ov' è di tinta rosea; a *Pedescala* nel Vicentino, e ne' monti di *Badia Calavena* nel Veronese. Questi colori dipendono dall' indole de' materiali componenti la dolomía, e voglionsi distinguere da quelli ch' essa può ricevere anche adesso dalle rocce con cui trovasi al contatto. Gli strati bianchi delle alpi Ampezzane sono interpolati da straterelli d' un' argilla ferruginosa, che per essere attaccabile dall' acqua tinge in rosso-vivo le facce nude delle montagne. Le macchie e strisce sanguigne che si ammirano sul versante nord-ovest di *Crepa-Rossa* sono dovute a queste argille, non già all' alterazione de' porfidi, come è stato creduto dall' estensore di un elegante articolo sopra la valle Ampezzana (*Appendice della Gazzetta di Milano* 1844, 14-15 *Novembre.*). Se varie sono le tinte della calcaria jurese

---

(1) Questo combustibile fu riguardato dapprima come *lignite*, poscia come litantrace della calcaria jurassica, mentre, per sentimento di Brongniart, non si può riferire nè all' una nè all' altro, stante la diversa epoca di vegetazione alla quale spettano le piante che lo hanno formato, e stante la diversa sede che occupa nella serie delle formazioni. Brongniart scoprì che le piante concorse alla produzione di questo combustibile appartengono alle *Cicadee* di cui sono tuttora riconoscibili i fusti, e consigliò distinguerlo col nome di *Stipiti*, come gran tempo prima proponeva chiamare ligniti li combustibili fossili derivati dal seppellimento di piante legnose dicotitelonie. — La presente nota non è stata posta quì a caso, ma col fine di richiamarla alla mente del lettore allorchè potrò con evidenza di prove far conoscere che li depositi di *Stipiti* possono esistere anco fra il *Keuper* ed il *Muschelkalk* del Veneto.

veneta, varia del pari si manifesta la sua struttura, dipendente alcune volte dall' essere più o meno omogenea o più o meno imbrattata di sostanze estranee alla sua natura. Ve n' ha di compatta grigia e bianca con molte screpolature; di semigranulare e di granulare cristallina, o marmo quasi statuario. Quest' ultima varietà si escavava a detta dello Scamozzi nel monte Summano per adoperarla nella scoltura (*Dell' architettura, parte* 2^{a}. *Lib.* VII, *Cap.* V.). A queste differenze di struttura si associa quella della calcaria bollosa (*Rauchkalk*) che vidi nel Cadorino, e presso *Castel Nuovo* sei miglia sotto Feltre. Un' altra struttura, se così posso chiamarla, sotto cui si affaccia la dolomía è la *brecciolare* che si osserva a *Fongara* sopra Recoaro, ed anche in qualche luogo dell' Agordino (1). Oltre a questi caratteri la calcaria jurese ne porge degli altri riguardanti la sua composizione, i quali sono in gran parte derivati da rocce ignee che vi agirono sopra. Ho detto in gran parte perchè non sempre la magnesia che vi troviamo per entro dev' essere riguardata come un effetto della dolomizzazione prodotta da rocce pirosseniche, anzi parmi di avere dimostrato che molte calcarie sono effettivamente magnesiane fino dalla loro origine sedimentaria (*Zool. foss., pag.* 77 *e* 137), locchè fu anche verificato alquanti anni dopo dal Sig. Pasini (*Rapporti geognostici, pag.* 6.). Curioni cita esempj di banchi dolomitici posanti sopra la calcaria priva di magnesia (in Val d' Esino) e di banchi di dolomía frapposti agli strati verticali di calcaria pura (*Stato geologico della Lombardia.*). Ora domando io per quale ragione un complesso di strati calcarei sotto l' influenza della causa dolomizzante

(1) La calcaria di Fongara a misura che più si abbassa verso la Fonte Regia cangia di aspetto e assume le sembianze del *marmo Frigio* degli antichi, a cui molto si accosta quello dissotterrato negli scavi fatti per piantare le fondamenta del Caffè Pedrocchi in Padova. La calcaria, ch' è bianca e pellucida sui margini viene intercisa da setti rossi disposti in tutte le direzioni, talvolta dritti, talvolta curvi e talvolta circolari. Questi setti o rilegature altro non sono che ferro oligisto rosso terroso, il quale conserva più spesso il colore paonazzo che il rosso, ond' è che dagli attuali scalpellini di Roma il *marmo Frigio* chiamasi *pavonazzetto*.

si è in parte convertito in dolomía ed in parte no? Sarebbe un errore non ammettere la possibilità della dolomizzazione delle calcarie poste a contatto di rocce ignee magnesiache, e lo sarebbe egualmente il sostenere con gli epigenisti che ogni qualunque roccia sedimentaria contenente magnesia abbia potuto subire la stessa metamorfosi.

Se le calcarie granulari appajono magnesiache, altre dello stesso gruppo si mostrano meramente calcarie, ed altre si appalesano ricche di silice. Io aveva osservato da molti anni che la calcaria jurese di M. Serva e quella della creta che gli sta presso, scintillavano all' acciarino benchè entrambe mancassero di focaia (*Annali di Scienze naturali. Bol.* 1829. *Tomo* 1.). Credeva in quel tempo che il lias siliceo sottoposto agli strati di quelle montagne si potesse riguardare come una roccia emersoria, da cui si fossero emanate particelle silicee, che trasfigurarono le calcarie poste all' oriente di Belluno; ma le osservazioni superiormente riferite si oppongono a quel mio giudizio, nè saprei ora a quale altra roccia pirica si debba attribuire la selcificazione delle dette calcarie, a meno che non si voglia imaginare l' esistenza sotterranea d' una massa eruttiva invisibile a' nostri sguardi.

La distinzione della pendenza e direzione degli strati riesce più che mai ardua e difficile in causa delle vicissitudini a cui soggiacque la zona jurese veneta, talchè se in un sito la stratificazione appare distinta, poco lungi e nella stessa montagna, può comparire diversa ed anche mancare del tutto. Nell' Antelao ed in tutto il resto della catena montana fino al castello di *Peutelstein* gli strati assumono posizioni diverse; ora si mostrano orizzontali o di poco inclinati, ora verticali ed ora in molte e varie guise piegati e contorti. Le stesse varietà di figure e di posizioni si osservano in altri molti luoghi dell' alto Bellunese. Nell' Agordino gli strati dolomitici hanno sofferto piegature enormi, e presso le miniere la mancanza assoluta di stratificazione si manifesta in modo distintissimo.

La roccia che nel Veneto chiamasi *Oolite inferiore* giace fra gli strati dolomitici, de' quali segue la direzione ed è quasi sempre magnesifera; mentre la *Oolite superiore* comparisce verso la cima delle montagne e segna l' ultimo confine della formazione jurassica. La serie *oolitica superiore* non si trova soltanto sulle grandi eminenze ma si mostra eziandio in parti più basse, dove appare ricoperta da un tramezzo argillaceo, che la disgiunge dal sovrapposto terreno della creta.

Sul fianco orientale dell' Antelao, alla metà circa dell' altezza del monte, vedesi a nudo un potente banco di *oolite*, il quale attraversa la massa omogenea della dolomía senza che si scopra tra una roccia e l' altra le commettiture indicanti la stratificazione. Nel monte Serva li banchi molto inclinati della calcaria oolitica grigia sono frapposti agli strati della calcaria compatta, e massi enormi di queste rocce si veggono dispersi appiè del monte presso *Safforze*. Quivi le ooliti sono di un colore più fosco del cemento che le unisce. La stessa alternanza si ripete sul fianco di monte *Terne* (valle dell' Ardo), da cui il Serva è diviso mediante il torrente che gli corre ai piedi. Questa cintura oolitica si prolunga sul versante settentrionale di *M. Talvena* (valle del Medune), ma a misura che si allontana dal Serva li suoi grani perdono la tinta oscura e finiscono coll' assumere il colore della pietra o cemento che li serra insieme. Questo passaggio si appalesa nella più evidente maniera nel grosso banco oolitico di M. Carrera presso Peron, nel quale la forma sferica de' grani oolitici trapassa in cubica. Presso S. Giorgio ho potuto in alcuni di questi grani osservare la figura conica alquanto allungata, ma oltre la forma non seppi ravvisare alcun altro vestigio organico.

Ooliti inferiori o interposte ai banchi dolomitici ve ne sono anche nel Vicentino e nel Veronese. Nel M. Baldo ascendendo lungo le *Scalette*, al *Tredespino* e a *Toleghe* si vede la calcaria jurese in istrati più o meno rilevati dall' orizzonte fra cui puossi adocchiarne alcuno pieno zeppo di ooliti miliari. Codeste ricompariscono alle radici dello stesso monte (Garda), dove si mostrano scintillanti all' acciajo (*Zool. foss., pag.* 101.).

Il piano dell'*oolite superiore* servì di letto alle più antiche deposizioni del mare cretaceo. In qualche luogo la *oolite* viene separata dalla creta mediante un banco di argilla da gualchiere (*térre a foulon*) della potenza di quattro piedi, che ha dato occasione all' apertura d' una galleria (*Canale del Gatto, sud di Belluno.*). La calcaria che sottostà all'argilla è oolitica, talvolta compatta e sublamellare, laddove l' altra che la ricopre appartiene alla creta e propriamente al biancone. Per riconoscere la posizione di queste due calcarie relativamente a quella dell'argilla, è d'uopo penetrare nella cava e ripetere le osservazioni che abbiamo consegnate nella Zoologia fossile (*p.* 244, *e seg.*).

Ove le rocce cretacee soprastanno immediatamente alle *ooliti superiori*, i banchi di queste ultime riescono conchigliacei. In una valle che distà tre miglia da Enego (Valdassa) vidi al di sotto del biancone la calcaria rossa ammonitica, alla quale soggiace una serie di strati oolitici contenenti gusci di bivalvi solcati alla maniera de' pettini, ma che sembrano riferirsi al genere *Terebratula*. Alcuni di questi gusci mi parvero molto affini alla *Terebratula Brocchi*, che trovai nel biancone di Grezzana, della quale ho data la figura (*Zool. foss.* Tav. V. A. B., *e Giornale di Pavia* 1825).

Quanto ai fossili pelagici che rinvenni nel terreno jurese, essi consistono in otto o dieci specie di Ammoniti di cui due soltanto mi riuscirono promiscue alla dolomía granulare ed alla calcaria bigia compatta, dalla quale procedono le altre. Si dirà forse che i fossili scarseggiano nella dolomía in causa della sofferta dolomizzazione che ne distrusse le forme? Questa opinione che potrebbe essere vera per la dolomía di alcuni luoghi viene contrastata dai fatti che sono per allegare. Nella calcaria subcristallina di M. Pinzocco dove trovai una sol volta l'*Ammonites dolomicus* abbondano le Terebratule; in quella dell'Agordino (Andrich) vi sono Avicule e Posidonomie, e nell' Antelao riescono più che mai frequenti i Cardi ed i Pettini dell' era jurassica. Se altre prove ancora si desiderassero in conferma della

nostra proposizione, addurremo la congerie di Pettini che abbiamo staccati dalla dolomía granulare di Asiago, gli esemplari del *Nautilus Bonelli* tratti dalla calcaria di M. Sochero sopra Belluno, e li molti individui del *Cardium triquetrum* di Wulffen tanto copiosi nell' Antelao e nella dolomía di Predazzo, come pure in quelle di *Rotolon* nel Vicentino e di monte *Sarezzo* nell'Agro Bresciano (*Comment. dell'Ateneo di Brescia.* 1832.).

Fra li testacei fossili della dolomía Veneta pochissimi sono quelli che hanno potuto passare ne' piani del terreno cretaceo, anzi io non saprei allegare neppure un esempio di specie effettivamente juresi, le quali abbiano protratta la loro esistenza fino all'epoca delle deposizioni cretacee ad eccezione di quelli che trovai nell'Alpago. Alcuni rari individui di specie gregarie riferibili al genere delle Terebratule che rinvenni nella calcaria ammonitica, potrebbero forse avere molta analogia con taluna delle specie juresi, ma lo stato di detrimento nel quale sono impedisce di riconoscere se realmente vi esista fra le une e le altre una patente conformità. Checchè ne sia di quelle rammentate dal Signor Pasini come specie promiscue agli strati di due diverse formazioni non saprei indovinarlo, dicendo egli espressamente *che nella calcaria jurese vi sono degli Ammoniti e molti altri fossili proprj del Biancone e della Scaglia* (Giornale del Conte da Rio. Bimestre di Luglio e Agosto 1828.). Gli avanzi ittiolitici che occorrono frequenti nella calcaria ammonitica e nel biancone non si sono mai rinvenuti nella dolomía delle alpi Venete, benchè qualche reliquia di pesci sia stata osservata nel lias delle adiacenze di Belluno.

Ciò premesso esibisco quì sotto l' elenco delle specie che finora sono state da me raccolte nella calcaria jurese del Veneto riserbandomi in altro tempo di dare le descrizioni accompagnate dai relativi disegni. (1)

---

(1) Le specie juresi segnate con asterisco sono state trovate dal Consigliere Signor Fuchs nelle alpi Agordine, che le registrò nell'opera: *Die Venetianer Alpen*, 1844. *Wien.*

Ammonites dolomicus. Nob.	Pizzocco nord - ovest di Belluno e calcaria jurese rossa del Canale del Miss.
* — *Davoœi.* Sow.	Idem.
* — *primordialis.* Schloth.	Idem.
— *Parkinsonii?* Sow.	Calcaria jurese rosea e bianca del Cadorino. (1)
— *binodosus.* Nob.	Calcaria jurese di S. Lucano nell' Agordino.
Nautilus Bonelli. Nob.	Dolomía dell' Alpago e de' Sette Comuni. (Atti dell' Accad. di Padova T. v. Tav. II, fig. 5.)
Nummulites denarius. Schloth.	Calcaria jurese di Malgonera nell' Agordino. Si ripete nella calcaria della stessa formazione de' Pirenei. Charpentier Essai, p. 465.
Avicula bifida. Nob.	Dolomía di Andrich nell'Agordino. Tav. I, fig. 5.
Posidonomya minuta. Bronn.	Tav. I, fig. 4. della presente Memoria.
* *Mya elongata.* Goldf.	Dolomía dell' Agordino. Fuchs.
* *Pecten discites.* Bronn.	Ivi.
— *Deluci.* Nob.	Dolomía del Cadorino. Zool. foss., p. 138.
Cardium triquetrum. Wulffen.	Abhandl. vom Karsth. pag. 483. È conchiglia caratteristica della dolomía Veneta, ove ne ha di varie grandezze. Gli individui di minor mole sono lunghi un pollice, e larghi mezzo pollice e due linee; li più grandi hanno la lunghezza di un piede sopra mezzo piede e due pollici di larghezza. Uno solo fra i molti che ho raccolti conserva parte del guscio, ch' è rigato per lungo; gli altri sono tutti modelli interni, ruvidi al tatto in grazia de' punti cristallini de' quali è coperta la superficie. Zool. foss., p. 140 e seg. Tav. I, fig. D. e F. e Tav. II, fig. A. a.
Terebratula pugnus. Martin.	Dolomía di Andrich, nell' Agordino.
— *lacunosa?* Schloth.	Zool. fossile, pag. 82. Taschenbuch 1813. Tab. I. a. b. c.
— *pruniformis.* Nob.	Zool. foss., p. 166. Tav. V. Dolomía di Pizzocco, e calcaria neocomiana dell' Alpago.
— *elata.* Nob.	Zool. foss., pag. 166. Tav. V. Calcaria jurese di Sochero.
— *Renieri.* Nob.	Zool. foss., pag. 167. Tav. V. ivi.
— *climata.* Nob.	Zool. foss., p. 168. Tav. V. ivi. È la Ter. *rimosa* di De Buch non già la *tetraedra* di Sowerby.

(1) Li due esemplari che possiedo sono mutilati nell'ultimo giro, e mancano altresì di una parte della bocca. Nella figura che sarò per dare supplirò a quanto manca, indicando le parti aggiunte col semplice contorno.

Terebratula tetraedra. Sow. Dolomía di Vedàna e di Pizzocco, presso Belluno.
— *digona.* Sow. Ivi.
— *Paronia.* Nob. Ivi.
— *triplicata.* Phil. Ivi. De Buch. Classif. des Terebratule ec.

Osservazioni.

Appiè delle alpi juresi che sorgono all' oriente di Belluno prende principio un' estesissima e ben alta catena di montagne calcarie, che dopo essersi diramata ne' monti dell' Alpago, de' quali forma la parte centrale, si distende nel vicino Friuli, ove in pari modo costituisce le giogaie che si elevano al nord-ovest di *Budoja* e di *Aviano* nel Friuli. Le montagne soprastanti a Polcenigo sono intieramente formate di questa calcaria, ch' è sempre bianca, ma non sempre dello stesso aspetto, nè sempre contiene gli stessi fossili, che anzi vi si trova per entro un miscuglio di corpi organici riferibili ad epoche diverse, lo che indica certamente che nel mare in seno al quale si sono deposti li materiali di quelle montagne, hanno potuto vivere de' testacei che si risguardano come caratteristici di due diverse formazioni. Non mi farò quì a ripetere ciò che ho detto in altri scritti intorno a questa vasta porzione delle alpi Venete (1); solo dirò che in qualche luogo essa riposa sopra una calcaria grigia piena di terebratule frammentate, alcune delle quali si accostano alla *T. acuta* di Sowerby, che vuolsi propria del lias (2).

(1) Zoologia fossile, pag. 163 e seg.

Memoria sopra le conchiglie fossili della calcaria che si eleva presso il lago di S. Croce, con due tavole. Atti dell' Accad. di Padova, Vol. iv. 1834. 4.°.

Lettera al Sig. Villa di Milano. Padova 1843. 12°.

Memoria sopra le Caverne delle alpi Venete, con nove tavole. Atti dell' I. R. Istituto. T. 2. 1844. 4°.

Mem. epistolare al ch. Prof. Leopoldo Pilla, inserita nel Giornale il *Cimento*. Pisa 1845. 8°.

Cenni sopra il Sistema cretaceo delle alpi Venete. Raccolta fisico-chimica italiana. Venezia 1846. 8°.

(2) Sowerby indica sotto lo stesso nome due specie differenti, ed è duopo che l' uno o l' altro venga cangiato. L' individuo della Tav. 150 appartiene al lias; l' altro della Tav. 502 spetta alla creta.

Dirò ancora, che le notabili anomalie che ho riscontrate nella fauna delle montagne Alpaghesi, mi lasciarono gran tempo incerto se fra le rocce della creta ovvero fra quelle del jura si dovessero classificare. Però la prevalenza di esseri organici cretacei sopra li juresi, e la circostanza di aver veduto in più luoghi quella calcaria al di sotto della *scaglia rossa* (Tambre, Secca ec.) mi consigliò, tra le due classificazioni, di attenermi alla prima, e di riferirla alla parte inferiore del terreno neocomiano. Debbo tuttavia avvertire che non è certa la corrispondenza di età fra le dette due rocce. Quei lembi di calcaria bianca con Rudiste sporgenti dalla scaglia rossa corallifera di S. Croce, sono dirompimenti di letti estesissimi dislocati da forti perturbazioni ivi sofferte dal suolo, ma che in origine dovevano essere congiunti alla massa principale, che si dilata sotterraneamente verso la *Secca*, e di là si prolunga sotto il biancone di *Quantin*, e sotto quello di tutta la catena cretacea posta al mezzodì di Belluno. Queste congetture sulla posizione occupata dalla calcaria Alpaghese vengono confermate da un' osservazione fatta non ha guari nella valle di *S. Mammante*, tra *Calepio* e *Sossai*, dove essa ricomparisce, e dove si può riconoscere la corrispondenza de' suoi fossili con quelli dell' Alpago.

Il Signore de Zigno, senza aver mai onorato di un' occhiata le alpi Alpaghesi, propose di associare la nostra calcaria alla crosta nummulitica che soggiace alla scaglia rossa del Trevigiano, per cui mi credo nell' obbligo di avvertire, che fra i fossili organici che si accompagnano a quella roccia, e de' quali dò qui sotto la lista, non vi ho mai trovato nummuliti. (1)

---

(1) Zigno, sul terreno cretaceo dell' Italia settentrionale. 1846.

CORPI ORGANICI FOSSILI DELLA CALCARIA ALPAGHESE E FRIULANA.

Le specie segnate con * sono state descritte e figurate nel Volume IV degli Atti dell' Accademia di Padova per l' anno 1834. 4°.

* *Nerinea Borsoni.* Nob.	
— *subaequalis.* Orbigny.	Terr. crétacés pag. 93. Tab. 162, fig, 5.
— *Bauga?* Orb.	Ivi, pag. 91. Tab. 162, fig. 1.
Acteonella gigantea. Orb.	Ivi, pag. 109. Tab. 165, fig. 1.
— *laevis.* Orb.	Ivi, pag. 110. Tab. 165, fig. 2 - 3.
— *cypræformis.* Nob.	
— *ovula.* Nob.	
— *bistorta.* Nob.	
Acteon? marginata. Orb.	Ivi, pag. 119. Tab. 167, fig. 8.
Globiconcha ovula. Orb.	Ivi, pag. 145. Tab. 170, fig. 3.
Nerilopsis laevigata. Orb.	Ivi, pag. 177. Tab. 176, fig. 11.
Nerilopsis? rugosa. Nob.	Il margine columellare è coperto dalla roccia, nè si può distinguere se la specie sia una *Nerita*, ovvero una *Nerilopsis.*
Natica tessellata. Nob.	
— *prælonga.* Desh.	Orb. Ivi, pag. 152. Tab. 172, fig. 1.
Phasianella signata. Nob.	
Pterocera.	
Acmæna concentrica. Nob.	
Inoceramus Goldfusianus. Orb.	Ivi. Tab. 411.
Astarte pulla. Bronn.	*Venus Alpagina* nob. Zool. fossile, pag. 165.
— *subtrigona?* Münster.	Goldfuss. Tom. 2, p. 192. Tab. 134, fig. 17.
Terebratula pruniformis. Nob.	Zool. foss., pag. 166. Tav. V, fig. b. c. d.
— *plicatilis.* Sow.	Conch. Tab. 118, fig. 3.
— *pugnus?* Martin.	È mutilata di una parte della valva ventrale.
— *digona.* Sow.	Conch. pag. 144. Tab. 96.
— *rostrata.* Sow.	Ivi, pag. 552. Tab. 537, fig. 5 - 8.
Opis Hugardina? Orb.	Terr. crét. Tab. 253, fig. 7 - 8. De' frammenti di questa specie, copiosissimi nella calcaria neocomiana de' monti di Polcenigo, dovrò parlare a lungo nell' opera citata in altri luoghi della presente Memoria.
Diceras de Luci. Defrance.	Ivi. Favre, Observations sur les Diceras. Tab. I, fig. 1 - 2.

Diceras	*Arietina*. Lam.	Ivi. Le corna sono segnate longitudinalmente da solchi piuttosto profondi, non già da strie trasversali, come nell' individuo figurato da Favre nella Tav. III, fig. 2 delle sue Osservazioni sopra le Diceras, impresse a Genova 1843. 4°.
Hippurites	*Fortisii*. Nob.	Zool. fossile. Tav. 6.
—	*turricula*. Nob.	Atti dell'Accad. di Padova. T. IV. Tav I, fig. 5.
—	*dilatatus*. Nob.	Ivi. Tav. 2, fig. 1.
—	*nanus*. Nob.	Ivi, fig. 2.
—	*contortus*. Nob.	Ivi, fig. 3.
—	*calycularis*. Nob.	Inedita.
—	*maximus*. Nob.	Inedita.
—	*fasciatus*. Nob.	Inedita.
—	*rugulosus*. Nob.	Inedita.
—	*cornu pastoris*. Des-Moulins.	
—	*imbricatus*. Nob.	Inedita.
Spherulites	*duplocalvata*. Nob.	Atti dell'Accad. di Padova. T. IV. Tav. I, fig. 1.
—	*umbellata*. Nob.	Ivi. Tab. I, fig. 2.
—	*Da Rii*. Nob.	Ivi, fig. 3-4.
—	*Pensiana*. Archiac.	
—	*Gazolæ*. Nob.	Zool. fossile. Tav. 3, fig. F.
Baculites	*Alpagina*. Nob.	Inedita.
—	*flexuosa*. Nob.	Atti dell' Accad. di Padova. Tab. 2, fig. 4.

TERRENO CRETACEO.

Sopra i lembi estremi della formazione jurassica appiè delle alpi dolomitiche del Regno Veneto (1), si eleva una cinta di montagne che dal commune de' geologi si riferiva al sistema cretaceo, ma che ora vorrebbesi, almeno in parte, considerare come una continuazione delle deposizioni lasciate dal mare

(1) Delle rocce componenti questo terreno, che prende principio dalla calcaria rossa ammonitica che d'ordinario è la più bassa e finisce con la Scaglia rossa, darò particolare ragguaglio nella Geognosia Paleozoica del Veneto. Basta per ora avvertire che il terreno cretaceo dai punti più distanti dell'Agro Bresciano lambiti dal Benaco si estende oltre i confini del Bellunese (Stua, quattro miglia sopra Cortina di Ampezzo), formando nel vasto spazio che divide queste due province una gran parte dei terreni secondarj delle alpi Venete.

jurassico sopra i continenti. La porzione di questo sistema che si consiglia di annestare al terreno del Jura, n' è la zona inferiore, rappresentata dalla calcaria rossa ammonitica e dal biancone che d' ordinario la ricopre. Il principale motivo che mosse alcuni Geologi a proporre questo smembramento, è la presenza di alquante specie organiche fossili riputate jurassiche verificata nelle accennate due rocce; ma oltre che rimanga qualche dubbio se tali specie si debbano ritenere veramente come juresi, e non piuttosto come promiscue a più formazioni, ella è poi certa cosa essere il numero di esse troppo scarso quando lo confrontiamo con quello delle specie effettivamente cretacee con cui sono accomunate, per lo che togliendo, p. e., la calcaria rossa ammonitica dalla creta per riportarla fra le rocce d'un altro sistema, si verrebbe a trascurare il carattere paleontologico, cui vuolsi accordare sopra d'ogni altro la preferenza.

Non sempre li materiali delle accennate due rocce si sono adagiati sui contorni o sul declivio della formazione jurese, prima della sua emersione, essendovi de' luoghi ne' quali tanto la calcaria ammonitica rossa quanto il biancone dovevano in origine ricoprire a guisa di mantello la intera superficie apparecchiata dalle deposizioni dolomitiche. Questa induzione sembra avvalorata dal fatto seguente. Dalla strada di Vallarsa inoltrandosi verso il *Piano della Fugazza* si vede che la dolomía non forma da se sola la cima di quelle eccelse montagne, imperocchè all' altezza di oltre mille e cinquecento metri appare ricoperta dalla calcaria rossa ammonitica disposta in istrati lievemente inclinati, sopra la quale si erige il biancone. La focaja esiste non solo nel biancone ma anche in pari quantità nella calcaria rossa ammonitica, e gli strati di ambe queste rocce sono in perfetta concordanza fra loro, come ha notato eziandío il Sig. Pasini nella sua Memoria altrove ricordata sopra la calcaria ammonitica. Però la giacitura della calcaria rossa rapporto al biancone non è ovunque la stessa, ma la prima può coprire il secondo, ed anco alternare con esso. Un' evidente sovrapposizione della calcaria rossa al marmo giallo e di questo al biancone

si può osservarla nella valle dell' Adige presso la Chiusa dove per lunghissimo tratto la pietra calcaria solida di tinta rossa piena di nuclei di Ammoniti occupa le altezze delle rupi che fanno sponda all' Adige; e dove si veggono enormi scogli caduti lungo le sponde e nell' alveo del fiume per successivi e grandi sfasciamenti. Mi vi recai sul luogo nel 1825 per verificare questo fatto riferito da Fortis in una sua epistola, e sebbene in quel tempo io riputassi jurese la calcaria ammonitica non ommisi di ricordare le eccezioni a cui andava soggetta quella mia vecchia opinione (*Zool. fossile, pag.* 219.). Forse qualcuno potrebbe sospettare che alla roccia in questione non convenga il posto che le ho assegnato; ma perchè non si creda che io abbia preso la *scaglia marnosa rossa* per la calcaria dello stesso colore connessa al biancone, parmi opportuno di osservare che fino dal 1817 appresi a distinguere prima di ogn' altro queste due rocce, descrivendo di ciascuna la giacitura (*Osserv. sopra i monti del Circondario di Belluno. Verona* 1818. 8°.). Questa distinzione, già confermata con ottime ed estese osservazioni dal Sig. Pasini nel 1832 venne non ha guari annunziata come un fatto non avvertito prima da' Veneti Naturalisti. (1)

Ne' Sette Comuni i banchi di calcaria rossa alternano con quelli del biancone (nel luogo detto i Perini); e queste alternative si ripetono nel monte *Avena* presso Fonzaso, a *S. Maria di Paninsacco* tra Valdagno e Recoaro e nel monte *Cingelle*

(1) Questa non curanza delle altrui osservazioni, questo voler comparir soli ne' proprj scritti sono massime del giorno ch' io non saprò mai commendare, contro le quali il nostro Brocchi scagliò la seguente memoranda invettiva. « Questo metodo (di citare le « opere altrui) si conosce ormai essere indispensabile da che tanti volumi sono stati « pubblicati e tante osservazioni sono state fatte sui varj rami della Storia Naturale, « che si potrebbe asserire non esservi argomento che sia veramente intatto. Avvi nulladimeno taluni che temendo di pregiudicare a quella *leggerezza di stile* che tanto af« fettano, e di affaticare soverchiamente il cerebro de' loro lettori abborriscono in singolar « modo le citazioni, e tirano francamente innanzi come se fosse un nonnulla tutto ciò « che per l' addietro fu scritto; ma non so quanto sarebbero contenti costoro di essere « trattati dai posteri in quella guisa com' essi si diportano verso i predecessori » (*Conchiologia fossile, pag.* 623. 4°.).

non lungi da *Schio*. Gli strati della calcaria grigia di *Lavazzo* contenente individui del *Crioceras Villiersianus* d'Orb. alternano anch'essi con la calcaria rossa ammonitica di quel paese, ed un' istruttiva riunione di queste due rocce si può osservare presso *Rozzo ad Alberedo* e nel punto ove la valle del *Martello* sbocca sulla nuova strada di *Rozzo*. Il Sig. Pasini, cui è dovuta questa indicazione, fa osservare quanto insussistente debba apparire l'opinione di coloro i quali riferiscono la calcaria ammonitica rossa alla formazione del jura ed hanno circoscritto al solo biancone la formazione della creta. Lo stesso Sig. Pasini ci avvisa che gli strati del biancone si trovano alle volte negli strati inferiori della calcaria ammonitica e che al sud di *Asiago* gli strati di quest' ultima sono posti in mezzo agli strati del biancone (*Mem. sulla calcaria ad Ammoniti di Lodovico Pasini.*). Un giovane Geologo fattosi forte dell' opinione consentita da alcuni naturalisti circa il posto da assegnarsi alla calcaria ammonitica, tolse ad impugnare il concetto ch' io mi sono creato sulla sua geognosia, senza farsi carico di risalire alle vere cagioni per le quali proposi anni sono di toglierla al terreno jurese, a cui io l' aveva prima d' ogn' altro associata, per riporla nel terreno cretaceo.

Non è di questo luogo mettere in campo le ragioni puramente zoologiche che mi determinarono ad abbracciare una classificazione non mai contrastata da verun geologo prima del 1844. Solo dirò che le *anomalie* negate con indicibile asseveranza dal giovane geologo, e verificate le cento volte da me, sono appunto quelle che più particolarmente richiamarono la mia attenzione, quelle che mi hanno condotto al discoprimento di alcuni fatti degnissimi di osservazione. Per esse e col sussidio delle opere non già d' un solo ma di molti paleontologi, giunsi a conoscere *la prevalenza in numero delle specie cretacee nella calcaria ammonitica sopra le specie della stessa roccia riputate juresi*, il che dà chiarissimamente a vedere quanto larga licenza si concederebbe a chi volesse distaccarla dal biancone con cui ha comune la più gran parte della sua fauna. Noto

ancora che lo scarso numero di fossili della calcaria rossa creduti juresi, non si sono finora trovati nelle rocce che nel Veneto rappresentano le vere alpi jurassiche come a dire nel lias, nelle dolomíe e nelle ooliti, che pur sono in qualche luogo ricchissime di spoglie marine (1).

La dipendenza tra il biancone e la calcaria ammonitica viene anche comprovata dalla concordanza che v' ha, come dissi, fra gli strati di queste due rocce per cui voglionsi anco dai proseliti del barone De Buch considerare congeniti, o come si usa dire, depositati da un mare in grembo al quale bazzicavano presso a poco le stesse razze di animali. Nel punto in cui le due rocce si congiungono insieme, appajono talvolta compenetrate per guisa da non poter distinguere verun segno di divisione tra l' una e l' altra, e ciò fece credere al Sig. Pasini che *gli strati del biancone formino il passaggio dalla calcaria ammonitica alla scaglia.* Non è poi senza esempio il caso di rinvenire fra una calcaria e l' altra delle conchiglie, le quali sono metà biancone e metà calcaria rossa. Ora domando io se due calcarie di simil fatta li cui strati alternano a più riprese fra di loro, si debba considerarle d' origine differente e non piuttosto d' un' identica formazione? Anche sotto il punto di vista della Paleontologia io trovo che quanto più si vanno aumentando i confronti fra le specie fossili dell' una con quelli dell' altra, tanto più si accresce il numero de' petrefatti promiscui ad entrambe.

Nelle prime due facce d' una Memoria uscita di fresco (2), il suo autore pose in opera ogni cura perchè gli sia menata buona la proposta separazione della calcaria rossa dal biancone.

---

(1) Nell' Elenco che ho esibito delle specie organiche juresi non ve n' ha alcuna che abbia potuto passare ne' banchi della calcaria rossa, come si può verificare coll' esame de' cataloghi aggiunti alla presente Memoria. Un' eccezione si troverà nella lista de' fossili alpaghesi fra i quali ve ne sono di effettivamente jurassiche.

(2) Osservazioni del nob. de Zigno sul terreno cretaceo dell' Italia settentrionale di pagine dodici con una tavola. Sta inserita nel Vol. VI degli Atti dell' Accad. di Padova per l' anno 1846. 4°.

Inutile sarebbe che mi affaccendassi a dimostrare l' inconvenienza di questo distacco, e tanto più inutile in quanto che niuno crederà per certo altrimenti di quello che crediamo noi. È poi notorio che all'idea di separare il biancone dalla calcaria ammonitica manca il pregio della novità, avendola io adottata venti anni addietro nella *Zoologia fossile* (§. II. Calcare del Jura.), il che se la gloria diminuisce del suo riproduttore, punto non ne scema la colpa di averla data fuori come merce propria.

La calcaria ammonitica rossa può anche da sè sola formare de' monti di non mediocre elevazione coricati sopra i fianchi ed alle radici delle alpi juresi: ciò si vede a *Fastro* non lungi dal *Cismon*, a *Cesio Maggiore* tra Feltre e Belluno e in vicinanza di *Castello d'Ampezzo* nel luogo detto la *Stua*. Quella di Cesio Maggiore si prolunga saltuariamente verso Belluno e si può adocchiarla alle falde de' monti di Vedana, dove prende le ingannevoli sembianze di un conglomerato e dove trovai denti del *Ptychodus polygyrus* Ag., che pur sono frequenti nel biancone di *Brionio* nel Veronese, in quello di *Monte Castello* presso Valdagno e nella calcaria rossa e bigia di Lavazzo. La calcaria ammonitica di *Cesio* disgiunta com' è dalle rocce che altrove sogliono accompagnarla, potrebbe essere presa per una roccia *indipendente*, ma veduta che sia in altri luoghi sotto li naturali suoi rapporti di giacitura col biancone, svanisce ogni incertezza, e lascia tosto riconoscere la formazione alla quale indubitatamente appartiene.

Nel 1828 (*Giornale di Treviso. Dicembre.*) io annunziava che gli strati superiori della creta bellunese contengono Nummuliti associate alle Foraminifere, ricordando fino da quel tempo *il bisogno in cui versa la scienza d' un' esatta e completa monografia delle Nummuliti, nella quale studiare si potesse le specie di questo genere come si studiano quelle degli altri generi di testacei, onde riconoscere quali sieno proprie d' una formazione, quali d' un' altra.* Nel 1838 riproduceva le annotazioni fatte dieci anni prima intorno le Nummuliti de' terreni più antichi del terziario (*Atti dell'Accademia di Padova. T. v.*), ed ora

posso aggiungere che oltre a quelle trovate da Fortis, da Schlotheim e da Charpentier, il primo nel marmo statuario di *Arbe* nella Dalmazia (*Viaggi in Dalmazia. T. II, pag.* 203.) e gli altri due nelle calcarie più antiche della creta (*Die Petrefacten-Kunde, p.* 89. 8°. — *Essai sur le Pyrenées, p.* 465. 8°.), altre ne ho trovate io stesso nella calcaria jurese bigia di *Malgouera* nell' Agordino, ed altre ne vide il Pasini in una roccia che sottostà alla calcaria ammonitica rossa di Caduna nel Vicentino (*Mem. sopra la calcaria ammonitica.*) (1). A queste brevi notizie sulle nummuliti del Veneto non posso ommettere di aggiungere quelle che inviai alla Sezione geologica del Congresso scientifico di Genova, le quali potrebbero forse tornare di qualche utilità a chi volesse occuparsi della soluzione del programma emanato dalla Presidenza della Sezione suddetta (2).

Brano di lettera intorno la roccia che nel Veneto rappresenta il Macigno de' Toscani. « .... È innegabile che li fossili della scaglia rossa superiore non discendono mai fino al biancone, e sono sempre gli stessi fucoidi e li coralli medesimi che vidi copiosi

---

(1) Circa le nummuliti di Caduna leggesi nel Diario del Congresso scientifico di Napoli (pag. 129) la seguente dichiarazione: « Il Presidente Signor Pasini discorre al-« quanto della calcaria a Nummuliti del Vicentino, la quale si era sospettato che fosse « sottoposta alla Calcaria con Ammoniti, e dichiara trovarsi costantemente superiore a « quest' ultima, e però appartenente al terreno cretaceo o anche a qualche membro in-« feriore della formazione terziaria. »

(2) Noi manchiamo, com' è detto, d'una monografia delle Nummuliti, senza la quale è *impossibile* sceverare le specie de' terreni antichi dalle specie che sono contenute ne' terreni moderni. Ciò premesso ecco il programma alla cui soluzione vengono accordati non più di due anni di tempo:

« Sarà dato un premio di 700 franchi a chi determinerà *con precisione* quante sieno « le zone nummulitiche nell' Europa meridionale e principalmente nell' Italia, e quale « sia il loro *rapporto geologico* colle formazioni *cretacee* e *terziarie*. Saranno descritte, ove « occorra e figurate le specie di nummuliti caratteristiche delle varie zone. Le Memorie « *dovranno* essere mandate alla Presidenza del Congresso Scientifico di Venezia non più « tardi del 15 Settembre 1847. Se il premio non potesse essere conferito in quel Con-« gresso, il concorso sarà rimesso al Congresso del 1848. »

nella scaglia formante la parte più recente del sistema cretaceo. Ove la scaglia rossa è stata soppressa, o vi manca, la calcaria nummulitica segna il confine superiore del detto sistema, a cui succedono spesse volte le rocce fossilifere del terreno mioceno che immediatamente le ricoprono. Può quindi la calcaria nummulitica che in qualche luogo sostiene la scaglia rossa, formare da sè sola il tramezzo che separa il biancone dal terreno terziario o di sedimento superiore. »

Nella *Valle de' Falconi* presso *S. Anna* (Veronese) (1) ove la creta si mostra ricca di nummuliti e ove mancano li depositi terziarj, essa occupa la parte più elevata dell'alpe cretacea, e sotto le medesime circostanze di giacitura si presentano gli strati più eminenti del colle di Castelletto presso *Longano*, al sud-ovest di Belluno. Quivi rinvenni frammisti alle nummuliti infinità di corpi discoidei al tutto simili alla figura data da Montfort alla pag. 158 del primo volume della *Conchiologia sistematica*, con la quale l' autore intese rappresentare il tipo del genere *Lycophris*, ch' egli creò a spese di una *Orbitulites* molto diffusa nel *Planerkalk* della Transilvania (*Atti dell' Accademia di Padova. Tom. v.* 1838.).

La medesima calcaria contiene oltre i fossili che ho indicati gli articoli di Pentacriniti (*Arsiè* sul Cismone), ma non si trovano mai ne' suoi strati gli avanzi di Nerinee, di Acteonelle e di altre conchiglie, ch' io reputo caratteristiche della calcaria ippuritica dell' Alpago e del Friuli, la quale, stando al valore de' fossili, appartiene ad un periodo più antico. In altri luoghi la calcaria nummulitica viene immediatamente ricoperta dai sedimenti miocenì, li cui fossili nulla avendo di comune con la fauna della creta (2), danno a conoscere che il mare cretaceo non più presiedeva al loro innalzamento.

---

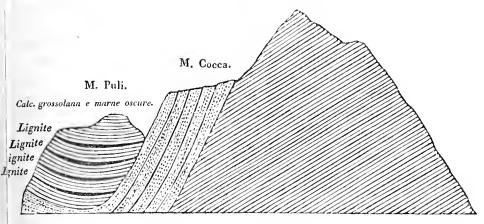
(1) Verso Breonio la creta in istrati molto inclinati è piena zeppa di coralli di cui conservo esemplari. Non mi sovviene qual rapporto regni fra questa calcaria e la nummulitica. Fra le Memorie che mi rimangono delle corse fatte in que' luoghi non ne ho trovata nessuna concernente quella roccia corallifera.

(2) Veggasi una mia Memoria sopra le nummuliti terziarie de' monti Euganei inserita nel Giorn. dell' italiana letteratura diretto dal Co. Rio. 1828. Bim. di Sett. e Ottobre.

La calcaria miocena de' *Puli* (tra Valdagno e Recoaro), quella stessa che porse argomento di utili discussioni alla Sezione di geologia del Congresso Fiorentino per la singolare disposizione assunta dai depositi di lignite ai quali dà ricetto, vedesi adagiata entro un bacino costituito da una forte depressione che subì il terreno cretaceo di monte *Cocca*, di cui imprendo a parlare. I banchi inferiori o più antichi di questo monte appaiono quasi verticali, e si mostrano coricati sul fianco orientale dell'alpe jurese chiamata Torrigi (1); mentre il banco cretaceo più recente, che nell'alto dell' eminenza conserva la stessa posizione, si piega inferiormente in arco e senza occultarsi allo sguardo dell' osservatore si conforma in una specie di conca entro cui il mare depositò, con li materiali della calcaria grossolana, i letti di lignite. Questo banco così incurvato contiene nummuliti proprie della zona calcaria da esso rappresentata, e per ciò stesso diverse dalle specie congeneri inviluppate nella contigua calcaria grossolana e nelle marne oscure che accompagnano i letti della lignite. Negli strati inferiori cretacei, più propinqui alla calcaria jurese di Torrigi, hanno stanza li fusti del *Marsupites ornatus* di Mantell, accoppiati ad altri fossili del terreno neocomiano.

Indicati così li principali accidenti che presenta la calcaria nummulitica cretacea, ove non sia ricoperta dalla scaglia rossa, non sarà inutile offerire lo schizzo de' tre diversi terreni, di cui per ora non intendo che di accennare la sola esistenza. Noto quì di passaggio, che le supposte falangi di Sauriani trovate nella calcaria grossolana de' Puli, altro non sono che fusti dell' *Isis Melitensis* di Michelotti (*Specimen Zoophytologiae diluvianae. Tab. I, fig.* 1.), specie ritenuta nuova da Michelin, che la figurò nella sua *Zoofitologia iconografica, pag.* 77. *Tab. XV, fig.* 10.

---

(1) Se questo monte fosse stato esaminato dal Signore de Zigno, avrebbe potuto dire qualche cosa di più esatto di quello che disse sulle Nummuliti di questa località, e correggere l' errore nel quale è inciampato attribuendo ad esse per sede la calcaria di monte Toriggi, e non la creta del monte Cocca nella quale le ho trovate io stesso il 18 Luglio 1846.

Ma non perdiamo di vista l'argomento per noi principale del biancone e della calcaria ammonitica. Il de Zigno è di avviso che l'ultimo confine della formazione cretacea venga rappresentato dal biancone, a quel modo che la calcaria neocomiana della Francia meridionale raffigura la parte inferiore della medesima formazione, ed associa, com'è detto, la calcaria rossa ammonitica al terreno jurese, certo per non aver egli ancora verificati li diversi accidenti di giacitura che legano il primo alla seconda. Abbiamo veduto quanto si opponga alle leggi fondamentali della Geognosia la proposta separazione della calcaria ammonitica dal biancone; osserviamo adesso se le ragioni che ci porge la paleontologia, sieno tali da poter giustificare la nostra opinione. Fra le trentanove specie riferibili a più classi di animali finora schiantate dal biancone e dalla calcaria ammonitica rossa non ne ho riconosciute che dodici, le quali sieno in *apparenza* esclusivamente proprie della calcaria rossa, mentre ventisette sono comuni alla detta calcaria ed al biancone. Ho detto in *apparenza* perchè fra le dodici specie non ancora rinvenute nel biancone, sei e probabilmente sette si ripetono nel *Gault* e nella calcaria neocomiana della Francia meridionale,

come lo danno a conoscere in parte le poche specie di *politalamj* determinati a seconda delle riforme introdotte dall' Orbigny, delle quali anticipo adesso la pubblicazione.

Nessuno de' fossili racchiusi nella zona cretacea superiore si ripetono, com' è detto, nel biancone, non avendo io mai trovato in quest' ultimo i coralli tanto copiosi nella scaglia rossa marnosa della *Secca* (sud-est di Belluno), nè li fucoidi cretacei che pur abbondano nella scaglia grigia di *Belvedere* (nord di Belluno), nè tampoco le nummuliti, di cui è zeppa la calcaria che al sud e sud-est di Belluno ricopre il biancone (*Visome la Cala*), nella quale in altri luoghi del Veneto, si rinvengono i fusti cortissimi di una specie di *Pentacrinites* a facce longitudinali concave, che sembra peculiare della roccia in cui è inserita. A Breonio (Veronese) la creta bianca, in istrati sottili che ricopre il biancone, contiene fusti piuttosto grossi di corallo, e rappresenta per ciò stesso la scaglia rossa del Bellunese. Al sud di Belluno la scaglia rossa e grigia scarseggia di coralli, ma a misura che più si avvicina alla valle di S. Croce (Secca) per protendersi sopra i fianchi della calcaria ippuritica, diventa corallifera, e si fa in generale più dura e più consistente. Quivi gli strati delle due scaglie hanno sofferto dislocamenti notevolissimi, e per vederle meno scompaginate basta avvicinarsi alquanto alla sinistra del Piave (*Lastreghe*, *Sossai*, e lungo la *Calmada*), dove vengono escavate per adoperarle come pietre da fabbrica, ma più comunemente per coprire i tetti e per lastricare le vie. A *Cugnano* la scaglia rossa ricopre una calcaria bianco-cinerea a strati piuttosto sottili, di tessitura omogenea, infarcita di focaja grigia, della quale darò una circostanziata notizia in quella parte del mio lavoro che versa sul terreno cretaceo del Veneto. Per ora dirò solamente, che la scaglia rossa di Cugnano, piena di fucoidi, si distende anco nelle sottoposte pianure, per esempio tra le cave di *Paluco* e *Medulo* (Meassa); e che la creta in istrati sottili rappresentante il biancone contiene individui dell' *Aptychus lamellosus* Voltz, ed una specie del genere *Pileopsis*, che non trovo registrata nelle opere degli autori che ho per le mani.

Alla lista delle specie cretacee che qui sotto esibisco, ed alla descrizione de' Cefalopodi de' quali presento le imagini, era necessario ch' io facessi precedere questi pochi cenni sopra le rocce nelle quali essi annidano.

FOSSILI CRETACEI DELLE ALPI VENETE,

QUELLI PARTICOLARMENTE DELLE LOCALITÀ RICORDATE NEL CORSO DI QUESTA MEMORIA.

Fucoides Targionii. Ad. Brongn. Histoir. des végétaux fossiles. T. 1, pag. 56. Tab. IV, fig. 2-6. Della scaglia rossa tra Cugnano e Modulo presso il torrente Meassa. Vidi questa specie nel Macigno grigio di Muciano sette miglia sopra Firenze, e nella stessa roccia lo rividi ad Induno presso Varese, dove fu raccolta da Michelin uno degl' intervenuti al Congresso scientifico di Milano.

— *intricatus*. Ad. Brongn. Nella scaglia rossa di Cugnano e nella bigia di Belvedere presso Belluno. Esiste a Muciano e ad Induno.

— *furcatus*. Ad. Brongn. Ivi, sempre però nella scaglia o bigia o rossa; non mai in rocce intermedie fra le cretacee e le juresi come riferisce Brongniart riguardo agli esemplari da esso illustrati di questa specie. È probabile che il *Fucoides furcatus* abbia continuato a vivere fino all' epoca in cui si è formata la scaglia.

Coralli . . . . . . Fusti cilindrici, non articolati, ramosi, talvolta lunghi un piede ed anche più. Del genere *Isis* Michelin non ha esibito finora che una sola specie ed è quella che abbiamo altrove citata, descritta innanzi tutti da Goldfuss pag. 20. Tab. VII, fig. 12, e poscia da Michelotti. Li coralli non articolati contrasegnano la scaglia rossa e bigia del Bellunese ed anche la creta bianca superiore di alcuni luoghi del Veronese (Breonio.).

Pentacrinites . . . . . Articoli brevissimi d'una specie non peranco figurata benchè descritta da diversi Autori Italiani. Trovasi frequente nella scaglia rossa del Veronese e nella calcaria nummulitica del Feltrino. I primi sono più grossi de' secondi.

Marsupites ornatus. Mantell. Bronn *Lethaea* pag. 604. Tab. XXIX, fig. 13. Biancone di monte Cucca, tra Valdagno e Recoaro.

Fungia cyclolites. Nob. Biancone di Lusiana dove trovasi in compagnia d'altri molti polipaj e di diversi Alcioni (1).

---

(1) Dieci e più specie di polipaj che nel Catalogo a stampa del 1842 io conguagliava al terreno mioceno spettano invece alla formazione cretacea e come tali verranno descritte e figurate nell' opera. Ne' miei viaggi sulle alpi Tirolesi limitrofe alle Venete

Nummuliti. Le specie esistenti nella creta del Veneto sono tutte di piccolissimo volume, laddove nel terreno mioceno ve ne sono di assai minute e di grandi. Io ne possiedo una distaccata dalle marne terziarie di Priabona (Vicentino) la quale ha il diametro di sei centimetri. (1)

Le nummuliti cretacee sono talvolta rigonfiate nel centro e assottigliate verso la circonferenza; talvolta riescono affatto piane e lisce in ambe le facce e talvolta appajono munite d' una papilla centrale. Nell' interno presentano due o tre fasce spirali divise da setti imperforati che formano altrettante cellette. Questi caratteri possono anche competere alle nummuliti terziarie illustrate da varj autori, a quelle particolarmente che ho descritte io stesso nella Memoria epistolare diretta al fu Co. da Rio e delle quali darò qui sotto una circostanziata indicazione. Importa prima di tutto avvertire che le nummuliti de' terreni terziarj del Veneto non sono, come le cretacee, accomunate alle Orbuliti, ma sibbene ad una specie particolare di *Serpula*, che cercherebbesi invano fra le nummuliti della creta. Di fatto fra queste ultime non ho mai trovata la *Serpula spirulaea* di Lamarck (non Bronn), specie che ho descritta e figurata sotto altro nome ventisette anni addietro nel Giornale di Brugnatelli con le seguenti frasi. « La specie è vulgatissima ne' colli di Verona, ed ha la figura di disco « formato di due o tre anfratti strettamente uniti fra di loro, e « solo distinti l' uno dall' altro per mezzo d' un solco che deter- « mina la larghezza di ciascuno. L' ultimo giro è alquanto de- « presso nel margine esteriore, mentre nella parte che guarda il « centro della spira comparisce convesso. L' anfratto che porta « l' apertura diverge dalla sua direzione, e si prolunga in linea « quasi retta per formare un beccuccio lungo talvolta un pollice « ed anche più. Ne ho trovati parecchi di semplicemente calcinati. »

---

rinvenni altre specie di polipaj e di bivalvi nel muschelkalk, che del pari verranno aggiunte all' opera suddetta.

(1) Il chiarissimo Sig. Eugenio Sismonda assicurava la Sezione di geologia del Congresso scientifico di Napoli che il terreno nummulitico del Varo è ricco di specie terziarie, a cui il marchese Pareto soggiungeva doversi distinguere due sorta di terreni a nummuliti, il primo con *grandi nummuliti* sul quale riposa il macigno e quindi riferibile alla formazione cretacea: il secondo con piccoli nummuliti superiore al macigno, che per gli altri fossili che contiene può riguardarsi come terziario. Mi appello al Sig. Pasini che ben conosce le formazioni terziarie del Veneto dove abbondano nummuliti del diametro di uno scudo romano (Priabona, Valdonega ecc.), perchè dichiari il suo giudizio sull'aggiustatezza della distinzione fatta dal chiarissimo marchese Pareto (*Diario del Congresso di Napoli, pag.* 103.) .

Mi sembrava in quel tempo che l' interno della spira fosse concamerato alla maniera della *Serpula polythalamia* di Brocchi, ma sonomi poscia assicurato della mancanza assoluta di tramezzi. Questa specie è parimente copiosa nel terreno plioceno recente dell'Asolano, e stando alle osservazioni di Adanson essa viverebbe tuttavia ne' mari del Senegal (Hist. nat. du Sénégal pag. 165. Tab. 11, fig. 4. *a. b.*). Voglio con ciò concludere che la specie di cui si ragiona è una delle più caratteristiche de' terreni terziarj Veneti (1). Che se la calcaria nummulitica del contado di Nizza, ove trovasi la *Serpula spirulaea* contenesse realmente la *Gryphaea columba*, non ne verrebbe per questo che tale roccia, superiore com' è alla calcaria con fucoidi, si dovesse considerare cretacea, giacchè la *Gryphaea columba* può esistere anco nella calcaria miocena, e nelle brecciole del Vicentino (Brongn. Terr. calcareo-trappéens, pag. 11.) ; e noi abbiamo rese ostensibili alla Sezione di geologia del Congresso scientifico di Padova alquante specie di Grifee riputate cretacee, le quali si ripetono nelle marne terziarie di Valle di Lonte e nella calcaria grossolana di Castel Gomberto nel Vicentino (Atti della quarta Riunione, Adunanza del 17 Settembre 1842. 4°.).

NUMMULITI DELLA BRECCIOLA TERZIARIA DI TEOLO, NEGLI EUGANEI.

Nummulites microscopica. Nob.

Testa lentiformis, superficie laevi, utrinque convexa.

Gli esemplari più piccoli sono appena sensibili alla vista e ingranditi coi vetri rassomigliano ad un granellino di lente. Di questa Nummularia v' hanno assai varietà, le cui differenze consistono solamente nel maggior volume al quale arrivano gl' individui in grazia dell' età. Essa si approssima alla nummularia figurata da Fortis nella Tavola I, fig. *a. b.* (Mem. pour servir a l' Histoire nat. de l' Italie, Tom. II, pag. 98.). La specie è comunissima nella calcaria grossolana delle Province Venete (2).

---

(1) La *Serpula spirulaea*, come pure le nummuliti, mancano onninamente nella Glauconia terziaria e nel molasse glauconiano del Bellunese e del Trevigiano.

(2) Questa specie sotto un volume alquanto maggiore si trova in gran copia anco nella creta che soggiace alla Trachite di M. Rusta negli Euganei, ed è poi identica a quella che trovai nella creta nummulitica che fiancheggia la dritta dell' Adda nel Milanese.

Nummulites globularia? Lam. — È la *Melonia Fortisii* di Deshayes (Fortis Op. cit. pag. 131. Tav. 3, fig. 8. *c. d.* fig. 9.) la quale è di forma ovale, molto turgida non però a grado di poter essere creduta una specie del genere *Globosites* di Fichtel. Trovasi frequente nel Veronese e nella Val Nera nel Vicentino, dove non fu veduta da Fortis che la illustrò come specie straniera alle nostre alpi.

— *Liviana.* Nob.

Testa lentiformis, superficie laevi, margine tenuissimo acuto.

La differenza che corre tra questa specie e la *Nummulites microscopica*, si ravvisa nella forma che solamente è convessa verso il centro del disco e nei margini che appajono affilati e taglienti. Non mi arrischio assicurare che questa nummularia sia esclusiva della brecciola di Teolo; questo posso dire che ella si discosta da tutte le altre che ho raccolte nella calcaria e nelle marne terziarie del Veneto.

— *onychomorpha.* Nob.

Testa unguiformis, papyracea, undique depressa, laevi, margine undoso, tenuissimo.

È la *Nummulites* ricurvata a foggia d' unghia umana, comunissima nella calcaria miocena di Grancona e in quella de' contorni di Verona, presso la porta di S. Giorgio. Fortis esibisce di questa specie una figura piuttosto trista (Tav. III, n°. 15 - 17.).

— *mammilla.* Questa specie fu trovata per la prima volta nel Brabante Olandese da Faujas, e si distingue dalle specie congeneri in grazia della papilla che si eleva nel centro d'una delle sue facce. Fortis l'ebbe in dono dal Faujas, e ne diede la figura (Tav. II, fig. N-O) che vedesi ancor meglio eseguita nella Tav. 471, fig. F. 2 dell' Enciclopedia, sebbene sotto dimensioni più grandi. Io conservo al fossile di Teolo il nome che fu dato al disegno dell' Enciclopedia, nell' Indice stampato a Parigi dal Bory de S. Vincent, quantunque si abbia omessa la frase specifica, e non si ricordi l' Autore che tolse ad individuarla coll' epiteto *Mammilla.* Essa potrebbe qualificarsi così: *Testa lenticularis, laevis, una tantum superficie in verrucam prominula, altera plana.* L' esemplare della brecciola di Teolo è molto più piccolo della figura che gli abbiamo applicata ma conserva però tutti i segni caratteristici della specie (1).

(1) Nel fine di questa Memoria già inserita, com' è detto, nel Giornale di Padova (1828), il conte da Rio aggiunse la seguente annotazione: « Tutti questi prodotti dell' « analisi meccanica della peperite di Teolo possonsi vedere nel Gabinetto mineralogico del da Rio, unitamente alle altre produzioni Euganee. » Questa annotazione potrebbe in altro momento riuscirmi utilissima e ne renderò a tempo debito le ragioni.

Belemnites cribrarius. Nob. (Annali di Scienze nat. di Bologna per l' anno 1829. Tomo I, pag. 312. Tav. V, fig. 1.)

Corpo subfusiforme, avente un solco assai corto, largo verso la base. L' apertura n' è quasi circolare, infarcita di materia calcaria poco coerente. L' intonaco alabastrino di questo fossile è ricoperto di fori disposti presso a poco nella guisa istessa di quelli che si veggono nel *Belemn. bicanaliculatus*, dapprima confuso da Blainville col *B. minimus*, e poscia distinto con nome particolare (Mem. sur les Belemnites, p. 120. Tab. 5, fig. 8.). La sua grandezza corrisponde benissimo al disegno. Fossile nel biancone di Grezzana nel Veronese.

— *Blainvillii*. Nob. (Annali suddetti. Tav. V, fig. 2.) .

Corpo subfusiforme coll' apice acuminato e munito di esile scannellatura ventrale che dalla base si prolunga fino quasi all' apice. L'apertura ch' è rotonda finisce in una specie di tubo, il quale dà al fossile la sembianza d' una spina d' Echino. Le sue dimensioni sono espresse al naturale nel disegno. Fossile nel biancone majolica di Montursi presso Romagnano nel Veronese.

Voltz applicò lo stesso nome ad un Belennite del terreno jurese, ignorando forse la nuova specie ch' io aveva dedicata al celeberrimo Blainville dieci anni prima.

— *dilatatus*. Blainville pag. 99. Tab. III, fig. 13.

Corpo leggermente compresso, più turgido nel mezzo della sua lunghezza che verso le sue estremità. Il solco longitudinale marcatissimo in alcuni individui, in altri obliterato, come si osserva in quelli descritti e figurati da Blainville. La cima di questo *Belemnites* è dritta non già eccentrica, ovvero come si esprime Blainville più dorsale che ventrale. Trovasi nel biancone del Veronese e nella creta de' monti Euganei. Lunghezza pollici 1, linee 3. Ho presentato al professore Necker de Saussure alcuni saggi di questa specie, perchè volesse confrontarli con quelli della Svizzera.

Osservazioni.

Credo che a questa specie si possa attribuire un aggregato di Belenniti misti ad altre spoglie marine che distaccai dal biancone de' Sette Comuni dodici anni dopo la pubblicazione della Memoria inserita negli Annali suddetti, benchè alcuni degli individui ammettano fra di loro qualche differenza dipendente, per ciò che a me pare, dall' età del cefalopodo al quale appartenevano. Di fatto la forma degli adulti varia notabilmente da quella de' giovani individui, come lo ha dimostrato Orbigny, che per via di accurati confronti seppe scoprire l' errore nel quale inciampò Raspail scambiando trentatrè varietà del *Belemnites dilatatus* con altrettante specie. Fra gl' individui di questa specie debbo collocarne

due che ritirai dalla calcaria rossa ammonitica di Entratico nel Bergamasco, cui pure si riferiscono altri due individui figurati nella Tavola II, n°. 13 della Memoria anonima intitolata *Cenni sulle Belenniti di Entratico* (Bergamo 1846. 8°. con due Tavole.).

Li Belenniti della calcaria cinerea di Fontana fredda scoperti ultimamente negli Euganei più si uniformano al *B. bipartitus* che al *B. dilatatus*, ma non ancora posso esentarmi dal credere che realmente non sieno nè l'uno ne l'altro. La prima delle nominate due specie esiste nella calcaria rossa marnosa d' Induno presso Varese e un esemplare l' ho raccolto io stesso sul luogo all' occasione d' una corsa ivi fatta dai Geologi intervenuti al Congresso scientifico di Milano. Al *Belemnites bipartitus* appartiene la specie che ho descritta sotto il nome di *Belemnites semihastatus* di Blainville. Gl' individui del *Pseudobelus bipartitus* di Blainville non sono che frammenti del *Belemnites bipartitus* dello stesso autore, come parmi di averlo dimostrato nella Memoria inserita ne' citati Annali di Bologna. T. 1, pag. 311 - 312.

Belemnites semicanaliculatus. Blainville. Mem. sur les Belemn. pag. 67. Tab. I, fig. 10 - 15.

Ho descritto questa specie sotto il nome di *B. apiciconus* Blainv. (Ann. di Scienze nat. T. 1, pag. 311.), ma ora la giudico essere il *semicanaliculatus* descritto e figurato da Orbigny (Terr. cret. T. 1, pag. 58. Tab. V, fig. 10 - 11.). Trovasi nel biancone della valle Pantena. Lungo pollice uno e linee sei.

— *minimus*. Blainville. Mem. sur les Belemn. pag. 119. Tab. V, fig. 7.

Corpo fusiforme con la base terminata da una punta ottusa, ciò che lo avvicina all' individuo veduto da Blainville nella collezione di Marmin e che poscia figurò nella Tavola sopra citata. Manca del solco longitudinale e dell' apertura per cui si assomiglia più ad un aculeo di Echino che ad un Belennite. Uno de' due individui che possiedo è fornito dell' apertura, non già del solco. Si scosta notabilmente dal *B. minimus* di Muller, nè saprei indovinare il motivo che determinò Blainville a dargli lo stesso nome. Ho trovato questa specie nel biancone majolica di Montursi presso Romagnano nel Veronese.

— *latus*. Blainville. Mem. sur les Belemn. p. 118 e 121. Tab. V, fig. 4 e fig. 10. Orbigny. Terr. crét. T. II, pag. 48. Tab. IV, fig. 1 - 5.

Corpo grosso digitiforme coll' apice ottuso e quasi troncato, munito d' un solco alquanto profondo che dall' apertura si prolunga fino alla cima. Esso appare leggermente compresso ne' lati. È il più grosso de' Belenniti della mia collezione, e procede dalla calcaria rossa ammonitica di Entratico nel Bergamasco dove probabilmente sarà poco comune, giacchè non lo veggo figurato nelle due Tavole annesse ai *Cenni* superiormente ricordati. Possiedo altri sei Belenniti scavati l' anno 1844 nella calcaria d' Entratico non ancora passati in rivista.

Aptychus Lamellosus (1). Voltz. Bronn *Lethaea geognostica* p. 467. Tab. XV, fig. 15.

Biancone di Cugnano presso Belluno, e calcaria rossa ammonitica di Entratico. Gli individui sono infissi in ambe queste rocce.

— *Beaumontii.* Coquand. Bull. de la Soc. geol. de France. Tom. XII, p. 396. Tab. IX, fig. 12.

Fossile nella calcaria ammonitica rossa di Entratico nel Bergamasco.

— *latus.* Voltz. Bronn, *Lethaea* p. 466. Tab. XV, fig. 16. *a. b. c.* È l'*Aptychus brevis* di Meyer figurato da Coquand, nel Bull. de la Soc. geol. de France. Tom. XII. Tab. IX, fig. 3.

Fossile nella calcaria ammonitica rossa di Entratico.

AMMONITES.

Le specie di questo genere ad eccezione di poche segnate con * sono descritte e figurate nel fine di questa Memoria.

* *Ammonites nodulosus.* Nob. (2)
— *Beudanti.* Orbigny (non Brongniart). *Tav.* V, *fig.* 1. *a. b.*
— *tatricus.* Pusch. *Tav.* V, *fig.* 2. *a. b. c. d. e.*
— *bifrons.* Bruguiere. *Tav.* V, *fig.* 3. *a. b. c. d.*
— *Zuppani.* Nob. *Tav.* VI, *fig.* 1. *a. b.*
— *strictus.* Nob. *Tav.* VI, *fig.* 2. *a. b.*

---

(1) Molto discordi si mostrarono i vecchi naturalisti nella determinazione di questi corpi, e molto sulla loro natura si è disputato e si disputa tuttavia da' moderni. Knorr li credeva valve di *Lepas anatifa*, con cui certe specie di Aptici hanno la più patente conformità. Bourdet li risguardò come mascelle di pesci, e dello stesso parere si dichiarò Sowerby che li denominò *Ichtyosogens*; mentre Parkinson e Schlotheim li riferivano invece ai testacei bivalvi sotto le denominazioni di *Trigonellites* e di *Tellinites*. Ruppell espose al Congresso di Heidelberga (1829) una serie di belle osservazioni per dimostrare che gli Aptici sono opercoli di un monotalamo da lui chiamato *Pseudammonites*, le quali sono state pubblicate in una Memoria accompagnata da tavole. Hermann fu il primo a sospettare che li fossili di cui si ragiona, sieno ossetti interni di Molluschi, come Fortis opinava che fossero le Nummuliti, e questa opinione dell'Hermann fu adottata dal Coquand nella sua dotta Memoria sopra gli Aptici (Bull. de la Soc. géol. de France Tom. XII, pag. 291.).

(2) Trovasi nel biancone dei Sarmazzi presso Grezzana nel Veronese (non già a Lavazzo ove il biancone manca), e nella calcaria cinerea di Fontana fredda negli Euganei in compagnia de' Belenniti cretacei superiormente ricordati. Degli individui scavati ai Sarmazzi io parlo nel Giornale di Brugnatelli. Bim. VI, 1820, pag. 386. 4°.

Ammonites bicingulatus. Nob. *Tav*. VI, *fig*. 3. *a*. *b*. *c*.
— *fascicularis*. Orbigny. *Tav*. VI, *fig*. 4. *a*. *b*.
— *Gazolae*. Nob. *Tav*. VI, *fig*. 5. *a*. *b*.
— *helius*. Orbigny. *Tav*. VI, *fig*. 6. *a*. *b*.
— *simplus*? Orbigny. *Tav*. VI, *fig*. 7. *a*. *b*.
— *subfascicularis*. Orbigny. *Tav*. VII, *fig*. 1. *a*. *b*.
— *latidorsatus*? Michelin. *Tav*. VII, *fig*. 2. *a*. *b*.
— *macilentus*. Orbigny. *Tav*. VII, *fig*. 3. *a*. *b*. *c*.
— *Astierianus*. Orbigny. *Tav*. VIII, *fig*. 1. *a*. *b*.
— *quadrisulcatus*. Orbigny. *Tav*. VIII, *fig*. 2. *a*. *b*.
— *Juilleti*? Orbigny. *Tav*. VIII, *fig*. 3. *a*. *b*. *c*.
— *semistriatus*. Orbigny. *Tav*. VIII, *fig*. 4. *a*. *b*.
— *bidichotomus*. Leymerie. *Tav*. VIII, *fig*. 5 e *Tav*. X, *fig*. 1.
— *bicurvatus*. Michelin. *Tav*. IX, *fig*. 3. *a*. *b*.
— *Bouchardianus*? Orbigny. *Tav*. IX, *fig*. 4. *a*. *b*.
— *Ambrosianus*. Nob. *Tav*. XI, *fig*. 1. *a*. *b*. *c*.
— *annulatus*. Sowerby. *Tav*. XI, *fig*. 2. *a*. *b*.
— *biplex*. Sowerby. *Tav*. XI, *fig*. 3. *a*. *b*.
Crioceras Duvalii. Leveillé. *Tav*. X, *fig*. 2.
— *Villiersianus*. Orbigny. *Tav*. X, *fig*. 3.
— *Astierianus*? Orbigny. *Tav*. X, *fig*. 4.
Ancyloceras nodosus. Nob. *Tav*. IX, *fig*. 1. *a*. *b*. *c*.
Hamites Labatii. Nob. *Tav*. IX, *fig*. 2.

Patella scutellata. Nob. Specie grande inedita del biancone di Lusiana ne' Sette Comuni e di Grezzana nel Veronese.

Pileopsis . . . . Due esemplari di specie non peranco definite diverse l' una dall' altra. Nel biancone di Cugnano (Bellunese) e nella calcaria rossiccia ghiandolosa di Castelletto presso Fontana fredda negli Euganei.

Inoceramus Lamarckii. Mantell. Trovasi con qualche frequenza nella calcaria ammonitica di Lavazzo, ed è genere le cui specie appartengono esclusivamente alla creta (1) . Si sono trovati individui di questo Inoceramo nel biancone di Magré presso Schio. Le pieghe concentriche del margine superiore sono molto distanti fra loro e quali

---

(1) Le belle osservazioni di Deshayes intorno gli accidenti che hanno accompagnato la fossilizzazione delle bivalvi cretacee si possono verificare in tutte le specie che ho raccolte finora del genere *Inoceramus*. La parte interna delle valve appare distrutta, mentre la esterna vedesi rappresentata da un velo cristallino, ch' è sempre bianco nella spezzatura, anco quando la calcaria nella quale è convertita la conchiglia sia oscura.

si ammirano nella fig. 1. *c*. Tav. CXI di Goldfuss applicata dall' Autore a questa specie. Conservo di essa tre esemplari, due procedenti da Lavazzo, uno da Magré.

Inoceramus striatus. Mantell. Goldfuss. Tab. CXII, fig. 2. *a*. *c*. Calcaria grigia di Lavazzo.

— *propinquus*? Münster. Goldfuss. Tab. CIX, fig. 2. *a*. *b*. Due esemplari alquanto detriti della calcaria ammonitica grigia di Lavazzo nel Bellunese.

Inoceramus? mytiloides. Mantell. Goldfuss. Tab. CXIII, fig. 4. *a*. *b*. È mancante dell' ala cardinale, e proviene dalla calcaria grigia presso il lago d' Iseo, dove fu raccolto dal chiarissimo Sig. Prof. Antonio Perego che lo donò allo scrivente.

Pectunculina? complanata. Orbigny, Terr. crét. Tab. CV, fig. 5 - 8. Questo fossile ne' caratteri esteriori combina perfettamente con le citate figure, ma le valve, strettamente incollate insieme, non lasciano vedere i caratteri della cerniera. Fossile nel biancone di Cugnano presso le cave di Paluco, nel Bellunese (1).

Terebratula triangula. Lam. Encycl. Tab. CCL, fig. 6. Atti dell'Accad. di Padova Tomo v. Tav. II, fig. 4. *g*. *h*., descritta sotto il nome *Ter. mutica*, nob. Il margine inferiore d' alcuni individui di questa specie appare più breve, posto che sia al paragone con quello d' altri individui, differenza ch' io considerava come specifica, ma che ora riguardo come dipendente dall' età della conchiglia. In uno de' molti esemplari che possiedo di questa specie si veggono nettamente le ramificazioni degli ovidutti de' quali parla De Buch (Classification et descript. des Terebrat. Mem. de la Soc. géol. de France T. III, pag. 198.). Fossile nel biancone del Bellunese, del Vicentino e della calcaria ammonitica rossa del Veronese.

— *antinomia*. Nob. Atti dell' Accad. di Padova. Tomo v. Tav. II, fig. 2. *c*. *d*. Fossile nel biancone del Veronese, del Feltrino, del Tirolo (Fondo) e nella calcaria ammonitica rosea di tutti questi luoghi (2).

---

(1) Spettano forse a questo medesimo genere alcuni corpi circolari, stiacciati sui margini che in unione a molti altri fossili mi pervennero da Entratico, uno de' quali vedesi figurato nella Tavola seconda lettera A, n°. 17 annessa ai *Cenni* sopra le Belenniti ricordati più sopra.

(2) Il Sig. de Zigno alla pag. 9 della sua Memoria sul terreno cretaceo mi fa dire in proposito della *Ter. antinomia* ciò che non ho mai detto nè pensato. « Il Prof. Catullo « (egli scrive) quantunque fino dal 1827 nella sua Zool. fossile ammettesse la *Ter. antinomia* come promiscua ai due terreni (biancone e calcaria ammonitica rossa) pure « riferisce d' averla trovata nel biancone de' Sette Comuni. Recentemente, come si rileva

Terebratula deltoidea. Lam. Atti dell' Accad. di Padova Tomo v. Tav. II, fig. 3. *e*. *f*. I lati del margine inferiore sono rotondati laddove nella *Ter. antinomia* appajono angolari. La *Ter. deltoidea* trovasi in tutti i luoghi ne' quali esistono le due specie precedenti.

— *bullata*. Sowerby. De Buch. Mem. de la Soc. géol de France T. III, pag. 195. Tab. XVIII, fig. 8. Questa specie creduta jurese fu trovata nella calcaria ammonitica cinerea de' Sette Comuni (presso Gallio) dal ch. Professore Sig. Doderlein mio amico.

— *turgidula*. Nob. Annali di Scienze nat. di Bologna T. VI, pag. 173. Nel biancone? di Marano nel Vicentino. Un miglio sopra Campo Tamasso v' ha una calcaria di cui non ho bene studiata la giacitura, ma che sembra essere una continuazione del terreno cretaceo Valdagnese, la quale è piena di modelli di Terebratule. Un velo del guscio che in alcuni esemplari rimane ancora attaccato al modello lascia travedere che le valve dovevano in origine essere lisce o prive di coste; circostanza che ho poi verificata distaccando una parte del guscio rimasta nel vano lasciato sulla roccia dalla conchiglia dopo d'averla estratta. La specie di cui si trova maggior copia d' individui, appartiene alla famiglia delle

---

« da altri suoi scritti, la rinvenne con maggior frequenza nelle stratificazioni decisamente « cretacee. » In questa osservazione il de Zigno non procede col rigore comandato dalla scienza, nè fa camminare di pari passo le ragioni dei fatti e le conclusioni che dai fatti stessi vorrebbe ritrarre. Come poteva io asserire che la *Ter. antinomia* (non *diphya*) è propria de' suoi due terreni se trovata non l' avessi anco nella calcaria ammonitica? Ciò che lesse il de Zigno nel Giornale Pisano (Febbrajo 1845) non è che una solenne conferma di quanto ho asserito nella Zool. fossile sullo stesso argomento (pag. 169-263). Ecco il passo: « Nella calcaria ammonitica trovai l' *Amm. tatricus*, varie specie « di *Apticus* (Bergamasco, che però si ripetono nel biancone), varie altre del genere « *Catillus* (*Inoceramus*) (Magré e Lavazzo), molti ammoniti della creta e fra questi « l' *Amm. Beudanti*, le *Terebratule mutica* ed *antinomia*, tutta la caterva degli Echinidi e « de' Belenniti cretacei già descritte e figurate in varie mie opere: li denti dello *Sphaerodus gigas* e del *Ptycodus polygyrus* d' Agassiz, ed altri molti avanzi marini che si vo- « gliono caratteristici della formazione di cui vi parlo (cretacea). Non è quindi da fare « le maraviglie se la *Ter. antinomia* riguardata dal Barone De Buch come specie esclu- « sivamente propria del mare jurassico, potè sopravvivere con molte altre alla distruzione « delle loro contemporanee, e protrarre la vita sino all' intero completamento del terreno « cretaceo. Avverto ancora di non avere mai trovato la *Ter. antinomia* nella calcaria « con rudiste dell' Alpago, come voi credete, ma d' averla sempre veduta nella calcaria « ammonitica rossa, nel marmo majolica e nel biancone » (Lettera di Catullo al Prof. Pilla, inserita nel Giornale su mentovato.).

jugate ed al gruppo delle *excavate* di De Buch; ma nessuna delle descrizioni e figure esibite da questo celebre naturalista si affà con la nostra per lo che ne darò a suo tempo il disegno e la descrizione.

Terebratula impressa. Bronn. De Buch. Mem. de la Soc. géol. de France T. III, pag. 226. Tab. XX, fig. 7. Combina perfettamente con le descrizioni e con le figure date da Bronn e da De Buch di questa specie, tanto copiosa nelle marne superiori juresi del Würtembergese. Fossile negli strati marnosi che accompagnano il marmo majolica di Montursi presso Romagnano nella valle Pantena, ove è accompagnata dalla *Terebratula antinomia*.

— *mantellina*. Sowerby. Conchiol. pag. 552. Tab. 537, fig. 11 - 13. Fossile nelle marne rossastre di Ceré, al di sotto della caverna ossifera di questo nome. Schlotheim le assegna per istanza la creta di Lugo in valle Pantena, e nello stesso terreno fu trovata presso Humsey nell' Inghilterra.

— *Brocchi*. Nob. Zool. foss. pag. 268. Tav. V, fig. *A. a*. Fossile nel biancone di Grezzana, e nella calcaria ammonitica di Valgadena ne' Sette Comuni.

— *Chrysalis*. Schloth. De Buch. Mem. de la Soc. géol. de France. T. III, pag. 166. Tab. XVI, fig. 9. Bronn *Lethaea*. Tab. XXX, fig. 6. Fossile nelle marne rossastre di valle Pantena nel luogo stesso in cui si sono scavati gli articoli del *Pentacrinites* ricordati più indietro. Gl'individui descritti da Schlotheim si mostrano molto più piccoli del disegno laddove i nostri sono grandi quanto la figura dataci da De Buch.

— *pectunculoides*. Schloth. De Buch. Mem. de la Soc. géol. de France. T. III, pag. 179. Tab. XVII, fig. 1. Di questa elegante conchiglia conservo parecchi individui non più piccoli d' una lenticchia, nè più grandi di un nocciuolo. Essa è stata raccolta ne' monti del Veronese dal fu Sig. Bozza ben noto naturalista di Verona, e mi fu comunicata molti anni addietro dal vivente Signor Angeli farmacista distinto di quella città. Non sono in grado di assicurare da qual luogo derivi questa specie per non averla io mai trovata nelle ripetute peregrinazioni fatte sui monti di quella provincia.

Crania nummulus? Lam. Biancone di S. Ambrogio nel Veronese.

ECHINIDI (1).

Fibularia discoidea. Nob. Biancone di Grezzana; specie che ho descritta, ma non ancora figurata. Giornale di Brugnatelli (Bim. IV per l'anno 1828. 4°.).

---

(1) Nell' opera della quale mi sto occupando, gli Echinidi saranno distribuiti a seconda delle opere di Agassiz, e dell' esimio Dott. Eugenio Sismonda di Torino.

Spatangus amygdala. Nob. (*Micraster*, Agassiz.) Biancone di Grezzana nel Veronese e di Frassenelle negli Euganei. Zool. foss., pag. 224. Atti dell' Accad. di Padova Tom. v, pag. 7.

— *Lamarckii.* Nob. (*Holaster*, Agassiz.) Biancone del Veronese. Zool. foss. pag. 223. Tav. II, fig. *F. i.*

— *intermedius.* (*Holaster intermedius*, Agassiz.) Biancone di Frassenelle negli Euganei.

— *cor anguinum.* Lam. (*Micraster cor anguinum*, Agassiz.) Biancone del Vicentino e del Veronese. Zool. fossile, pag. 225.

— *bufo.* Brongniart. Galio ne' Sette Comuni.

— *prunella.* Lam. Ivi.

— *subglobularis?* Defrance. (*Holaster subglobularis*, Ag.) Biancone di Novale nel Vicentino. Esemplare malconcio in cui le aree ambulacrali sono smarrite quasi del tutto. A prima giunta si prenderebbe per una specie del genere *Anaster* creato dal ch. Signor Sismonda.

Nucleolites obesus. Nob. Biancone di S. Giovanni Illarione nel Vicentino. Questa specie ammette alcune differenze dipendenti dall' età. Zool. foss., pag. 227. Tav. II, fig. *B. b.*

— *subtrigonatus.* Nob. Biancone di Frassenelle negli Euganei e calcaria ammonitica rossa del Feltrino e de' Sette Comuni. Zool. fossile, pag. 226. Tav. II, fig. *H. h.*

— *cordiformis.* Nob. Calcaria ammonitica rossa, e biancone del Veronese e del Vicentino. Zool. foss., pag. 225. Tav. II, fig. *D. d.*

— *convexus.* Nob. Nelle calcarie stesse in cui esiste la specie precedente nel Vicentino e nel Veronese. Zool. fossile, pag. 128. Tav. II, fig. *G. g.* (1)

— *cor avium.* Nob. Biancone di S. Giovanni Illarione nel Vicentino. Zool. fossile, pag. 226. *D. d.*

— *depressus.* Nob. Biancone del Veronese e del Vicentino. Catalogo delle specie organiche fossili delle alpi Venete pag. 8, num°. 92. Padova 1842. 8°.

Ananchita conoidea. Nob. Trovasi con qualche frequenza nel biancone di Frassenelle negli Euganei. N°. 93 del suddetto Catalogo.

— *pustulosa.* Lam. Specie molto diffusa nel biancone del Veneto, in quello di Frassenelle particolarmente. Zool. fossile, pag. 220.

---

(1) Questa specie e forse alcune altre, che ho conguagliate vent' anni addietro al genere *Nucleolites* di Lamarck debbono rientrare nel genere *Disaster* di Agassiz, che le considerò come assolutamente proprie del terreno jurese. Quella che ho figurata proviene senza dubbio veruno dal biancone Veronese, ed è come le altre congeneri, convertita in focaja (Annali di Scienze nat. di Bologna. Maggio 1844.).

Ananchita concava. Nob. Trovasi nella calcaria ammonitica e nel biancone, come lo indica il colore degli individui tratti da queste due rocce. Di questa specie conservo individui di varie grandezze, ed ebbi l' agio di farvi intorno molte osservazioni e confronti con gli individui della specie precedente per accertarmi che i primi diversano dai secondi. Il ch. Sig. Eugenio Dott. Sismonda non è del mio avviso, e considera l'*Ananchita concava* come una semplice varietà dell'*An. pustulosa* (Echinidi fossili del Contado di Nizza pag. 15. 1841. 4°.). Veggasi la Zool. fossile pag. 222. Tav. IV, fig. *A*. *a*.

— *cordata*. Lam. (*Micraster cordatus*, Ag.) Biancone di Frassenelle negli Euganei e di varj luoghi del Veronese. Zool. foss., p. 220.

Cidarites nobilis. Münster. Biancone di valle Pantena (Giorn. di Brugnatelli. Bim. IV. 1820.).

— *elegans*. Münster.

— *moniliferus*. Goldfuss. Biancone di S. Ambrogio nel Veronese.

— *granulosus*. Goldfuss. Biancone di valle Pantena. È specie promiscua al terreno terziario. Zool. fossile, pag. 231.

— *crenularis*. Lam. Biancone di valle Pantena. Zool. fossile, pag. 232.

Echinus miliaris? Lam. Detto di Grezzana. Zool. fossile, pag. 230.

— *excavatus*? Leske. Goldf. Tab. XL, fig. 12. *a*. *b*. Detto di Grezzana.

Galerites conoideus. Lam. (*Conoclypus conoideus*, Agassiz.) Fossile nella calcaria grigia di Rotzo ne' Sette Comuni. Giornale di Brugnatelli. 1820. Bim. VI e Zool. fossile, pag. 219.

— *coniexcentricus*. Nob. (*Conoclypus*, Ag.) Biancone del Veronese e calcaria del terreno mioceno della stessa Provincia. Zool. fossile, pag. 216. Atti dell' Accad. di Padova. Tom. v. Tav. I, fig. *a*. *b*.

— *albogalerus*. Lam. (*Conoclypus*, Ag.) Biancone di Romagnano nel Veronese. Zool. fossile, pag. 213.

— *hemisphaericus*. Lam. Trovai questa specie nella focaja grigia che si vede sotto forma d' arnioni nel biancone di Grezzana nel Veronese. Zool. fossile, pag. 219.

Echinoneus scutigerus. Nob. Bella specie, anche per la nettezza delle aperture molto vicine tra loro. Biancone della valle Pantena presso Cologna e propriamente nel burrone detto *Grotta di Folsacco* (Zool. fossile, pag. 212.), e nella calcaria ammonitica di Romagnano. Il Sig. de Zigno che a più bell' agio studia le collezioni private del fu Ab. Caregnato e del Sig. Parolini di Bassano, avrà certo ammirato nella prima di esse un assai netto esemplare di questa specie.

ACULEI DI ECHINIDI.

Cidarites glandiferus. Goldfuss. Biancone del Veronese e del Feltrino. Zool. fossile, pag. 236.

Cidarites vesiculosus. Goldfuss. Aculei spiriferi del biancone de' Sette Comuni, colà raccolti nel 1822. Zool. fossile, p. 236. Trovansi pure nella calcaria ammonitica cinerea del Serbaro, non lungi dal sito ove stanno sepolte le ossa dell' *Elephas primigenius.*

— *Schmidellii.* Münster. Goldfuss. Petrefact. Tom. 1, pag. 120. Tab. XL, fig. 4, 6. Il più intatto degli Aculei serrati attribuiti da Münster a questa specie è stato da me descritto e figurato nel Giornale di Brugnatelli per l'anno 1822 (Tav. VI, fig. *G.*), cioè quattro anni innanzi che il Goldfuss desse fuori il primo fascicolo delle sue Tavole. Fossile nella calcaria di Romagnano nel Veronese. Zool. fossile, pag. 238.

DENTI D' ITTIOLITI.

Lamna longidens? Ag. Calcaria ammonitica rossa di Lavazzo. Esemplare attaccato alla roccia. Un altro dente di questo stesso genere vedesi attaccato alla calcaria grigia della medesima località.

Notidanus Münsterii? Ag. Calcaria grigia di Lavazzo.

Sphaerodus gigas? Ag. Nella Zoologia fossile registrai questi corpi sotto il nome: *Denti di Anarichas* (pag. 176) che si trovano fossili nel biancone di S. Ambrogio nel Veronese.

Ptychodus latissimus. Ag. Frequenti nella calcaria ammonitica e nel biancone delle Province Venete. Nella Zoologia fossile (pag. 149) attribuiva questi denti ad una specie del genere *Diodon*, e ne diedi la figura. Tav. III, *C.*

Lasciai nell'acido nitrico allungato alcuni di questi denti coll' intendimento di spogliarli della roccia calcaria che in parte ostruiva i solchi flessuosi del piano masticatore, e mi avvidi che lo smalto dapprima grigio fosco divenne bianco. Questa mutazione di colore fecemi entrare nel sospetto che fra i materiali dei denti fossili di *Ptychodus latissimus* vi potesse entrare lo spato fluore, ed il sospetto diventò certezza mediante il seguente semplicissimo sperimento. Staccai il velo bianco che apparì sul piano del dente, e fattovi agire sopra l'acido solforico concentrato, si sviluppò, mediante il calore, un gas capace di corrodere il vetro.

Ptychodus Mortonii. Ag. Nella calcaria ammonitica di Lavazzo.

— *polygyrus.* Ag. Biancone di Breonio nel Veronese e calcaria ammonitica rossa e grigia di Lavazzo.

— *mammillaris.* Ag. Biancone di M. Castello presso Valdagno. Zool. fossile, pag. 149. Tav. III, fig. *B.*

Crocodilus . . . . A Freschi ne' Sette Comuni rinvenne il Dott. Berettoni due mascelle di Coccodrillo infisse nella calcaria rossa ammonitica

e insieme con esse molti denti, del quale trovato diede notizia nel Tomo vi del nuovo Giornale d'Italia per l'anno 1795. Cuvier, stando alla descrizione e figure che ne diede lo Sternberg (Voyage en Tirol 1806), decise che quelle ossa spettino ad una specie molto affine al Coccodrillo della calcaria di Honfleur nella Normandía (Ossem. fossil. T. v, 2ª part. e Zool. foss., p. 190.).

AMMONITI.

Ammonites Beudanti. Brongniart. Envir. de Paris, pag. 95. Tab. VII, fig. 2? Orbigny. Terr. crét. Tom. 1, pag. 278. Tab. XXXIII, fig. 1. 2. Opera presente *Tav.* V, *fig.* 1. *a. b.*

Conchiglia discoidea, alquanto compressa, con indizj di coste trasversali inegualmente distribuite sul giro maggiore della spira. Apertura più lunga che larga, stretta ed ottusa in alto, inferiormente occupata dall' anfratto o giro, che in gran parte vi si nicchia dentro. Tramezze simmetriche, molto frastagliate in ciascuno de' lati, aventi sette lobi formati di parti impari e di selle composte di parti pari? Diametro da sei a dodici centimetri.

Differenze ed Osservazioni.

La forma generale della conchiglia è discoidea, non mai orbiculare, essendo sempre un poco elittica e quindi più lunga che larga. Le frastagliature delle tramezze ricoprono interamente ambi i lati della conchiglia e si veggono tanto ne'giovani che negli individui adulti. Solamente per quanto spetta a' rudimenti di coste m' è sembrato di scorgere una differenza, giacchè essi mancano o sono pochissimo apparenti negl' individui piccoli, si mostrano in quelli che hanno acquistato il diametro di sette centimetri, e sono obliterati del tutto negli adulti. In un giovane individuo fornito quasi per intiero del guscio che mi pervenne dalla calcaria rossa di Entratico (Bergamasco) non si ravvisa orma alcuna di coste, e le frastagliature che si osservano ne' punti ove manca il guscio si uniformano a quelle della specie che ho figurata. Corrisponde bene al disegno rappresentato da Orbigny nella Tav. XXXIII, fig. 2, se non che il nostro appare alcun poco più grande. Talvolta in luogo di coste si veggono indizj di solchi impressi irregolarmente sulla metà esterna dell' anfratto, i quali m' hanno fatto sospettare dapprima che l'*Ammonites* si accostasse piuttosto al *tatricus* che al *Beudanti,* ma la loro brevità e le varie modificazioni cui soggiaciono mi hanno ben presto disingannato. L' *Amm. Beudanti* è poi distintissimo dal *tatricus* in quanto che ha la bocca stretta superiormente, laddove quella dell' altro è rotondata, e la spira riesce interamente abbracciante. Benchè nella Zoologia fossile io abbia dato a questa specie un nome diverso, pure dichiarai di *trovarla identica* all'*Amm. Beudanti,* allegando ad un tempo le ragioni per le quali non sapeva indurmi a distaccarla dalla specie illustrata pochi anni prima da Brongniart

(Zool. fossile, pag. 248.). Anche de Haan riunì a torto questa specie all'*Amm. carinatus* di Bruguiere, tuttochè quest'ultimo sia munito di carena. Però debbo ora confessare che l'*Ammonites* figurato da Brongniart (Tab. VII, fig. 2) non si affà con quello della Tav. XXXIII, fig. 1 di Orbigny, e neppure coll' altro rappresentato nella Tav. XXXIV *bis* di quest' ultimo autore, ma parmi invece che debba appartenere ad una specie diversa. Io tornerò a discorrere a miglior tempo di queste differenze.

LOCALITÀ.

Uno solo degli esemplari che ho raccolti nella calcaria ammonitica del Veneto si conforma benissimo alla descrizione ed alla figura della Tavola XXXIII dell' Orbigny, mentre gli altri de' quali ho parlato ne' Cenni (1) più si rassomigliano al disegno superiormente citato di Brongniart. Questi ultimi derivano dalla calcaria rossa di valle Pantena nel Veronese e dalla calcaria della stessa tinta di Lavazzo e di Igne sopra Belluno, laddove quello che ho figurato proviene dalla calcaria grigia di Lavazzo che alterna con la rossa.

È degno da avvertirsi che l'*Amm. Beudanti* di Orbigny è una delle molte specie che si risguardano come esclusivamente proprie del Gault della Francia, il quale portando sopra di se la creta bianca rappresenta nel sistema cretaceo, quel tramezzo stesso, che nelle alpi Venete vedesi in parte occupato dal biancone.

Ammonites tatricus. Pusch. Polens. Paleontol. pag. 158. Tab. XIII, fig. *a. b. c.*
Op. presente *Tav.* V, *fig.* 2. *a. b. c. d. e.*

Conchiglia compressa, nautiliforme, fornita di sei solchi molto distanti l' uno dall' altro, che dall' ombelico si prolungano fino presso il dorso ch' è liscio e rotondato. Apertura ampla che abbraccia per intero il secondo anfratto, e arriva fino all' ombelico. Setti laterali trilobati. Diametro da tre a nove centimetri.

DIFFERENZE ED OSSERVAZIONI.

Questo Ammonite si accorda alla forma dell'*Amm. Beudanti*, col quale è stato da qualcuno confuso, ma differisce per alcuni caratteri che gli sono peculiari. Nel *tatricus* i margini inferiori dell' apertura si prolungano su tutta la larghezza del secondo anfratto e vanno all' ombelico, mentre nel *Beudanti* una parte dell' anfratto medesimo rimane scoperta. Oltre a ciò la bocca di quest'ultimo finisce in angolo piuttosto acuto, laddove quella dell'*Ammonites* di cui si tratta riesce superiormente arcuata, qualunque sieno le dimensioni a cui può attingere la specie, come lo dimostrano i disegni *a. b. d. e* (fig. 2.), eseguiti sopra individui d'età differente.

---

(1) Cenni sopra il sistema cretaceo delle alpi Venete e descrizione di alcune poche specie di cefalopodi trovati nella calcaria ammonitica e nel biancone inseriti nella Raccolta fisico-chimica Italiana. 8°. Venezia 1846.

L'*Amm. tatricus* è stato eziandio qualificato per una varietà dell'*Amm. heterophyllus* Sow., ma posto al confronto con la descrizione e con la figura applicata da Sowerby a questa specie, così chiara ne appare la differenza da doversi maravigliare che siensi unite insieme due conchiglie tanto diverse (Sowerby. Conchol. pag. 305. Tab. CCLVI). L'*Amm. heterophyllus* appartiene alla famiglia degli *Amaltei* di De Buch, mentre il *tatricus* spetta a quella dei *Macrocefali* dello stesso naturalista.

Località.

Questa specie è assai rara nel Veneto non avendola io trovata che una sol volta nella calcaria rossa di valle Pantena (Vajo del Paradiso), e mai nelle rocce analoghe del Vicentino e del Bellunese. Però il bar. De Buch assicura di aver veduto presso li Signori Villa di Milano un esemplare dell'*Amm. tatricus* tratto dalle montagne di Cesio Maggiore, tra Feltre e Belluno (Bull. de la Soc. Géol. de France. Avril 1845.) (1). Benchè delle lapidicine di Cesio Maggiore non vi sia angolo, direi quasi, ch'io abbia lasciato intentato, pure non mi è occorso mai di rinvenire questa specie, nè in quelle ned in altre lapidicine dell'Agro Feltrino. Ben avventurato può dirsi il Sig. de Zigno per averne trovato parecchi nella calcaria di Fontana Fredda negli Euganei, roccia ch'è pur comune in altri molti luoghi di quel circondario. Desideroso anch'io di trovarne qualcuno mi sono recato a Fontana Fredda nello scorso mese di Settembre (1846) in compagnia dello studiosissimo medico Sig. Rossi, assistente alla cattedra di Storia naturale, senza avere avuta la fortuna di appagare le mie brame. Li tre villici che ci hanno seguiti, non eccettuato Valentino Sinigaglia detto Nale, quello stesso che servì di guida al Signor de Zigno, ruppero invano le punte ed un martello; solamente osservammo in quella calcaria più che mai modificata l'*Amm. nodulosus*, nob., e molti individui del *Belemnites bipartitus* di Blainville, misti a' frammenti d'un altra specie, i quali potrebbero forse riferirsi al *Bel. dilatatus* trovato dal Sig. de Zigno in questa medesima roccia. Che se la calcaria cinerea di Fontana Fredda (presso Castelletto) scarseggia di Ammoniti, non si può dire altrettanto della calcaria rossa d'aspetto ghiandoloso che le sta sopra. Da uno strato di quest'ultima roccia abbiamo distaccato quattro Ammoniti, che non sono nè il *tatricus* nè l'*annulatus*, ed una specie del genere *Pileopsis* diversa dall'altra che rinvenni quest'autunno nel biancone di Cugnano, di cui darò quando che sia la descrizione (2).

---

(1) Il Signor Villa così mi scrive: « in quanto all'*Amm. tatricus* di Cesio Maggiore « del quale ella ci parla, possiamo assicurare chiunque ch'esso manca nella nostra col- « lezione, non avendo noi mai ritirato fossili da quella località; nè ci è noto che altri « possa averlo in Milano. »

(2) Avverto che fra gli Ammoniti divulsi da questa roccia due ne trovammo di malconci, con le facce lisce ed indizj di tramezze, privi di solchi trasversali, i quali si

L'*Amm. tatricus* di Entratico nel Bergamasco e gli esemplari della medesima specie che mi pervennero da' monti del Perugino si rinvengono d'ordinario tra le rime degli strati marnosi, che alternano con gli strati della calcaria ammonitica rossa, e portano con se le qualità stesse della roccia in cui sono inseriti. Tutti gl' individui che ho dinanzi, eccettuato quello che trovai nella valle Pantena, sono ridotti in sostanza marnosa, quindi appajono meno solidi de' testacei che annidano nella calcaria compatta di quella valle.

Ammonites bifrons. Bruguiere (1). *Amm. Walcotii*. Sow. Conchol. miner. Tab. CVI. *Tav.* V, *fig.* 3. *a. b. c. d.*

Conchiglia discoidea, compressa, provveduta di quattro o cinque anfratti, aventi sui lati un solco profondo e muniti di coste trasversali alquanto curvate. Apertura più lunga che larga. Diametro da cinque a dodici centimetri.

DIFFERENZE ED OSSERVAZIONI.

Questa specie si riconosce facilmente alla forma schiacciata, alla carena del dorso posta fra due scanalature, e più di tutto al solco profondo che divide in due parti ineguali ciascun giro della spira. Le coste trasversali non si prolungano in tutta la larghezza de' giri, ma si arrestano ove il solco bipartisce l'anfratto, tal che la parte più interna dell' anfratto medesimo appare affatto liscia. V' ha qualche raro individuo giovane nel quale anco questa parte della spira è costata (Deshayes, Descript. des coquill. caracterist. Tab. VII, fig. 7.), ma negli adulti è sempre liscia. La bocca, essendo molto allungata costituisce negli individui di tutte le età il terzo circa dell'altezza della conchiglia. Non peranco mi fu dato di possedere esemplari in cui potessi scorgere la forma e disposizione de' lobi e delle selle, ma in luogo di queste si veggono certe scabrosità che presentano le sembianze di pieghe ottuse prodotte, a ciò che pare, dall' acqua.

---

potrebbero a prima giunta scambiare coll' *Amm. tatricus*, del quale ho veduto quì in Padova esemplari trovati dal conte Spada nella calcaria jurese superiore degli Apennini (Diario di Napoli, p. 129.). La mancanza de' solchi e la forma del dorso che è quasi affilato ne' nostri ci fanno subito accorti della differenza.

(1) L'*Amm. Walcotii* di Sowerby era già stato descritto mezzo secolo prima da Bruguiere sotto il nome di *Amm. bifrons*, quindi parmi giusto di conservare a questa specie l' antica sua denominazione (Encycloped. metod. Tom. 1, n°. 15.). Esso era eziandio conosciuto dal Bourguet che lo vide nel gabinetto di Scheuchzero, e lo figurò nella Tav. XLVI, n°. 290 del suo Trattato sulle petrificazioni. Credo ancora che a questa specie si riferisca la figura rappresentata alla pagina 310 della *Metallotheca* di Mercati impressa nel 1717 per cura di Lancisio. Gli originali di questa figura provengono dagli Apennini.

LOCALITÀ.

Di questo politalamo si trovano individui di varie grandezze, cioè da cinque fino a diciotto centimetri. In tutte queste differenti età della specie ho sempre veduto che conserva il carattere che le è proprio, quello cioè della doccia concentrica scavata sui fianchi di ciaschedun giro, e che servì al Bruguiere per formare di essa una specie distinta. Gli esemplari di maggior volume hanno molta conformità coll'*Amm. Bucklandi*, di cui tanto si parlò nel Congresso scientifico di Milano, e col quale saranno stati scambiati gl' individui raccolti nella calcaria ammonitica dell'Agro Lombardo, benchè questi ultimi non arrivino mai all'enorme grandezza cui giunge il primo. E nel vero, se vuolsi fare astrazione della doccia scavata sui giri interni dell'*Amm. bifrons*, si vedrà che gli altri suoi caratteri possono altresì competere all'*Amm. Bucklandi*, come io stesso mi sono assicurato confrontando gli esemplari fossili con le descrizioni e le figure date da Sowerby di queste due specie (Sowerby, Conchol. mineral. trad. d'Agassiz, pag. 155. Tab. CVI e pag. 151. Tab. CXXX.). Quest'*Ammonites*, a detto di Sowerby, può appartenere a formazioni diverse, ma più comunemente gli si assegna per sede il terreno del Jura; tuttochè si rinvenga con qualche frequenza nelle calcarie ammonitiche rosse delle alpi Lombarde Venete. Io l' ho trovato nella calcaria rossa di M. Salta, ch' è una continuazione de' depositi della stessa roccia che si erigono a Lavazzo, i quali, benchè non tutti si dimostrino all'occhio concatenati fra di loro, essi lo sono in realtà sotto la superficie del suolo. Gli esemplari dell'*Amm. bifrons* tratti dalla calcaria rossa di Entratico (Bergamasco) sono accompagnati dal *Belemnites dilatatus* e da altre specie non mai finora incontrate in terreni anteriori alle rocce del sistema cretaceo. Lo stesso si può ripetere riguardo all'*Amm. bifrons* che m' ebbi anni sono dal Prof. Canali, gl' individui del quale occorrono molto comunemente nella calcaria ammonitica di M. Subosio, a levante di Perugia.

A questa specie appartengono li due Ammoniti che nella Zoologia fossile (pag. 146 - 147) io conguagliava all'*Amm. carinatus* di Bruguiere, ed all'*Amm. sulcatus* di Lamarck, secondo chè la cresta del dorso era apparente ovvero obliterata. La mancanza quasi assoluta di buone figure nel tempo in cui scriveva quell' opera, m' ha fatto inciampare in qualche equivoco nella determinazione delle specie, al quale cerco adesso di riparare esaminando di bel nuovo le conchiglie già descritte, confrontandole con le figure e con le descrizioni date in questi ultimi dieci anni da un buon numero di celebratissimi Autori.

Ammonites Zuppani. Nob. *Tav*. VI, *fig*. 1. *a*. *b*.

A. testa elliptica, compressa, laevigata, utrinque umbilicata, dorso rotundato, anfractibus depressis, involutis; ultimo latissimo, apertura antice rotundata, postice magis effusa; septis lateraliter 6. lobatis.

Conchiglia ovale, schiacciata, liscia, ombelicata, più depressa sul lato interno dell' ombelico che nell' esterno, e col dorso rotondato.

Anfratti molto compressi, il primo de' quali inviluppa tutti gli altri. Apertura elittica, superiormente arcuata e così lunga che il contorno dell' ombelico appare formato per intero dal primo anfratto. Tramezze molto frastagliate, con sei lobi per ciascun lato, formati di parti impari? Diametro cinque centimetri.

DIFFERENZE ED OSSERVAZIONI.

Inchinava da prima a crederlo un individuo giovane dell'*Amm. Beudanti*, a cui si assomiglia nella forma generale, ma in questo l'apertura non abbraccia interamente l' anfratto, come si osserva nel nostro esemplare. Questo carattere lo allontana altresì dall'*Amm. Alpinus* di Orbigny col quale ha molta conformità. Però nell'*Amm. Zuppani* l'apertura non si rigonfia sui lati come nell'*Alpinus*, e le sue labbra si prolungano al disotto dell' ombelico come lo dimostra la figura. Per questa straordinaria lunghezza della bocca si distingue il nostro fossile da tutti gli altri congeneri, nè posso a meno di non includerlo tra le specie nuove e rare della mia collezione.

LOCALITÀ.

Fossile nel biancone di S. Ambrogio e nella calcaria ammonitica rossa di Mazzurega nel Veronese. Raddrizzo quì una delle osservazioni critiche fatte dal Sig. Zigno ai *Cenni*, asserendo egli di aver veduto nella mia collezione deposta nel Gabinetto di Storia Naturale dell' I. R. Università « un solo esemplare di « questa specie, per cui non gli fu possibile chiarirsi se sia o meno promiscua « alle due calcarie bianca e rossa. » Senza lesione del vero posso assicurare che gli esemplari ostensibili nel Gabinetto e veduti dal Sig. Zigno sono tre, due de' quali molto più piccoli di quello che ho figurato nelle sue naturali dimensioni.

Questa specie vedesi egregiamente bene disegnata nella *Metallotheca Vaticana* di Michele Mercati, ed è la prima della quarta specie di figure impresse alla pagina 310. Le altre due figure che stanno ai fianchi rappresentano l'*Amm. tatricus*, e tutte spettano ad individui trovati ne' monti dell' Umbria e di altri luoghi dell' Apennino. Si vede da ciò che a' tempi di Mercati, Archiatro di Sisto V, non solo si attendeva in Italia ad arricchire i musei di Storia Naturale con i fossili delle nostre alpi, ma si davano di tutti le figure indicandone anco la provenienza.

Ammonites strictus. Nob. *Tav.* VI, *fig.* 2. *a. b.*

A. testa orbiculari, compressa, transversim bisulcata; anfractibus subcilindricis, laevigatis, apertura elongata, subcompressa; sectis?

Conchiglia compressa, liscia, rotondata, fornita di quattro anfratti subcilindrici, sul primo de' quali v' ha due solchi profondi che trasversalmente lo circondano. Bocca allungata, intera, non già interrotta dal giro della spira su cui s' appoggia. Nell' apertura non rimane indizio alcuno di lobi e di selle, ed i lati della spira appajono lisci e privi affatto di frastagliature. Diametro cinque centimetri.

Differenze ed Osservazioni.

Questo ammonite rispetto alla forma generale si approssima all'*Amm. quadrisulcatus* figurato da Orbigny (Tab. XLIX, fig. 1 - 3), ma in questo li due primi anfratti sono forniti di quattro solchi, laddove il nostro ne ha due soltanto sull' anfratto esteriore divisi l' uno dall' altro da un largo spazio. Oltre a ciò l'*Ammonites* di cui crediamo dover fare una specie distinta, differisce dalla specie di Orbigny per avere la spira meno turgida e la bocca molto più lunga e più compressa.

Località.

Gli esemplari di questa specie si trovano nella calcaria rossa ammonitica e nel biancone delle alpi Veronesi. Io ne ho raccolto due presso le cave aperte dagli scalpellini Romani presso la Chiusa (Lungadige) per estrarvi le pietre impiegate nell' erezione dell' Anfiteatro di Verona (Zool. fossile, pag. 209).

Ammonites bicingulatus. Nob. *Tav.* VI, *fig.* 3. *a. b.*

A. testa orbiculari, sub-compressa, anfractibus convexo-planulatis, transversim cingulatis, cingulis binariis ad dorsum incurvatis, dorso subrotundo, tuberculis compressis marginato; apertura subquadrata, septis inaequalibus ?

Conchiglia orbiculare, alquanto compressa sui lati, guernita trasversalmente di cingoli binarj. Li due cordoni componenti i cingoli rimangono disgiunti su tutta la larghezza dell' anfratto, e solamente si uniscono nella parte superiore dell'anfratto medesimo mediante li tubercoli che si scorgono lungo il margine, poi si dividono nuovamente per attraversare il dorso, e per incurvarsi alquanto verso la parte anteriore della spira. Apertura compressa, di forma quasi quadrata; lobi delle tramezze appena discernibili ed in apparenza ineguali. Diametro tre centimetri.

Differenze ed Osservazioni.

Di questa elegante conchiglia non trovo negli Autori che ho per le mani nè descrizioni nè figure cui poterla paragonare, benchè a prima giunta mostri di avere qualche rapporto di somiglianza con un pessimo disegno di Bourgnet (Tab. XXXIX, n°. 263) nel quale ommise l' autore di figurare il suo fossile pel verso del dorso.

Località.

Rinvenni questa specie nella calcaria rossa ammonitica che si eleva al disotto d' Igne in compagnia d' un *Ammonites* molto affine al *Beudanti*, e in unione all' *Hamites Labatii*, di cui dovrò parlare nelle seguenti descrizioni.

Ammonites fascicularis. Orbigny. *Tav.* VI, *fig.* 4. *a.* (1) *b.*

Conchiglia compressa col dorso rotondato, fornita sui lati di coste riunite inferiormente in fascetti mediante li tubercoli che circondano la regione dell'ombelico e interrotte sul dorso. Spira compressa, formata di quattro giri bene distinti. Bocca schiacciata, più lunga che larga; frastagliature delle tramezze oscuramente discernibili.

DIFFERENZE ED OSSERVAZIONI.

È visibilmente quello descritto e rappresentato dall' Orbigny (Terr. crét. Tom. 1, pag. 117. Tab. XXIX, fig. 1. 2.) che lo raffronta coll'*Amm. Astierianus* per dimostrare la differenza che v' ha tra queste due specie. La rassomiglianza dell'*Amm. fascicularis* coll'*Astierianus* è patente, ma nel primo gli anfratti sono più compressi, la spira più apparente, le coste più larghe, meno regolari, un poco curvate, nè mai circondano interamente il dorso come si osserva nell'*Astierianus*. Un' altra differenza meritevole d'osservazione, che non vedo punto indicata dall' Orbigny, consiste nel solco profondo che nell'*Astierianus* taglia obliquamente le coste più vicine all' apertura e che manca nella specie che descriviamo.

LOCALITÀ.

Quest'*Ammonites* che Orbigny assicura di aver trovato fra i rottami di calcaria azzurrognola distaccati dagli strati del terreno neocomiano tra Cassis e Bedoule (Bouches du Rhône), esiste nella calcaria rossa di M. Salta, sulla sinistra del Piave presso Longarone (Bellunese) (2).

ANNOTAZIONI.

Il Sig. de Zigno nelle osservazioni per lui fatte ai *Cenni*, dichiarava che l'*Ammonites* suddetto è stato male definito, e che più presto lo crederebbe affine all'*Amm. variabilis* che al *fascicularis*. Sventerò adesso questo suo sospetto. Vuolsi innanzi tutto sapere che l'*Ammonites* di cui si parla è stato da me rinvenuto nella calcaria rossa di M. Salta ora creduta jurese, e che molto importava spargere su di esso molte dubbiezze essendo specie decisamente neocomiana.

---

(1) La prima delle citate figure abbisogna di essere emendata pe' motivi che sarò per addurre più sopra.

(2) Il de Zigno asseriva sebbene troppo precipitosamente di *non essersi mai trovati fossili neocomiani nella calcaria rossa ammonitica*, mentre le osservazioni da oltre trenta anni instituite sulle nostre alpi mi dimostrarono il contrario. Mi sono quindi opposto al suo avviso pubblicando un opuscolo intitolato *Cenni sopra il sistema cretaceo delle alpi Venete*, ai quali lo Zigno non indugiò a rispondere con le *Osservazioni sopra i Cenni del Prof. Catullo* (Padova, edizione 2ª. 1846. 8º di pag. 15), già ricordate in altra nota di questo libro.

A detto del critico, « il disegnatore di questa specie ne sbagliò la figura, di-
« struggendo persino la somiglianza che realmente esiste fra l' esemplare del
« Prof. Catullo e l'*Amm. fascicularis* di Orbigny, a cui è stato ragguagliato.
« Questa somiglianza (continua il de Zigno) mi aveva dal bel principio indotto
« ad ammettere la determinazione data dal Professore, ma avendo poscia avuto
« l' opportunità di esaminare meglio l' esemplare, mi avvidi di notabili differenze
« nella *struttura* del *dorso*, le quali unitamente ai caratteri desunti dai *lobi*
« m' inducono a ritenerlo appartenente ad una specie diversa, e piuttosto affine
« all'*Amm. variabilis* posto da Orbigny nel lias della Francia (1) ». Quanto all' accusa data al disegnatore, essa non può riferirsi che al numero delle coste espresse nella figura, le quali sono binarie in tutta la circonvoluzione della spira, mentre nell'originale si può a stento rilevarne tre, lo che identifica vieppiù il mio esemplare con la specie disegnata da Orbigny. Aggiungasi che i fascetti composti di coste si mostrano nel mio fossile in un solo punto della spira, non già su tutta la faccia de' lati, dove in generale non se ne veggono che due per ogni fascetto. Aggiungasi ancora che lo spazio tra un fascetto e l'altro è di poco più grande nella figura che nell' originale, difetto non avvertito dal critico, ma che pur merita d' essere emendato. Ma il carattere principale della specie, stando al dettato di Orbigny (Terr. crét. T. 1, pag. 117) non consiste nel numero, che neppure è accennato nella frase specifica, bensì nell' interruzione delle coste sul dorso, la quale riesce così manifesta nel mio fossile che non saprei concepire a qual fine il de Zigno abbia additato questa parte per dimostrare gli errori della mia classificazione. Medesimamente il giudizio che porta de' lobi tiene del singolare anzi che no, ed eccone la prova. L'esemplare su cui versa la critica conserva alcuni indizj de' lobi sulla faccia d' uno degli anfratti, ma così smarriti che non seppi sceverare nè l' andamento nè il numero delle frastagliature. Poni caso però che le digitazioni o pari o dispari delle tramezze apparissero nel mio fossile discernibili, come poteva egli asserire che il *carattere de' lobi* lo allontana dalla specie di Orbigny, se questo Autore dichiara non avervi scorto alcuna rimanenza di tramezze nell'individuo per lui illustrato?

Ma la differenza che sopra ogni altra distingue l'individuo nostro dall'*Amm. variabilis* di Orbigny è di avere il dorso rotondato, laddove nell' altro questa parte riesce carenata e munita di una cresta molto sagliente (Orb. Terr. jurassiques. T. 1, pag. 350. Tab. CXIII, fig. 1. 2.).

---

(1) Qui il giovane critico si mostra in contraddizione coi principj da esso adottati sulla non promiscuità de' fossili. Quand' anche la calcaria ammonitica considerare si volesse *come la roccia più recente del terreno jurese*, sarebbe sempre un' anomalia trovarvi per entro le specie di Ammoniti che la Scuola Francese reputa esclusivamente propria della formazione liassica.

Ammonites Gazolae. Nob. *Tav*. VI, *fig*. 5. *a*. *b*.

A. testa discoidea, transversim costata, costis versus periphaeriam bifurcatis, anfractibus compressis, ultimo ad partem anteriorem sulco profundissimo exarato. Apertura oblonga, compressa. Septis?

Conchiglia compressa, munita di coste leggermente piegate verso il davanti, che si prolungano alquanto sui lati prima di biforcarsi o dividersi in fascetti composti ciascuno di due, di tre ed anco di quattro coste. Codeste, ben più sottili delle altre da cui derivano, si diffondono sul dorso ch'è rotondato. Sulla parte anteriore dell'ultimo anfratto le coste appajono più distanti fra di loro, ed un solco molto largo e profondo ne taglia obliquamente i lati. Il fondo del solco non è liscio in ogni sua parte, ma nella regione dorsale comparisce segnato da pieghe così grandi che saltano subito all'occhio. Apertura lunghissima, compressa. Tramezze non discernibili. Diametro sette centimetri.

Differenze ed Osservazioni.

Questa specie ha qualche rapporto di somiglianza con l'*Amm. Astierianus*, in causa del solco scavato nella parte anteriore dell'ultimo anfratto, ma differisce nel resto. L'*Astierianus* ha gli anfratti molto tumidi, provveduti internamente di tubercoli acuti, dai quali prendono origine le coste; mentre in quello che descriviamo, gli anfratti sono compressi e privi di tubercoli. Nel nostro le coste si biforcano in ambi i lati della spira prima di attraversare il dorso, laddove nell'*Astierianus* non apparisce alcun vestigio di biforcazione. De Buch che nel 1837 onorò di una sua visita la mia collezione, giudicò questa conchiglia molto affine all'*Amm. planulatus* col quale mostra d'avere qualche conformità e da cui si allontana, perchè gli anfratti non sono così convessi quanto quelli del *planulatus*, e sopra tutto pel solco scavato obliquamente in vicinanza dell'apertura, il quale in nessun *Ammonites* è così cospicuo come nel nostro.

Località.

M'ebbi questa specie in doppio esemplare dal Commendatore G. B. Gazola, che lo trovò nella calcaria bianco-sudicia di S. Ambrogio nel Veronese.

Ammonites Helius. Orbigny. *Tav*. VI, *fig*. 6. *a*. *b*.

Conchiglia discoidea, composta di quattro anfratti quasi piani od almeno leggermente convessi, coi lati provveduti di coste semplici, sinuose, che s'incurvano verso la parte anteriore della spira, e si arrestano presso i margini del dorso. Regione dorsale liscia ne'lati, o senza depressioni che fiancheggiano la cresta della carena, come si ammira nell'*Amm. Thouarsensis*. Bocca subcompressa, ottusa superiormente. Tramezze non discernibili. Diametro da tre a quattro centimetri.

Differenze ed Osservazioni.

È simile a quello descritto da Orbigny (Terr. crét. Tom. 1, pag. 187. Tab. LVII, fig. 1 - 2), ned altra differenza vi si riconosce che nella larghezza dell' ultimo anfratto, un po' minore ne' miei individui, e nella mancanza di frastagliature ne' lati che nettamente si osservano nella specie figurata da Orbigny.

Negando il Sig. de Zigno l' esistenza di fossili cretacei nella calcaria ammonitica, doveva di necessità decidere a quali specie juresi si riferissero i molti individui che ho attribuiti all'*Amm. Helius*, quindi portò opinione che alcuni si conformassero all'*Amm. Thouarsensis*, altri all'*Amm. Cadomensis* di Orbigny. Farò vedere a suo tempo che i primi degli esemplari esaminati dallo Zigno non sono nè l'*Amm. Thouarsensis*, nè l'*Amm. Helius*, ma spettano invece ad una specie inedita ; e che i secondi non si possono in alcuna guisa paragonare all'*Amm. Cadomensis* (1).

Località.

Di questa specie ho trovato due individui nella calcaria ammonitica rossa d'Igne presso Longarone, uno de' quali servì per delineare la figura ch' esibisco nella Tavola sesta. L' altro lo rinvenni nella calcaria ammonitica di Lavazzo, il quale ha la cresta del dorso più saliente, differenza che potrebbe derivare dall' età essendo più grande di quello che ho disegnato. Ho poi avuto alcuni esemplari di questa conchiglia raccolti nella calcaria rossa di Perugia, ed un altro lo trovai fra le conchiglie che mi pervennero dalle montagne di Entratico nel Bergamasco.

Nella Francia l'*Amm. Helius* è stato discoperto dal Signor Emeric nel terreno neocomiano di Lagne, e ne' contorni di Castellane (Basses Alpes). Giova tener conto de' luoghi ne' quali si rinvengono individui d' una medesima specie, perchè simili indicazioni possono in molti casi regolare il criterio de' Geologi.

(1) Forse per soverchia fretta non potè il Sig. Zigno accorgersi che il *falso* nome di *Cadomensis* fu mutato dall' Orbigny in quello di *Amm. cycloides* (Terr. jurass. p. 370), e che il *vero Amm. Cadomensis* tanto si discosta dagli esemplari che conguagliai all'*Amm. Helius* quanto il vino dall'acqua. L'*Amm. cycloides*, del quale il critico esaminò la figura senza consultare ad un tempo la descrizione, è di corpo globulare, con la bocca stiacciata, larga, semilunare, approssimantesi a quella dell'*Amm. simplus* da noi figurato nella Tavola VI.

La *forma, flessuosità e sottigliezza delle coste negli individui di età giovanile* figurati da Orbigny (Tav. CXX, fig. 3-4) non possono in verun modo essere paragonate a quelle della specie che conguagliai all'*Amm. Helius*, il quale essendo più grande dell' *Amm. cycloides* adulto, dovrebbe presentare tutti i caratteri espressi nelle due prime figure della Tavola sopracitata, se al *Cycloides* e non all' *Helius* si dovesse riferire. Pochi vorranno persuadersi che i quattro disegni che abbiamo citati rappresentino una medesima specie.

Ammonites simplus? Orbigny. — Op. pres. *Tav.* VI, *fig.* 7. *a. b.*

Conchiglia suborbiculare, globosa, rotondata sul dorso, composta d' anfratti molto convessi, più larghi che alti, l' ultimo de' quali abbraccia tutti gli altri. Bocca trasversale, depressa, avente la forma di mezza luna. Tramezze poco sinuose. Lobo dorsale grande quanto il lobo laterale superiore? Ombelico molto ristretto. Diametro tre centimetri.

Differenze ed Osservazioni.

I caratteri di questo fossile combinano con la descrizione applicata dall' Orbigny all'*Amm. simplus*, eccetto che nel numero e disposizione de' lobi che sporgono dai margini dell' apertura. Nel nostro esemplare, in luogo del lobo dorsale si vede una sella fiancheggiata da due lobi laterali superiori molto prominenti, de' quali non si ravvisa che un tenuissimo indizio nella figura d' Orbigny. Il lobo ventrale si protrae nel nostro molto innanzi e li due lobi laterali inferiori non la cedono in grandezza ai due superiori, lo che non si verifica nella citata figura, dove il lobo ventrale appare assai piccolo, e li due laterali mancano del tutto.

Orbigny ha creata la sua specie servendosi d' un individuo piuttosto malconcio nel quale i lobi dell' apertura erano in gran parte obliterati; quindi è probabile che incontrandosi in esemplari più conservati egli vi scorga nel contorno dell' apertura quel numero di lobi che abbiamo trovato nel nostro. Intanto io riferisco con dubbio il mio fossile all'*Amm. simplus*, non trovando negli Autori che ho alle mani verun disegno che meglio lo rappresenti di quello dato dall' Orbigny (Terr. crét. pag. 208. Tab. LX, fig. 7. 8.). Però la forma falcata della bocca e l' aspetto naviculare e globoso del nostro fossile sono caratteri che sembrano esclusivamente proprj dell'*Amm. simplus*.

Il Sig. de Zigno, che ad ogni nome di specie cretacea della calcaria ammonitica volle surrogarne uno di specie jurese, ha creduto di ravvisare ne' caratteri dell'*Amm. simplus* quelli dell'*Amm. sternalis* di de Buch. Vedrà in altro momento ciò che pensa il celeberrimo Prof. Bronn di Eidelberga intorno a questo suo giudizio.

Località.

Rinvenni questa specie nelle cave di calcaria ammonitica di Cesio Maggiore, e fu trovata eziandio nella calcaria rossa di Perugia nello Stato Pontificio. Non assicuro però che all'*Amm. simplus* si possano veramente attribuire li due esemplari che mi furono inviati da Perugia, per essere alquanto detriti e mancanti de' lobi. Nella Francia questa conchiglia esiste nel terreno neocomiano di Licons (Basses Alpes) dove la raccolse Duval convertita in ferro idratato.

Ammonites subfascicularis. Orbigny. — *Tav.* VII, *fig.* 1. *a. b.*

Conchiglia discoidea rotondata sul dorso, munita presso la sutura di coste alquanto distanti fra loro, molto grosse nella parte inferiore

dell' anfratto e surrogate verso la periferia da un gran numero di coste più sottili, le quali di distanza in distanza vengono interrotte da depressioni piuttosto profonde, assai più marcate sul dorso che sui lati. Spira composta di quattro giri visibili quasi per intero fino all'ombelico. Bocca oblunga, compressa sui lati, più alta che larga. Tramezze divise in tre rami disuguali, quello di mezzo più lungo degli altri. Diametro sei centimetri.

Differenze ed Osservazioni.

Questi caratteri combinano bene con quelli della specie descritta dall' Orbigny, colla sola differenza che un poco più grandi sono le strangolature dorsali nell' individuo figurato dal naturalista francese (Terr. crét. pag. 119. Tab. XXX, fig. 1. 2.), lo che potrebbe dipendere dall' età piuttosto che dalla particolare organizzazione dell' animale. Quello dell' Orbigny ha otto centimetri e mezzo di diametro. Un' altra differenza consiste negl' indizj di tramezze che si scorgono in uno de' lati dell' individuo che ho per le mani, de' quali Orbigny non vide orma alcuna nel suo esemplare. Anche per l'*Amm. subfascicularis* il de Zigno rimestò la falsa idea della non promiscuità delle specie facendo osservare che questo fossile neocomiano *anzi che essere nella calcaria ammonitica* si trova *nel biancone.*

Con questa osservazione mostra egli d'ignorare che dentro gli arnioni piuttosto grossi di focaja cinerea contenuti nella calcaria ammonitica del Cero e di Rosar nella valle Pantena, esistono Ammoniti ed Echini selcificati, spesso ricoperti d' un velo di calce carbonata gialliccia scintillante all' acciajo (Zool. fossile, pag. 219.). Gl' individui ch' io conservo dell'*Amm. subfascicularis* coperti come sono da un astuccio in apparenza calcario trassero il de Zigno nell' inganno di crederli trasmutati in pretto biancone.

Località.

Rinvenni questa specie nella calcaria ammonitica di Romagnano, presso la strada che conduce al Cero (Veronese). Essa è convertita in focaja gialliccia. Fu anche trovata nel terreno neocomiano di Caussol nella Francia.

Ammonites latidorsatus? Michelin. — *Tav.* VII, *fig.* 2. *a. b.*
Orb. Terr. crét. Tom. 1, pag. 270. Tab. LXXX, fig. 1. 2. 3. 4.

Conchiglia discoidea, turgida, interamente liscia, circondata da coste lineari, che dal dorso si prolungano sino alla metà superiore dell' anfratto senza piegarsi verso la parte anteriore della spira, come si osserva nella specie di Michelin. Dorso larghissimo, rotondato. Anfratti molto convessi, l' ultimo de' quali abbraccia tutti gli altri, per cui la spira è soltanto visibile nelle parti più prossime all' ombelico. Bocca più larga che alta, semilunare, rotondata anteriormente ed interrotta inferiormente dall' anfratto che in essa s' interna. Tramezze simmetriche da ciaschedun lato frastagliate in sei lobi formati di parti impari e di altrettante selle composte di parti pari? Diametro undici centimetri.

DIFFERENZE ED OSSERVAZIONI.

L' unico esemplare ch' io possiedo di questa conchiglia è talmente logoro che indarno vi si cercherebbono tutti i caratteri assegnati da Orbigny a questa specie. Sui lati più non rimane vestigio alcuno delle coste, e lo stesso debbo dire delle strie trasversali che pur sono così bene pronunziate nelli due primi disegni d' Orbigny, le quali, appartenendo al guscio, debbono di necessità mancare nel nostro individuo che presenta il solo modello. Non così si può dire delle coste o cordoni che appariscono distintissimi su tutta la lunghezza e spessore del dorso, lo che sarebbe sufficiente per considerare il mio fossile una specie diversa dall'*Amm. latidorsatus.* Difatto i modelli di quest' ultimo sono interamente lisci, e ciò perchè tanto le strie quanto le coste sono parti esclusivamente proprie del guscio (Orbigny), mentre in quello che descriviamo le coste sussistono, benchè sia destituito del guscio. Ne' confronti che ho fatti di questa conchiglia con le descrizioni e le figure di Michelin e di Orbigny riscontrai altre differenze che meritano di essere valutate. Nelle figure di questi autori le coste del dorso s' incurvano alquanto verso la parte anteriore della spira, laddove nel nostro esse corrono da un lato all' altro del dorso senza soffrire veruna curvatura, e la bocca che appare nelle figure più larga che alta, si mostra nel nostro più alta che larga.

ANNOTAZIONI.

Diceva ne' *Cenni* che ad onta dell' analogia scorta tra quest' Ammonite ed il *latidorsatus* propendeva nulla meno a crederlo diverso, e che non avrei preso a difendere la mia classificazione contro chi volesse risguardarlo come specie diversa. Ora che altri due esemplari ho potuto averne dalle cave di calcaria rossa di Malsesine nel Veronese, posso con piena sicurezza annunziare che questo Ammonite non si ragguaglia con alcuna delle specie cognite, e che a buon dritto credo di annunciarla come nuova sotto il nome di *Ammonites Zignii,* e ciò per le ragioni allegate ne' *Cenni* (pag. 20.).

LOCALITÀ.

Fossile nella calcaria ammonitica rossa del Roveretano? e nella calcaria grigia e rossa di Malsesine presso il lago di Garda.

Ammonites macilentus. Orbigny. — *Tav.* VII, *fig.* 3. *a. b. c.*
Orbigny. Terr. crét. Tom. 1, pag. 138. Tab. XLII, fig. 3. 4.

Conchiglia fortemente compressa, appianata sui lati, col dorso ottuso o leggermente rotondato. Coste flessuose che dalla sutura si dirigono verso la periferia e si biforcano prima d' attraversare il dorso. Spira composta di quattro giri affatto piani, visibili in tutta la circonvoluzione fino all' ombelico. Bocca compressa, ottusa nell' apice e provveduta sui lati d' un' appendice di cui non resta che un avanzo. Tramezze ignote. Diametro cinque centimetri.

Annotazioni.

Questa singolare conchiglia non ha che due millimetri o poco più di grossezza. Le coste trasversali piegano verso la parte anteriore della spira, e nel terzo superiore dell'anfratto si dividono in due rami, come si ravvisa nella figura citata da Orbigny sotto questa specie. Ho sott'occhio due frammenti di spira, che sembrano appartenere all'*Amm. macilentus*, i quali hanno la grossezza di cinque millimetri, e sono adesi alla roccia, come si scorge nel disegno che esibisco del più grande (fig. 3. *c.*). Noto inoltre che il biancone a cui sono attaccati questi frammenti contiene nodi di focaja grigia, uno de' quali serve di sostegno ad una parte della spira.

Località.

Questa specie più che mai osservabile per la sua forma schiacciata, esiste nel biancone di S. Ambrogio nel Veronese ed in quello d' Enego ne' Sette Comuni. Nella Francia il Sig. Requien ne ha trovato a Septime, non molto lungi da Marsiglia. Nella collezione dell' Ab. Caregnato non ho veduto Ammoniti da potersi ascrivere al *macilentus*, e sono quindi nel dubbio che l' individuo ricordato dal Signore de Zigno sia anch'esso munito di carena, e perciò ben diverso dal *macilentus* che ha il dorso rotondato.

Qualcuno degl' individui che nella Zoologia fossile conguagliai con dubbiezza all'*Amm. planulatus* di Schlotheim (pag. 207) appartengono alla specie della quale si tratta.

Ammonites Astierianus. Orbigny. — *Tav.* VII, *fig.* 1. *a. b.*
Orbigny. Terr. crét. Tom. 1, pag. 115. Tab. XXVIII.

Conchiglia piuttosto turgida, col dorso rotondato, munita presso la sutura di coste tubercoliformi molto brevi, da ciascuna delle quali parte un fascetto composto di cinque o sei coste che si allargano a guisa di ventaglio, e vanno ad attraversare il dorso. Spira composta di giri subcilindrici, l' ultimo de' quali forma quasi la metà dell' altezza della conchiglia. Bocca ovale, superiormente rotondata, dietro cui v' ha un solco profondo che taglia obliquamente le coste, e si piega verso la parte superiore dell' apertura. Tramezze ignote. Diametro otto centimetri.

Differenze ed Osservazioni.

Questa conchiglia corrisponde molto bene alla citata figura di Orbigny, e tutti gli esemplari da me veduti conservano presso a poco le stesse dimensioni. Essa ha qualche somiglianza coll'*Amm. Gazolae*, dal quale diversifica perchè in questo gli anfratti sono meno convessi, e le coste appajono digitate.

Località.

L'*Amm. Astierianus* si rinviene con frequenza nel biancone d' Enego ne' Sette Comuni, ove sempre è accompagnato dalla focaja che d' ordinario occupa

il centro della spira. Molti esemplari n' ho io veduti nel 1822 nella collezione del fu Ab. Caregnato Parroco d'Enego che la redò per testamento al Seminario di Padova.

Nella Francia questa specie fu trovata nel terreno neocomiano di Escragnoble, dipartimento del Varo.

Ammonites quadrisulcatus. Orbigny. — *Tav.* VIII, *fig.* 2. *a. b.*
Orbigny. Terr. crét. Tom. 1, pag. 151. Tab. XLIX, fig. 1 - 3.

Conchiglia suborbiculare, leggermente compressa sui lati, col dorso rotondato, fregiata trasversalmente di quattro cingoli rilevati. Spira composta di cinque giri subcilindrici, al tutto discoperti. Bocca quasi circolare, non occupata inferiormente dall' anfratto che sotto vi passa. Tramezze ignote. Diametro quattro centimetri e mezzo.

DIFFERENZE ED OSSERVAZIONI.

La presenza di cingoli in luogo de' solchi osservati da Orbigny può dipendere dallo stato diverso di conservazione nel quale si trova la conchiglia. Orbigny considerò questa specie sopra individui mancanti del guscio, convertiti in ferro idratato, mentre quello che descriviamo conserva gran parte del guscio, ch' è liscio, sottile e infarcito d' una marna cinerea, macchiata in giallo dall' ossido di ferro. Non mi sarei arrischiato di ragguagliare il mio fossile all'*Amm. quadrisulcatus* se non avessi sotto gli occhi un individuo privo del guscio, sul quale invece di cingoli si vedono i quattro solchi avvertiti dall' Orbigny in questa specie. Sul primo anfratto del modello ho scorto coll' ajuto della lente le digitazioni del lobo laterale superiore, senza però che si possa discernere bene le parti in cui esse si dividono.

LOCALITÀ.

Fossile nel biancone di Enego e nella calcaria rossa ammonitica di Salazaro nell' alto Veronese. Gli esemplari di quest' ultima località non conservano indizio alcuno del guscio, e sono d' altronde piuttosto malconci per poterli adeguare senza dubbiezze all'*Amm. quadrisulcatus.* Questo politalamo si ripete nella calcaria bianca di monte *Vignole* presso Teolo negli Euganei, ov'ebbi a trovarlo unitamente al *Belemnites bipartitus* di cui ho parlato superiormente (1). Nella

(1) Il Padre Terzi, Monaco benedettino, racconta di aver escavato dal monte Vignole *non lungi dal casamento rustico che sta sulla cima trecento dodici corna d' ammone, larghi dalle quattro linee circa sino alle tre once e mezzo, per lo più striate* (Opuscoli scelti di Milano, Tom. XXI, pag. 329, anno 1801.). Questo benemerito claustrale, già Tesoriere del Monastero di Praglia ne' monti Euganei, pubblicava nel 1791 una Memoria sulle varie qualità di calcaria solida che gli fu dato raccogliere ne' monti Padovani, le quali tagliate in quadro e polite, gli servirono di scorta per sostenere che in que' monti esistono marmi non inferiori a quelli de' monti Veronesi che ne sono ridondanti. Il Terzi

Francia quest' Ammonite è caratteristico del terreno neocomiano, nel quale li Signori Duval, Emeric e Jennot lo hanno rinvenuto in compagnia del Belemnite suddetto.

Annotazioni.

Abbiamo asserito che nel biancone dei Sarmazzi esiste l'*Amm. nodulosus* rigorosamente simile all' individuo per noi trovato non ha guari nella calcaria cinerea di *Fontana Fredda*. Ora possiamo assicurare che oltre il *Belemnites dilatatus* un' altra specie cretacea di questo genere si è incontrata in quella roccia, di cui darò a miglior uopo la descrizione, lo che dimostra vieppiù l'analogia zoologica del biancone de' Sarmazzi e di Vignole con la calcaria di Fontana Fredda, indebitamente qualificata come una roccia jurassica.

I fatti principali che spalleggiano l'opinione della dipendenza del biancone dalla calcaria ammonitica sono stati brevemente dichiarati in altro luogo, e quì trovo soltanto a muovere alcuni dubbj sulla proclamata esistenza della calcaria juresc a Fontana Fredda, che per quanto a me pare spetta essa stessa alla creta tanto abbondante ne' colli Euganei. Il carattere principale, quello che toglie ogni dubbio che potesse insorgere intorno alla sua Geognosia, è il trovarsi fuori dell' asse centrale delle alpi juresi, per cui invece di apparire divisa dai consueti tramezzi arenacei che il Jura separano dalla creta, invece di presentare l' aspetto oolitico o dolomitico passa gradatamente alla creta con piromaco, il che annunzia essere i membri visibili di quel terreno d' un' origine contemporanea. Nè giova dire che un movimento sotterraneo prodotto da eruzioni incipienti od *abortive* abbia spinto su la calcaria jurese, senza avere avuto la possa di sollevare ad un tempo fino alla superficie la roccia pirica, perciocchè la trachite potè ovunque aprirsi un varco e attraversare con le sue dike le rocce di sedimento che preesistevano alla sua comparsa.

La calcaria cinerea di Fontana Fredda si rompe in grosse scheggie per lo più pellucide negli spigoli, talvolta scintillanti all' acciajo, più spesso fosforescenti, e cotta che sia nelle fornaci somministra una calce viva molto magra in causa della silice e dell' allumina che contiene. Questi caratteri sono generalmente costanti nel biancone Euganeo modificato dalle trachiti, e così costanti che servono di ottima scorta per distinguere quello che meglio si presta a fornire buona calce. La calcaria di Fontana Fredda si scorge in altri luoghi degli

---

nelle frequenti e quasi direi diuturne sue corse negli Euganei non lasciò inosservate le rocce piriche, nè le altre molte curiosità naturali che contribuire potevano a dilucidare la geognosia di quel classico suolo, per cui la copia delle trachiti, dei basalti, delle pudinghe e delle brecciole vulcaniche da esso raccolte riuscì, se non iscelta, certo molto copiosa. Però nella collezione del Terzi, ora posseduta dagli eredi del ch. Conte Corniani di Venezia, le conchiglie fossili sono assai scarse, forse perchè il collettore aveale ad altri precedentemente vendute. Le rimanenti sono adesso di mia proprietà.

Euganei. Nel sito chiamato i *Romitoj* (al nord di Orbezzo in Val San Zibio) essa alterna col biancone e con la calcaria rossa, com' ebbi a verificare in una delle varie escursioni fatte in que' monti in compagnia del fu Conte da Rio, col quale dichiaro in gran parte comune quel poco di merito che per avventura si vorrà concedere alle osservazioni che sarò per pubblicare sopra gli Euganei. Comecchè non sia abbastanza sicuro, pure ho gran sospetto che anche all' est di M. Gallo si ripetano le stesse alternative di strati gialli e cinerei, i quali se male non ho osservato appajono selcificati dalla lava, mentre altrove (Lovara, Palestre, ecc.) la medesima calcaria si mostrerebbe intercisa di sublimazioni trachitiche.

Ammonites Juilleti. Orbigny. — *Tav.* VIII, *fig.* 3. *a. b. c.*

Orbigny. Terr. crét. Tom. 1, pag. 156 - 364. Tab. L, fig. 1. 2. e Tab. III, fig. 3.

Conchiglia suborbiculare, leggermente compressa sui lati, a contorno rotondato, e liscia in ogni sua parte. Spira discoperta, composta di giri cilindrici, l' ultimo de' quali ha dodici millimetri di larghezza. Bocca circolare, non interrotta dall' anfratto che le è inferiore. Tramezze oscuramente frastagliate. Diametro tre centimetri.

DIFFERENZE ED OSSERVAZIONI.

Questo politalamo non conserva alcun vestigio del guscio, e per conseguenza mostra di avere più rapporti di somiglianza col modello interno disegnato da Orbigny nella Tavola L di quello che abbia con la figura 3 della Tavola III dello stesso Autore, che rappresenta la stessa specie provveduta di guscio. L'originale di questa figura è rigato trasversalmente da rughe salienti alquanto oblique, fra le quali ve ne sono alcune più grosse delle altre; dal che si vede quanto diverso debba apparire il nostro fossile messo che sia al confronto con la detta figura. Esso è inoltre d'un volume maggiore, avendo cinque centimetri di diametro.

LOCALITÀ.

Fossile nel biancone di Ceré, presso la caverna ossifera, e nella calcaria rossa ammonitica di Mazzurega nel Veronese. L' esemplare tratto da quest' ultima località ha gli anfratti un poco più turgidi, il secondo de' quali, essendo rotto, lascia vedere i solchi flessuosi delle tramezze (fig. 3. *c.*). Nella Francia fu trovato nelle marne neocomiane di Eup trasmutato in ferro idratato, ed anche nel terreno neocomiano inferiore di Blioux in ferro solforato.

ANNOTAZIONI.

Conviene il de Zigno che gli *Amm. quadrisulcatus* e *Juilleti* del biancone abbiano tutta la congruenza con le figure e le descrizioni di Orbigny, ma degni non crede dello stesso favore gli esemplari della calcaria ammonitica che stanno a lato de' primi, che anzi li dichiara informi ed indeterminabili. Dissi anch' io

che quelle spoglie non sono in tale grado di conservazione da poterle con sicurezza determinare, ma bene guardando col magistero della lente la spira di ognuna, tosto si rileva non essere elleno così detrite come afferma il censore. Quanto più affranto e irreconoscibile non apparisce il fossile che servì ad altri per creare una nuova specie del genere *Crioceras* e che fu poscia definito con una frase assai lesta nel Bollettino della Società geologica di Parigi! (Séance du 21 Avril 1845.).

Ammonites semistriatus. Orbigny. — *Tav.* VIII, *fig.* 4. *a. b.*
Orbigny. Terr. crét. Tom. 1, pag. 136. Tab. XLI, fig. 3. 4.

Conchiglia discoidea, rigonfiata debolmente sui lati col dorso rotondato, liscia nella metà interna dell' anfratto e munita di leggerissime strie nella metà esterna, non sempre discernibili ad occhio nudo. Ombelico molto ristretto, coi margini inclinati verso il centro. Giri della spira abbracciati quasi interamente dall' ultimo anfratto, ch' è luughissimo e forma oltre la metà dell' altezza della conchiglia. Bocca allungata, compressa, coll' apice rotondato. Tramezze ignote. Diametro quattro centimetri.

Differenze ed Osservazioni.

Non era sulle prime abbastanza convinto che il mio fossile si potesse ragguagliare all'*Amm. semistriatus*, per la mancanza delle strie trasversali molto spesse e sottili, che pur si veggono nella figura di Orbigny, ma mi sono poscia avveduto che gli esemplari d' aspetto meno terroso lasciano scorgere coll' ajuto della lente un' infinità di serie capillari, che dal dorso si allungano fin presso la metà esterna dell' anfratto.

Località.

Fossile nel biancone de' Sette Comuni ed in quello di Premolano nella valle del Brenta. Non si trova che sotto la forma di modelli interni, e credo che a questa specie appartenga la maggior parte degli esemplari raccolti in numero strabocchevole dal P. Terzi nel monte Vignole di cui ho fatto cenno precedentemente. Nella Francia l'*Amm. semistriatus* esiste nel terreno neocomiano inferiore, dove lo ha raccolto il Sig. Duval. Alcuni de' Geologi italiani riferivano questa specie all'*Amm. planulatus*, non per altro motivo che per essere il più compresso degli Ammoniti dopo il *macilentus*.

Ammonites bidichotomus. Leymerie. — *Tav.* VIII, fig. 5; e *Tav.* X, *fig.* 1.
Orbigny. Terr. crét. Tom. 1, pag. 190. Tab. LVII, fig. 3. 4.

Conchiglia convessa, munita di coste trasversali piegate verso l'estremità anteriore, le quali prendono principio da una serie di piccoli nodi posti nel contorno dell' ombelico e ben presto si dividono in due o tre altre coste. Quest' ultime si biforcano nuovamente prima di attraversare il dorso, dal che ne viene che, essendo venti nel punto dal quale

partono, diventano cinquantanove presso la metà dell' altezza dell' anfratto, e cento dieciotto sul contorno dorsale. Bocca ovale, anteriormente assottigliata, divisa inferiormente dall' anfratto che dentro vi passa. Tramezze ignote. Diametro degli adulti trentasette centimetri.

DIFFERENZE ED OSSERVAZIONI.

Questa conchiglia non è mai così bene conservata da potervi rilevare nettamente il complesso de' caratteri che la distinguono dalle altre specie congeneri. Nella figura 5 Tav. VIII ho rappresentato un grosso pezzo dell' ultimo anfratto sul quale non può insorgere dubbio che non sia simile in tutto e per tutto a quello disegnato da Orbigny; e nella figura 1 della Tavola X diedi l' imagine d' un individuo intero attaccato sulla roccia, il quale manca presso la bocca d' una porzione del giro destinato ad abbracciare inferiormente l' anfratto ch' entra nell' apertura.

La grandezza delle figure è affatto conforme a quella degli originali, benchè si possa trovarne di volume molto maggiore. Un' esemplare dell'*Amm. bidichotomus* offerto in dono dal fu Ab. Carignato al mio amico il Conte Corniani, attinge il diametro di trentasette centimetri. Di questa specie esistevano ancora parecchi esemplari nella collezione Carignato quando fui a vederla nel 1834 in compagnia del Professore di Fisica Ab. Chinaglia, che vi era il Direttore e Custode.

LOCALITÀ.

Fossile nel biancone di Vignole presso Teolo ed in quello d' Enego ne' Sette Comuni. Nella Francia esiste nel terreno neocomiano.

Ammonites bicurvatus. Michelin. — *Tav.* IX, *fig.* 3. *a. b.*
Orbigny. Terr. crét. Tom. 1, pag. 286. Tab. LXXXIV.

Conchiglia suborbiculare, compressa, assottigliata sul dorso, fornita di coste trasversali che spiccano da' contorni dell' ombelico, e ad angolo obliquo si prolungano sino ad un terzo della larghezza della spira, poi s' incurvano nel davanti, facendosi più larghe, indi si ripiegono all' indietro e giunte presso la carena spariscono del tutto. Bocca compressa che alla regione del lobo dorsale finisce in angolo acuto. Diametro 9 centimetri.

DIFFERENZE ED OSSERVAZIONI.

Nella forma de' giri, nella figura della bocca, e nel margine acuto della carena dorsale somiglia all'*Amm. nisus* di Orbigny, ma differisce da questo ch'è liscio, in causa delle coste oblique e serpeggianti che si osservano in quello che descriviamo. De' due esemplari malconci che possiedo nessuno conserva segni manifesti de' sette lobi assegnati da Orbigny all'*Amm. bicurvatus*, ma soltanto si scorge in qualche punto de' lati della spira gl' indizj di alcune delle digitazioni de' lobi medesimi. Il nostro fossile è abbastanza bene rappresentato e descritto dall'Orbigny, ma non egualmente gli corrispondono il disegno e la frase

specifica di Michelin, per essersi questo Autore servito d'un giovane individuo in cui non ancora si erano sviluppati i caratteri proprj degli adulti.

Località.

Ho trovato questa conchiglia nella calcaria ammonitica di Cesio Maggiore, tra Belluno e Feltre, ed un frammento riferibile alla specie medesima mi fu presentato dall'esimio Signor Zilli, ingegnere in capo che fu della provincia di Belluno. Orbigny assicura che l'*Amm. bicurvatus* si accompagna alle specie finora trovate soltanto nel Gault della Francia.

Annotazioni.

Chi voleva escludere dalla lista de'fossili cretacei del Veneto le specie tutte della calcaria ammonitica, anche a costo di dare in ciampanelle, dichiarò meglio attagliarsi il mio fossile alla figura applicata da Orbigny all'*Amm. Murchisonae* di Sowerby, che all'altra dell'*Amm. bicurvatus*. L'esemplare che ho riferito a quest'ultima specie manca affatto d'ogni qualunque traccia di carena, nè le sue coste presentano nel bel mezzo de' lati dell'anfratto quella forte inflessione che si ammira nel disegno attribuito dall'Orbigny all'*Amm. Murchisonae*. Col mio fossile alla mano e con la figura dell'*Amm. Murchisonae* sotto gli occhi ognuno si accorgerebbe che a torto e non a dritto si è voluto trovare un'analogia tra l'uno e l'altra, anche senza il bisogno di ricorrere alle descrizioni.

Ammonites Bouchardianus? Orbigny. — *Tav.* IX, *fig.* 4. *a. b.*
Orbigny. Terr. crét. Tom. 1, pag. 300. Tab. LXXXVIII, fig. 6. 8.

Conchiglia discoidea, subcompressa, munita di coste trasversali, che nella parte inferiore de' giri si biforcano e nella metà superiore de'medesimi ricevono una forte inflessione all' indietro per ripiegarsi poscia verso la parte anteriore. Sul dorso ch'è stretto si eleva una carena sottile, affilata all' apice. Bocca più lunga che larga: lobo dorsale appena discernibile: i laterali tanto superiori che inferiori sono molto apparenti, così pure il lobo ventrale e li due piccoli che gli stanno ai lati. Diametro cinque centimetri.

Differenze ed Osservazioni.

Nel numero, grandezza e forma de' giri questa conchiglia corrisponde completamente alla figura delineata da Orbigny, ma sulla regione dorsale della bocca non si vede sporgere quella specie di listello o linguetta ch'è un prolungamento della carena, di cui Orbigny ha osservato le tracce nell' individuo che tolse a descrivere. Nell' esemplare che ho alle mani si è obliterata la linguetta di cui si favella e manca altresì la porzione di carena più prossima alla bocca. Fitton nel 1836 applicò a questa specie il nome di *Amm. cristatus*, tutto che due Ammoniti di specie diverse avessero ricevuto anni prima la stessa denominazione da Deluc e da Sowerby. Orbigny per riparare a questo inconveniente

ha stimato di sopprimere l' epiteto *cristatus* e di sostituirvi l' altro *Bouchardianus* in onore di Bouchard-Chantereaux ben noto naturalista di Boulogne-sur-mer.

LOCALITÀ.

Rinvenni una sol volta questa specie nella marna arenacea interposta fra strato e strato della calcaria ammonitica grigia di Olantreghe, distretto di Castel-Lavazzo, dove alquanti anni prima distaccai parecchi denti del *Ptychodus latissimus* di Agassiz, tanto frequenti nelle rocce analoghe di Podenzoi, di Codissago e di altri luoghi del nominato distretto. Li Signori Orbigny, d'Archiac e Bouchard-Chantereaux raccolsero questa specie nelle marne del Gault di Vissaut, presso Boulogne.

ANNOTAZIONI.

La critica fatta a questa specie è dello stesso tenore delle precedenti, cioè non appoggiata ad osservazioni desunte da esami preventivamente instituiti tra le figure e descrizioni di Orbigny e gli originali che presi a descrivere. Vuole il critico che il mio fossile debba appartenere all'*Amm. Eduardianus* piuttosto che al *Bouchardianus*, a cui certo non può essere ragguagliato per più ragioni, e principalmente perchè le coste del primo non si congiungono nella parte inferiore della spira per formare fascetti binarj, come si ammira nell'*Amm. Bouchardianus.*

Ammonites Ambrosianus. Nob. — *Tav.* XI, *fig.* 1. *a. b. c.*

Testa discoidea, subcompressa, anfractibus crassiusculis, transversim costatis; costis 50 elevatis, externe bifurcatis, vel trifurcatis, rarissime alternantibus; dorso convexo, apertura subovata.

Conchiglia lievemente compressa, composta di cinque anfratti, l'ultimo de' quali è fornito di una cinquantina di coste dritte, che prima di attingere la regione dorsale si dividono in tre rami, e tutte insieme attraversano il dorso. Le coste maggiori più prossime all'apertura si allargano in placbe semilunari, che si biforcano anch' esse sul dorso. Bocca alta tre centimetri, larga due e mezzo. Tramezze ignote. Diametro otto centimetri e mezzo.

DIFFERENZE ED OSSERVAZIONI.

Non è che l'*Amm. Holandrei* a cui la nostra specie si assomiglia. Essa però è alquanto diversa; li suoi anfratti sono più larghi, le coste meno numerose, prive di flessuosità, tranne le ultime più vicine all' apertura che appajono più larghe e molto incurvate. Codeste si biforcano prima di attraversare il dorso, come si ammira nell'*Amm. Holandrei* di Orbigny, ma nell' esemplare ch' io possiedo alcune delle coste si dividono in tre rami che vanno a congiungersi a due coste del lato opposto dell' anfratto, tal che, se da uno de' lati la costa appare triforcata quella che gli corrisponde nell'altro lato dell'anfratto medesimo comparisce bifida (fig. 1. *c.*). Se l'*Amm. Holandrei* è la specie che più d'ogni

altra si avvicina alla nostra, e se da' confronti instituiti fra questi due fossili emersero le differenze che abbiamo superiormente avvertite, io credo che il mio fossile sia inedito, e per ciò stesso gli ho applicato un epiteto tolto dal nome del paese in cui fu per la prima volta trovato.

Località.

Fossile nel biancone di S. Ambrogio nel Veronese.

Ammonites annulatus. Sowerby. — *Tav.* XI, *fig.* 2. *a. b.*
Orbigny. Terr. jurass. pag. 265. Tab. LXXVI, fig. 1. 2.

Conchiglia discoidea, più compressa della precedente, fornita trasversalmente di coste dritte e prominenti. Quelle dell' anfratto maggiore sono nel numero di cinquanta circa, cinque o sei delle quali sono semplici, mentre tutte le altre si biforcano nella parte più esterna dell'anfratto medesimo, prima d' attraversare il dorso ch' è rotondato. Le coste semplici che a petto delle biforcate sono assai scarse nell' ultimo anfratto, veggonsi in numero maggiore nel secondo giro e più frequenti apparirebbero ne' giri più interni se in questa parte la conchiglia non fosse mancante della porzione convessa della spira. Anfratti rotondati sul dorso; bocca ovale che abbraccja inferiormente una piccola parte del secondo giro. Tramezze ignote. Diametro otto centimetri e mezzo.

Differenze ed Osservazioni.

Nel nostro esemplare le coste semplici non sono appajate due a due ma solitarie e compariscono più sottili delle bifide. Orbigny parla anch' egli dell' unità delle coste semplici, benchè nella figura per lui allegata si possa contarne due su tutta la circonvoluzione dell' ultimo anfratto. Sowerby ammette invece che le coste semplici sieno in numero maggiore delle bifide (pag. 273), ma valga il vero, nel disegno esibito da questo Naturalista non seppi ravvisare neppure una sola costa bifida (Tab. CCXXII.).

A torto alcuni hanno accomunato a questa specie l'*Amm. annulatus* di Schlotheim (Petref. 1, 62, 11, 59. Tab. IX, fig. *b*), il quale mancando di coste semplici, meglio potrebbe figurare nella sinonimia dell'*Amm. communis* di Sowerby, col quale mostra di avere una manifesta affinità.

Non posso specificare i distintivi degli anfratti più vicini all'ombelico perchè questa parte, come dissi, è mutilata nel mio esemplare.

Località.

Fossile nella calcaria rossa ammonitica di Salazaro nell' alto Veronese e forse anche nel biancone de' Sette Comuni, quello stesso che contiene il *Belemnites dilatatus,* di cui parlo nelle osservazioni aggiunte alla descrizione di questa specie.

Ammonites biplex. Sowerby. — *Tav.* XI, *fig.* 3. *a. b.*
Sowerby. Miner. conchol. pag. 332. Tab. CCXCIII, fig. 1. 2.

Conchiglia discoidea, provveduta di cinque giri leggermente compressi sui lati, muniti di coste dritte che si biforcano prima d'attraversare il dorso, il quale è rotondato. Bocca più alta che larga. Tramezze, per quanto si può scorgere, composte di tre lobi e di tre selle per ciaschedun lato divise in parti impari? Diametro degli individui giovani centimetri dieci, degli adulti centimetri diciannove.

DIFFERENZE ED OSSERVAZIONI.

Tanto le coste de' lati quanto le biforcazioni del dorso sono regolarissime nell' esemplare di cui offro la figura. Quelle dell' ultimo anfratto conservano la stessa grossezza, e sono egualmente distanti fra loro, ad eccezione delle quattro più prossime alla bocca, le quali negli esemplari più grandi appajono separate da intervalli alquanto maggiori. Dei tre individui che posseggo ho fatto disegnare il più giovane, perchè in esso meglio che negli altri si riconoscono i caratteri attribuiti da Sowerby a questa specie. L'*Amm. biplex* fu ottimamente rappresentato nella Tav. XXV dell' *Historia lapidum* del Langius pubblicata in Venezia nel 1708, 4°. Bruguiere si valse di quel disegno per applicarlo all' *Amm. bifidus* descritto nell' Enciclopedia metodica (Art. *Ammonites*, n°. 20.).

LOCALITÀ.

Questo politalamo non è raro in Italia e parecchi esemplari ne ho veduto ne' musei di Bologna e di Verona. Gl' individui ch' io possiedo provengono dalla calcaria rossa di M. Salazaro nell' alto Veronese tante volte nominata. Bruguiere assicura di averne rinvenuto alcuni nel Vivarese provveduti di sei giri e del diametro di quindici pollici; e Sowerby parla di quelli che si sono trovati nella calcaria Portlandiana, la quale, com' è noto, viene immediatamente ricoperta dal terreno della creta.

ANNOTAZIONI.

Ho sott' occhio quattro individui d' una specie particolare d' Ammonite le coste dei quali si biforcano a pochissima distanza dal dorso e li rami di biforcazione s' incurvano alquanto prima d' elevarsi verso la periferia dell' ultimo anfratto. Io non mi sono ancora occupato della descrizione di questa specie, ma piacemi ricordarla per assicurare che due degli individui suddetti sono stati scavati nella calcaria ammonitica del Veronese; uno nel biancone ed un altro nella calcaria bigia di Lavazzo portando ciascuno i caratteri mineralogici della roccia in cui erano nicchiati.

Crioceras Duvalii. Leveillé. — *Tav*. X, *fig*. 2.

Orbigny. Terr. crét. Tom. 1, pag. 459. Tab. CXIII.

Conchiglia compressa, fornita, a norma delle età, di dieci o quindici coste grosse, dritte, lievemente inclinate verso la parte anteriore della spira. Esse circondano la totalità dell' anfratto, e sul dorso si prolungano in due aculei se la conchiglia è intera, ovvero presentano

soltanto due tubercoli se manca del guscio. Fra una costa e l' altra havvi una serie di coste minori, il cui numero varia dalle sei alle dieci, le quali circondano anch'esse l' anfratto, senza produrre le spine o tubercoli che si veggono sopra le coste maggiori. Queste coste intermedie sono semplici, perciocchè percorrono l' anfratto in tutta la sua grossezza senza bipartirsi e senza congiungersi alle coste vicine. Dorso rotondato, avente di spazio in ispazio due punte che spiccano dalle coste dorsali maggiori. Spira composta di quattro giri disgiunti fra di loro. Bocca compressa, ovale, ornata superiormente di due aculei e talvolta di due tubercoli. Tramezze ignote. Diametro degli individui giovani otto centimetri, degli adulti venticinque.

Differenze ed Osservazioni.

Orbigny dice che il numero delle coste intermedie in questa conchiglia è da dieci a quindici, ma in uno dei cinque esemplari che ho sotto gli occhi sono diciannove e in un altro dodici. Io tengo per fermo che questi svarj derivino dalla diversa età degl' individui, giacchè negli altri caratteri tutti cinque combinano con la frase applicata da Orbigny a questa specie, ad eccezione di quelli delle tramezze che si sono obliterati. Deggio avvertire che li citati esemplari aderiscono con una delle loro facce alla roccia, e conservano esattamente le punte, benchè privi del guscio.

Località.

Fossile nel biancone di Vignole negli Euganei ed in quello di Como sotto le laste, ne' Sette Comuni. Nella Francia il *Crioceras Duvalii* fu trovato reiterate volte nel terreno neocomiano.

Crioceras Villiersianus. Orbigny. — *Tav.* X, *fig.* 3.
Orbigny. Terr. crét. Tom. 1, pag. 462. Tab. CXIV, fig. 1. 2.

Conchiglia compressa, provveduta in ogni giro di sei o sette coste dritte che circondano interamente l' anfratto, ciascuna delle quali è munita sul dorso di due spine acute. Negli spazj tra costa e costa v' ha una ventina di strie o solcature che in parte si biforcano prima di accavallarsi sul dorso ch' è rotondato. Spira composta di tre giri disgiunti e fortemente compressi. Bocca ovale, armata di due punte sul davanti? Tramezze ignote. Diametro degli individui giovani otto centimetri, degli adulti dodici.

Differenze ed Osservazioni.

Gli esemplari di cui offro il disegno si uniformano abbastanza alla descrizione ed alla figura di Orbigny, ma uno solo presenta gli aculei dorsali, mentre negli altri queste parti si sono obliterate. Gli aculei e le coste, da cui essi procedono hanno una tinta giallo-oscura, laddove tutto il resto della conchiglia conserva il colore della roccia nella quale è inserita. Ciò si osserva anco ne' Crioceri della specie precedente. Nel secondo giro dell'esemplare che ho figurato

si vede la parte interna dell'anfratto fornita essa pure di coste aculeate e delle consuete striature secondarie impresse negli spazj circoscritti dalle coste medesime.

Nel *Crioceras Villiersianus* alcune delle strie intermedie si suddividono in vicinanza del dorso e si fanno ondeggianti, carattere non avvertito dall'Orbigny nella descrizione, ma che pure emerge chiarissimo nella figura per lui data di questa specie.

LOCALITÀ.

Fossile nel biancone di Arsié presso il Cismone, e nella calcaria ammonitica grigia di Lavazzo nel Bellunese. Nella Francia esiste probabilmente nel terreno neocomiano inferiore (Orbigny.) .

Crioceras Astierianus? Orbigny. — *Tav.* X, *fig.* 4.

Orbigny. Terr. crét. Tom. 1, pag. 468. Tab. CXLV, fig. 3-5.

Conchiglia convessa, segnata trasversalmente da strie capillari, vicinissime tra loro, che passano sul dorso. Anfratti cilindrici ripiegati in una spira angusta composta di tre circonvoluzioni molto distanti l'una dall'altra. Bocca circolare? Tramezze ignote.

DIFFERENZE.

Di questo *Crioceras* non ho presente che la sola impressione fatta dal guscio sopra la roccia, la quale sembra mancare d'una porzione dell'ultimo anfratto e quindi della bocca. Nella cavità cilindrica di questa impressione si veggono nettamente le strie lasciate dal modello interno, tuttochè in questa parte la roccia appaja più oscura e d'aspetto terroso.

LOCALITÀ.

Fossile nella calcaria di Vignole negli Euganei, dove fu trovato dallo studiosissimo Sig. Dottore Doderlein, già assistente alla cattedra di Storia naturale presso l'Imp. R. Università di Padova, ora Professore di Zoologia e Mineralogia nell'Università di Modena (1) .

---

(1) Non posso far menzione di questo infaticabile Naturalista senza ricordare ad un tempo i lunghi e fruttuosi studj da esso fatti nelle alpi Venete e Tirolesi. Nel 1834 percorse il Tirolo, non già a passi di micromega, ma stanziando intere settimane ne' punti che meglio si prestavano alle sue ricerche geologiche, a quelle particolarmente che concernono gli effetti prodotti dalle rocce eruttive sopra le rocce di sedimento. Allestì una copiosa Collezione geognostica del Tirolo accompagnata da un ragionato Catalogo per donarla al Gabinetto di Storia naturale annesso all'Università di Padova. Negli anni successivi fino al 1840 visitò ben quattro volte le alpi Venete coll'intendimento di considerare li diversi terreni di sedimento sotto il punto di vista della Paleontologia, dando saggi e presagi della sua perizia e capacità così nella Geognosia come nella Scienza de' petrefatti. Frutto di lunghe e ripetute escursioni da esso fatte ne' monti Euganei si è la Collezione geognostica ostensibile nel Gabinetto della nostra Università. Il Sig. Doderlein si occupa presentemente con indefessa alacrità della Geognosia paleozoica degli Apennini per confrontarla a quella delle alpi Venete da lui preventivamente esaminate.

Osservazioni.

Le prime figure di Crioceri si trovano nelle opere di due Autori Italiani, in cui altri meno si avviserebbe di rintracciarle, cioè nel *Museo Moscardo* impresso in Padova nel 1656 (pag. 175), e nella *Metallotheca* del Mercati pubblicata per cura del Lancisio l' anno 1719 (pag. 39 dell' Appendice.). Però nessuno de' Naturalisti moderni diresse i proprj studj sopra questi fossili, e solamente in questi ultimi anni venne al Signor Leveillé il bel pensiero di occuparsene (Mem. de la Soc. géol. T. II, pag. 313. Tab. XXV, fig. 1.). L'esempio di Leveillé fu seguitato dal Signore de Zigno, il quale in una sua Memoria partecipa d' avere rinvenuto nella calcaria Euganea due specie di Crioceri cioè il *Crioceras Emerici* ed il *Crioceras da Rii*, di cui esibisce le descrizioni accompagnate da figure. In questa stessa Memoria pubblicata nel 1845 negli Atti dell'Accademia di Padova dà la lista de' fossili che annidano nel biancone ed assicura *che la maggior parte di essi è comune alla sottoposta calcaria rossa.* Alle osservazioni che il Sig. de Zigno pubblicava ho stimato di aggiungere le tre specie di *Crioceras* trovate nella zona cretacea delle province nostre, di cui ho data la descrizione.

Ancyloceras nodosus. Nob. — *Tav.* IX, *fig.* 1. *a. b. c.*

Anc. testa transversim aequaliter costuta; costis ad periphaeriam tuberculatis; dorso rotundato, apertura oblonga, compressa.

Conchiglia multiloculare avente la forma di bastone curvato superiormente. Coste trasversali molto grosse, interrotte sul ventre e sul dorso, e provvedute d' un solo tubercolo. Apertura elittica, a nodi e selle non discernibili. Parte inferiore mutilata.

Differenze ed Osservazioni.

A prima giunta mostra di avere qualche analogia coll'*Ancyloceras varians* di Orbigny, ma bene esaminando si scorge che presenta alcuni caratteri che gli sono peculiari. Nella specie di Orbigny ciascuna costa è provveduta di tre tubercoli, uno presso il dorso e due sopra i fianchi; laddove le coste del nostro esemplare ne hanno una soltanto. Esso manca eziandio delle strie trasversali decorrenti sul ventre, che si veggono fra una costa e l' altra della specie figurata dall' Autore della Paleontologia Francese (Terr. crét. Tab. CXXVI.).

Località.

Ho raccolto questo fossile nella calcaria rossa ammonitica di Salazaro presso le Sine nel Veronese. Nella stessa calcaria ho pur trovato un frammento di spira, forse riferibile a questa medesima specie. Orbigny nell' opera sopra i terreni cretacei della Francia descrive undici specie di *Ancyloceras*, quattro delle quali appartengono alla zona inferiore neocomiana, sette alla superiore, nè mai le specie della prima zona si mostrano promiscue a quelle della seconda. Però

un *Ancyloceras* (*Amm. annulatus*, Orb.) fu trovato nelle ooliti inferiori della Normandia, ed altre specie si sono trovate ne' gres verdi inferiori dell' Inghilterra, i quali, per la qualità delle conchiglie fossili che racchiudono, sembrano approssimarsi alla formazione neocomiana piuttosto che a quella del *Gault* che gli sta sopra.

Ne consegue che il genere *Ancyloceras* non esisteva nell' epoca della formazione del lias, non essendosi in questa roccia rinvenuta reliquia alcuna che ne attesti la presenza, ma soltanto si comincia a vederne le tracce nelle ooliti inferiori del sistema jurese. Nè queste tracce servono d' indizio per credere che gli *Ancyloceras* possano ricomparire negli strati superiori del detto sistema, giacchè a niuno è stato dato finora d' osservarne nelle rocce juresi che succedono alle ooliti inferiori. Sede precipua di questo genere di cefalopodi è la parte più bassa del sistema cretaceo rappresentata dal terreno neocomiano, al di sopra del quale, giusta il dettato di Orbigny, non è stata ancora trovata veruna specie di *Ancyloceras*. Era necessario ch'io facessi menzione di questi fatti perchè si vedesse vieppiù l' analogia zoologica che vi ha tra la calcaria ammonitica del Veneto, da cui ho tratto *l'Ancyloceras nodosus* con la calcaria neocomiana della Francia.

Hamites Labatii. Nob. — *Tav.* IX, *fig.* 2.

Ham. testa oblonga, compressa, transversim aequaliter costata, ad dorsum sulco profundissimo exarata; apertura elliptica, compressa.

Il corpo di questo politalamo è schiacciato, munito in tutta la lunghezza di cordoni trasversali obliqui, più salienti sul dorso che ai lati e non interrotti nella regione ventrale, come d' ordinario si osserva nelle *Hamites* finora conosciute. Alla regione del dorso v' ha un solco obliquo molto profondo, scavato a guisa di canaletto fra due cingoli o cordoni ben più grossi e più prominenti degli altri. Bocca elittica priva di orlatura e di lobi visibili. Lunghezza centimetri sedici. Larghezza maggiore di tre centimetri.

DIFFERENZE ED OSSERVAZIONI.

La presenza del solco trasversale che si profonda tra li due cordoni più grossi e più elevati del dorso, non che le coste ricorrenti anco sul ventre, sono caratteri bastanti per costituire di quest' *Hamites* una specie distinta. Rispetto alla forma della spira ch' è un poco mutilata, e rispetto ad altri caratteri mi sembra che questa e la susseguente specie debbano essere incluse nel genere *Hamites* di Parkinson quale lo ha ridotto Orbigny (Paleontol. Francaise. T. 1, pag. 526.).

LOCALITÀ.

Questa specie caratteristica della calcaria ammonitica del Veneto è stata da me rinvenuta nelle cave di Lavazzo, poscia la trovai presso Igne sulla strada

che conduce da Longarone a Zoldo nel Bellunese. Orbigny riguarda le *Hamites* come promiscue a due diverse formazioni del sistema cretaceo, cioè al terreno neocomiano ed a quello del *Gault* (Terr. crét. Tom. 1, pag. 527.).

Hamites punctatus? Orbigny. T. 1, p. 532. Tab. CXXXI, fig. 6-8.

Riferisco con dubbio a questa specie un frammento d'*Hamites* che ho trovato non già ne' Gabinetti altrui, ma fra il sassame d'una cava di Lavazzo vicina alla strada postale. Esso attinge la lunghezza di mezzo pollice ed ha lo spessore d'una penna da scrivere. Alla forma e andatura de' cordoni disposti obliquamente dal ventre al dorso, forniti ciascuno di due tubercoli ottusi, uno presso il dorso, l'altro sul fianco, mi parve di ravvisarvi molta corrispondenza con la figura di Orbigny che ho citata, se non che in questa i tubercoli appajono acuti, non già ottusi come sono nella nostra conchiglia.

Annotazioni.

In proposito di questa conchiglia il Sig. de Zigno fece la seguente osservazione: « Le due specie *d'Hamites* della calcaria ammonitica Bellunese sono « state trovate dal Catullo fuori di posto, e non dentro la roccia che un tempo « le racchiudeva, imperciocchè una di esse fu rinvenuta sulla strada che con- « duce da Longarone a Zoldo, l'altra fra il sassame d'una cava di Lavazzo. » Il critico ignora, e ne sono sicuro, che la strada di cui parla (da Muda ad Igne) è scavata nella calcaria ammonitica rossa, dalla quale emergono tracce di avanzi fossili. Io però distaccai l'*Hamites Labatii* dalla rupe calcaria che si eleva a dritta di chi ascende la strada. Quanto all'altra specie, qual è il Naturalista che entrando in una lapidicina non si faccia innanzi tutto ad esaminare i rottami sparsi sul fondo per vedere se contengono fossili, e trovati che ne abbia non dica ch'essi appartengono alla roccia in cui è stata aperta la cava? Il lettore accorderà sempre più fiducia a quello il quale raccoglie sul fondo d'una petraja i fossili che intende descrivere, che ad uno il quale chiede ad imprestito ai collettori di petrefatti le specie per illustrarle.

INDICE

PARTE PRIMA

PARTE SECONDA

ERRORI	CORREZIONI
Pag. 269, lin. 23. che ha prodotto. . .	che lo hanno prodotto.
,, 276, ,, 32. dicotitelonie. . . .	dicotiledonie.
,, 277, ,, 33. ologisto	oligisto
,, 294, ,, 28. *Isis Melitensis* di Michelotti	*Isis Melitensis* Goldfuss. Petref. Germ. p. 20. Tav. 7, fig. 17.
,, 301, in testa alla pag. si deve leggere	Continuazione de' Fossili Cretacei.

gostini dis.

Venezia Pr. Lit. Kier

Tav. II.
Fig. 1
Fig. 2
Fig. 3
Fig. 4
Fig. 5
Fig. 6
Venezia Pr. Lit. Kier

Fig. 1.
a
b
Fig 4
b
Fig. 7.

Agostini dis.

Venezia Pr. Lit. Kier

b a Fig 1.
Fig. 3.
a
b
Fig. 4.

Venezia Pr. Lit. Kier

Fig 1
Fig 3
Fig 2
Agostini dis
Venezia Pr. Lit. Kier

Tav VII

Agostini dis

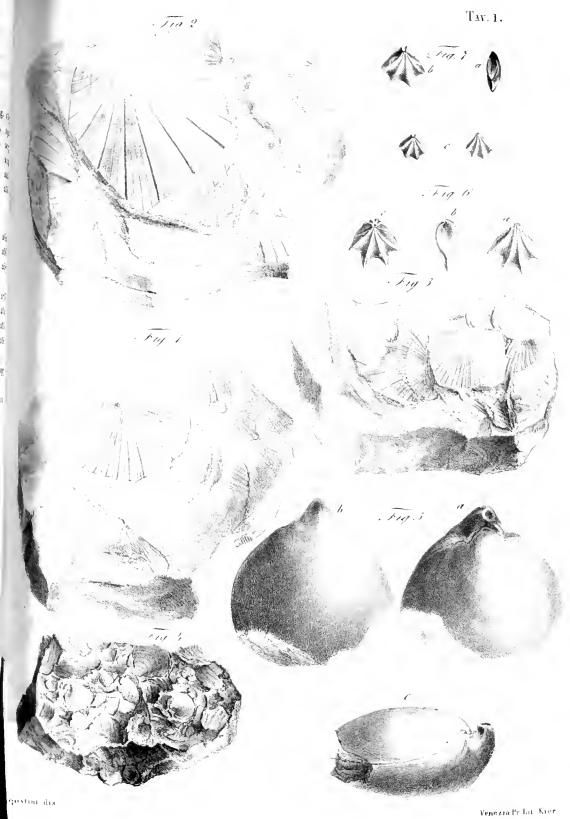
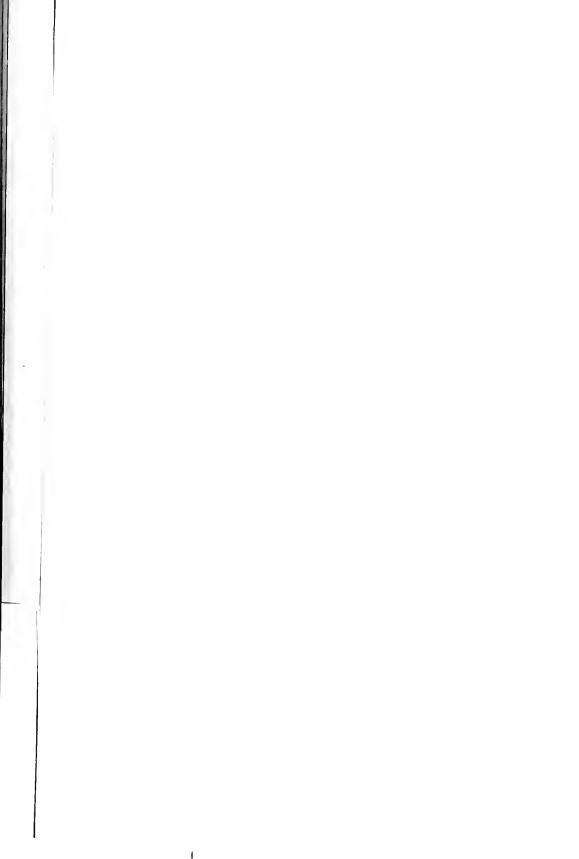
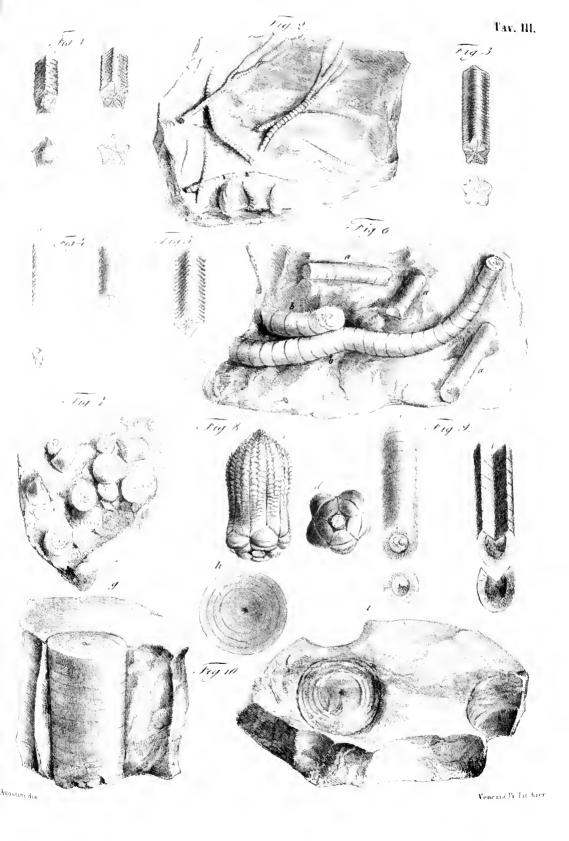
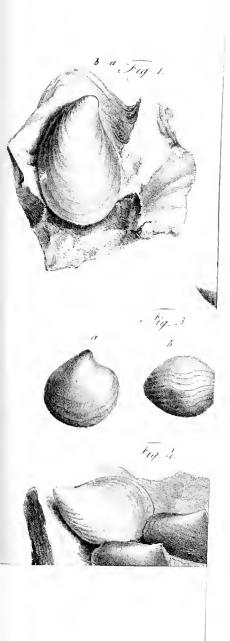
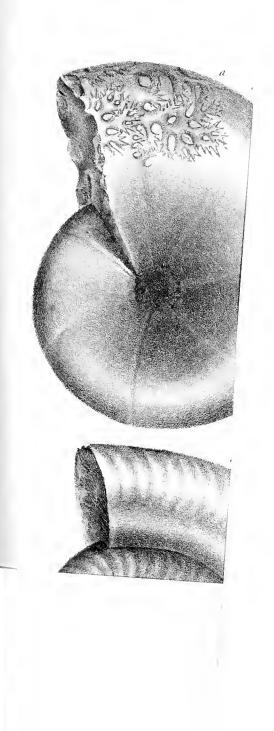
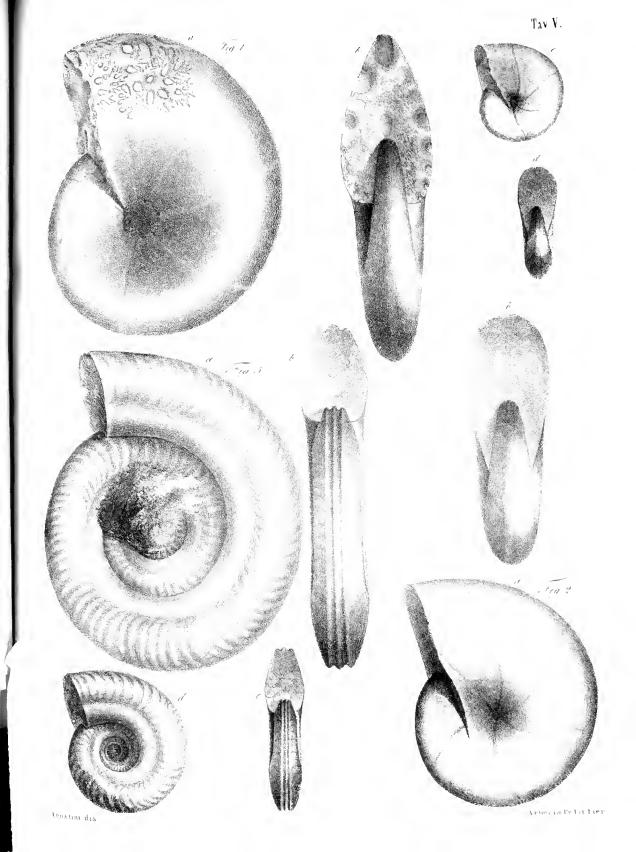
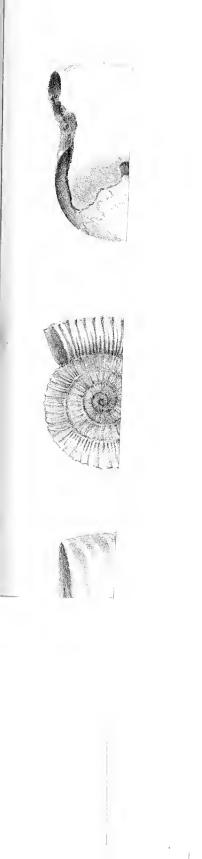
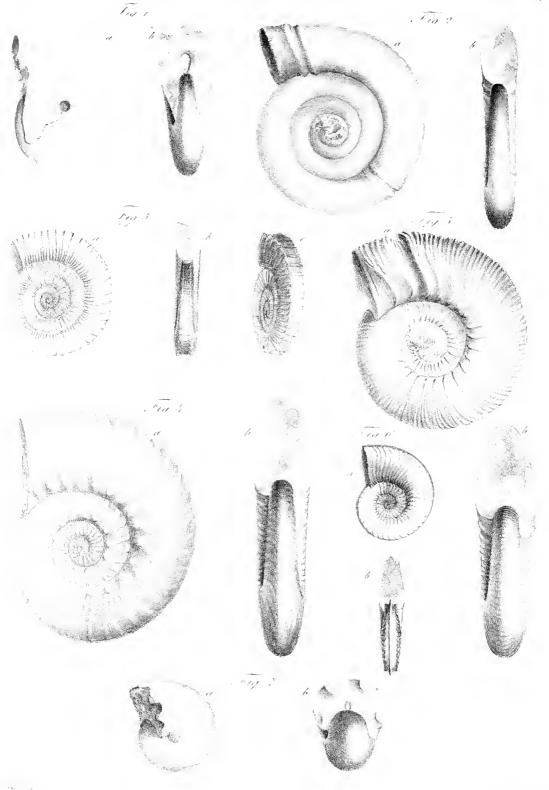
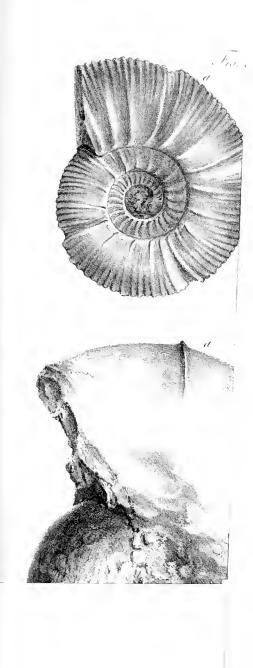
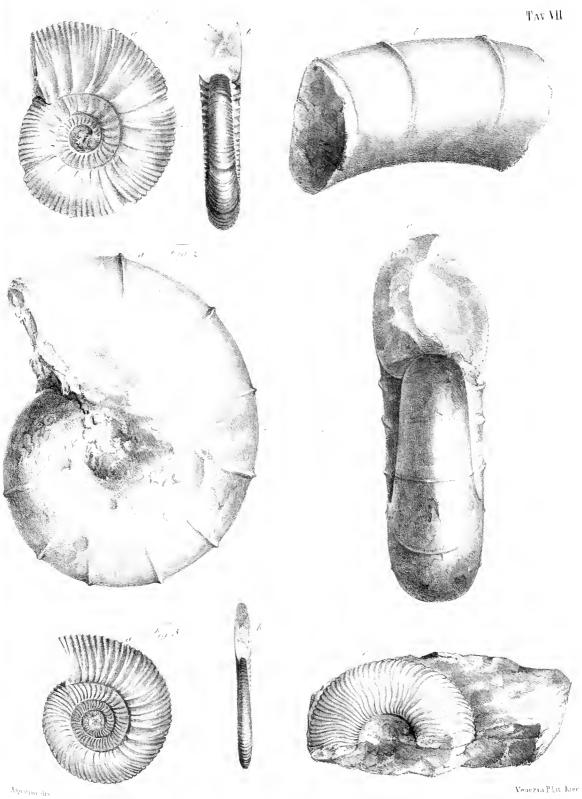
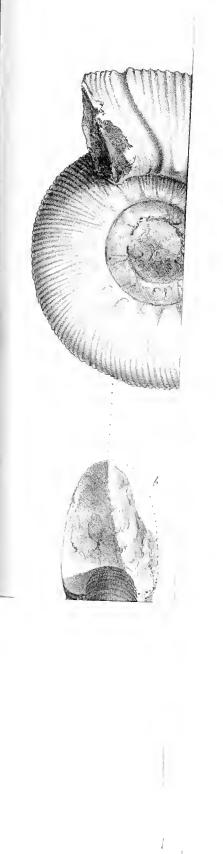
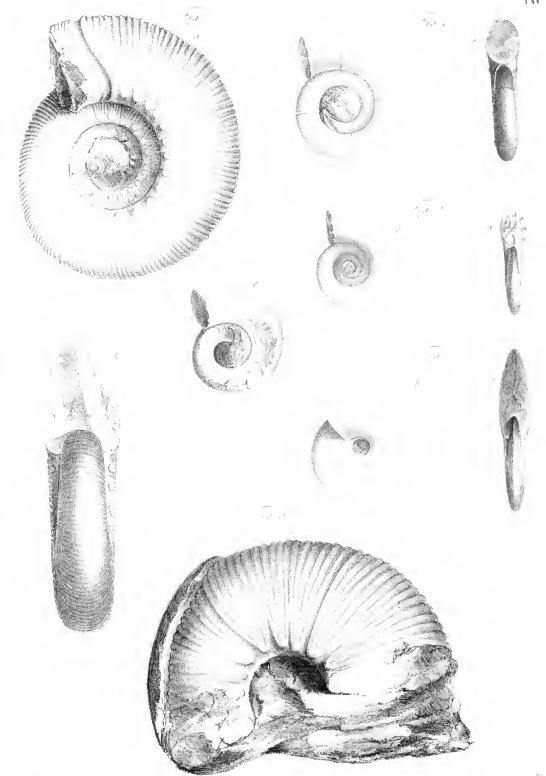
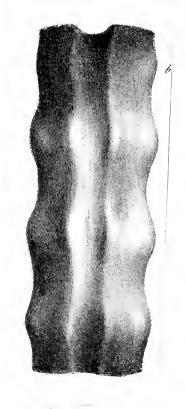
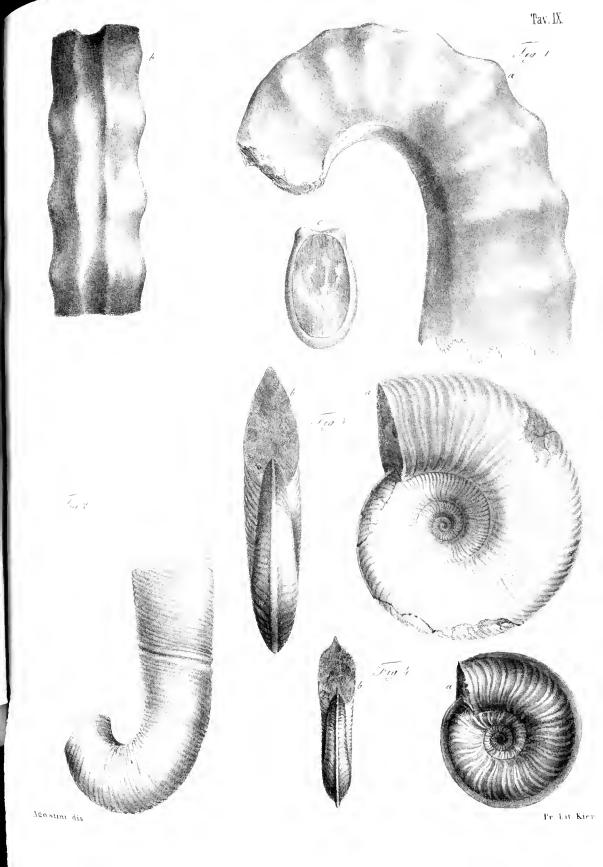
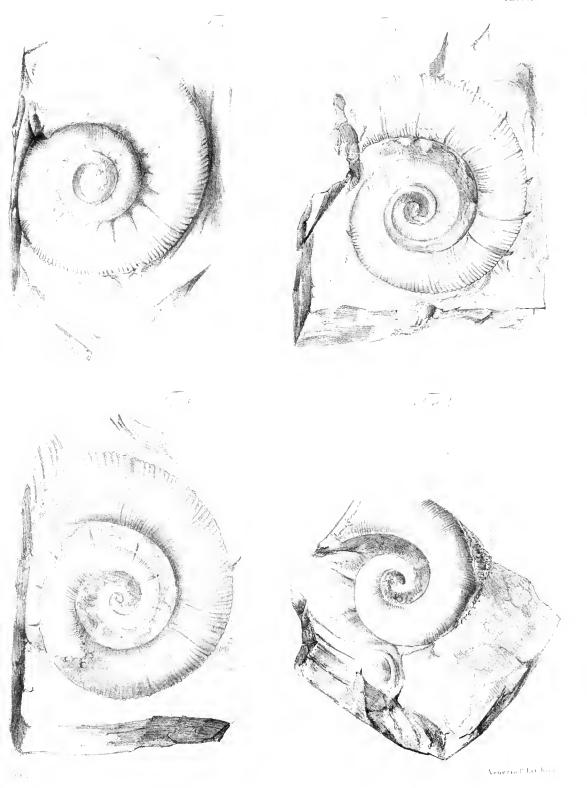
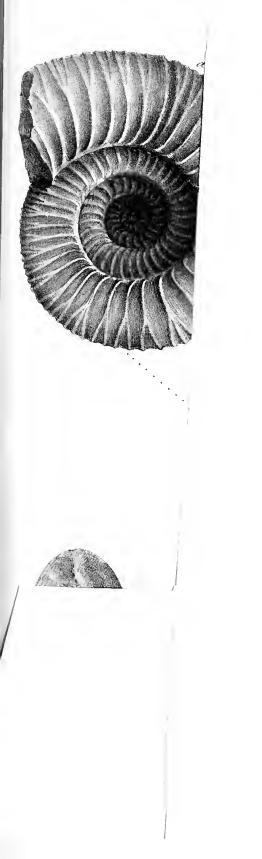
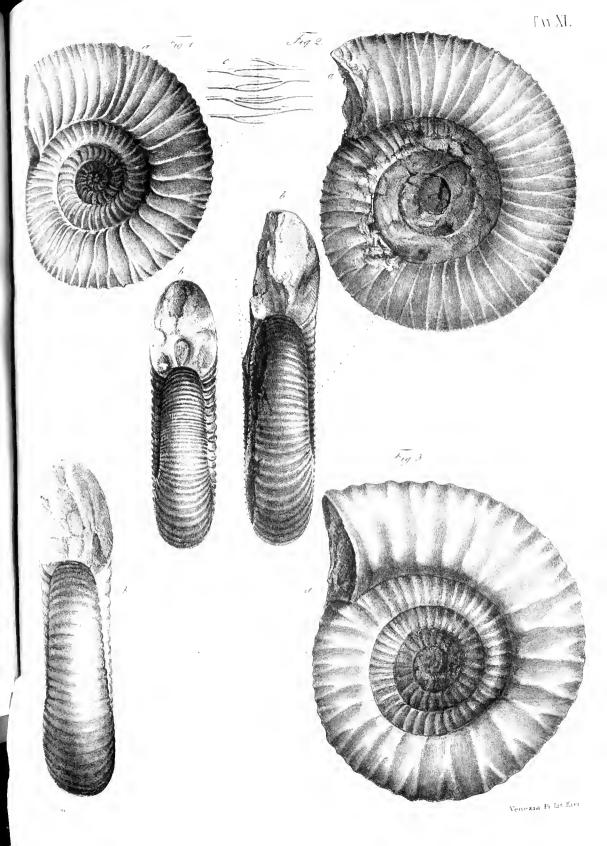
Venezia P Lit Kier

Venezia P.Lit.Kier

Fig. 2

Agostini dis

Pr. Lit. Kier

Tav. XI.
Fig. 1
a
Fig. 2
c
a
b
b
b
Fig. 3
a
Venezia Pb. lit. Kirc

SPIEGAZIONE DELLE TAVOLE (1).

TAV. I.

TAV. II.

TAV. III.

TAV. IV.

(1) Siccome il testo si stampava in Modena, mentre le figure si disegnavano in Padova, è nato sbaglio nelle citazioni delle Tavole e delle figure; il seguente indice servirà di correzione.

TAV. V.

TAV. VI.

TAV. VII.

TAV. VIII.

TAV. IX.

TAV. X.

TAV. XI.

MEMORIA

INTORNO

AL RAGGIO ASSOLUTO DEL CIRCOLO OSCULATORE
ED ALLE EVOLUTE DELLE CURVE A DOPPIA CURVATURA
DESCRITTE SOPRA LA SUPERFICIE DELLA SFERA

DEL SIG. COMMENDATORE

PROF. GIOVANNI PLANA

SOCIO ATTUALE

Ricevuta adì 27 Ottobre 1846.

§. I.

Lo scopo che mi sono proposto in questo scritto è, di porre in evidenza le modificazioni che subiscono le formole generali applicate a questo caso, e di formare le più semplici equazioni per le quali si determina sulla sfera il polo del piano osculatore della curva, insieme colle linee trigonometriche pertinenti all' arco di circolo massimo, il di cui seno è precisamente eguale alla linea, che, a norma delle idee di *Monge*, costituisce il raggio assoluto del circolo osculatore.

Che io sappia, queste formole speciali, degne di attenzione per la loro forma ed analitica eleganza, non sono ancora state pubblicate. Per esse si vedrà come sia avvenuto, che, non ostante una indiretta considerazione adoprata da *Eulero* vi sia un perfetto accordo fra l' espressione generale del raggio assoluto del circolo osculatore di una curva descritta sulla superficie della sfera, e l' espressione di quel raggio di piccolo circolo che, nel 1771, è stata data da *Eulero* « *tamquam expressio generalis pro radiis osculi curvarum in superficie sphaerica descriptarum* » in una sua Memoria « *De curva rectificabili in superficie sphaerica* » stampata nel Tomo XV dell' Imp. Accademia di Pietroburgo (Vedi pag. 203.).

Si avrà qui una espressione analitica semplicissima delle tre coordinate della curva che riunisce la totalità dei poli dei piani osculatori: la qual curva vuole essere distinta da quella che sarebbe il luogo geometrico dei centri dei circoli osculatori. La prima fa sulla sfera le veci delle evolute delle curve piane. Quindi è, che se ne può derivare il differenziale dell'arco della curva primitiva in funzione dell' elemento analogo di questa evoluta e del di lei raggio del circolo osculatore, siccome si pratica per le curve piane.

Nel §. V. ho voluto, con questa occasione, dare l' espressione del raggio della *sfera osculatrice* sotto la forma la più semplice che comporta per qualsivoglia curva che fosse descritta sopra una superficie diversa dalla sferica.

§. II.

Sia l' unità il raggio della sfera, ed x, y, z le coordinate ortogonali, riferite al centro di un punto qualunque della sua superficie: esprimendo queste colle coordinate polari si avrà, siccome è noto,

$$x = \cos\theta, \quad y = \sin\theta . \sin\varphi, \quad z = \sin\theta . \cos\varphi ;$$

e per l' elemento ds della curva,

$$(1) \qquad ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \sqrt{d\theta^2 + d\varphi^2 \sin^2\theta} .$$

Da questi valori di x, y, z si deduce, differenziando senza definire quale sia il differenziale assunto per costante;

$$(2) \qquad \begin{cases} dx = - \sin\theta . d\theta \\ dy = d\theta . \sin\varphi \cos\theta + d\varphi . \sin\theta \cos\varphi , \\ dz = d\theta . \cos\varphi \cos\theta - d\varphi . \sin\theta \sin\varphi ; \end{cases}$$

$$(3) \qquad \begin{cases} d^2 x = - dd\theta . \sin\theta - d\theta^2 . \cos\theta , \\ d^2 y = dd\theta . \sin\varphi \cos\theta + dd\varphi . \sin\theta \cos\varphi \\ \qquad + 2\, d\theta\, d\varphi . \cos\theta \cos\varphi - (d\theta^2 + d\varphi^2) \sin\theta \sin\varphi ; \\ d^2 z = dd\theta . \cos\varphi \cos\theta - dd\varphi . \sin\theta \sin\varphi \\ \qquad - 2\, d\theta\, d\varphi . \cos\theta \sin\varphi - (d\theta^2 + d\varphi^2) \sin\theta \cos\varphi . \end{cases}$$

Ciò posto, consideriamo l'equazione

$$(x'-x)X'+(y'-y)Y'+(z'-z)Z'=0$$

del *piano osculatore* della curva, nella quale si ha

$X'=dy.ddz-dz.ddy$; $Y'=dz.ddx-dx.ddz$; $Z'=dx.ddy-dy.ddx$.

Mediante le equazioni (2) e (3); fatto

$$X=\frac{X'}{d\theta^3},\quad Y=\frac{Y'}{d\theta^3},\quad Z=\frac{Z'}{d\theta^3},$$

si troverà

$$(4)\left\{\begin{array}{l} X=-\left(\frac{d\phi}{d\theta}\right)^3\sin^2\theta-\frac{d\phi}{d\theta}(1+\cos^2\theta)+\left(\frac{d\phi}{d\theta}\cdot\frac{dd\theta}{d\theta^2}-\frac{dd\phi}{d\theta^2}\right)\sin\theta\cos\theta\,; \\ Y=-\cos\phi-\left(\frac{d\phi}{d\theta}\right)^2\sin^2\theta\cos\phi-\frac{d\phi}{d\theta}\sin\theta\cos\theta\sin\phi+\left(\frac{d\phi}{d\theta}\cdot\frac{dd\theta}{d\theta^2}-\frac{dd\phi}{d\theta^2}\right)\sin^2\theta\sin\phi; \\ Z=\sin\phi+\left(\frac{d\phi}{d\theta}\right)^2\sin^2\theta\sin\phi-\frac{d\phi}{d\theta}\sin\theta\cos\theta\cos\phi+\left(\frac{d\phi}{d\theta}\cdot\frac{dd\theta}{d\theta^2}-\frac{dd\phi}{d\theta^2}\right)\sin^2\theta\cos\phi. \end{array}\right.$$

Ora, se noi facciamo $M=xX+yY+zZ$, queste equazioni danno

$$(5)\qquad M=-2\frac{d\phi}{d\theta}\cos\theta-\left(\frac{d\phi}{d\theta}\right)^3\sin^2\theta\cos\theta+\left(\frac{d\phi}{d\theta}\cdot\frac{dd\theta}{d\theta^2}-\frac{dd\phi}{d\theta^2}\right)\sin\theta;$$

per modo che si ha

$$(6)\qquad x'X+y'Y+z'Z=M$$

per l'equazione del piano osculatore.

Per porre sotto una forma più semplice le tre funzioni X, Y, Z, osservo che, eliminando il binomio $\frac{d\phi}{d\theta}\cdot\frac{dd\theta}{d\theta^2}-\frac{dd\phi}{d\theta^2}$ mediante l'equazione (5), si ottiene

$$(7)\left\{\begin{array}{l} X=M\cos\theta-\left(\frac{ds}{d\theta}\right)^2\frac{d\phi}{d\theta}\sin^2\theta\,, \\ Y=M\sin\theta\sin\phi+\left(\frac{ds}{d\theta}\right)^2\left\{\frac{d\phi}{d\theta}.\sin\phi\sin\theta\cos\theta-\cos\phi\right\}, \\ Z=M\sin\theta\cos\phi+\left(\frac{ds}{d\theta}\right)^2\left\{\frac{d\phi}{d\theta}.\cos\phi\sin\theta\cos\theta+\sin\phi\right\}. \end{array}\right.$$

Di qui, avendo riguardo all' equazione (1), la quale dà $\left(\frac{ds}{d\theta}\right)^2=1+\left(\frac{d\phi}{d\theta}\right)^2\sin^2\theta$, si trae facilmente per la somma $X^2+Y^2+Z^2$ dei tre quadrati questa semplicissima espressione

$$(8)\qquad X^2 + Y^2 + Z^2 = M^2 + \left(\frac{ds}{d\theta}\right)^6.$$

Siano α, β, γ gli angoli formati coi tre assi delle x, y, z dalla normale al piano osculatore abbassata dall'origine, ossia centro della sfera: è noto, che fatto $D = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$, si ha

$$(9)\qquad \left\{ \cos\alpha = \frac{X}{D},\quad \cos\beta = \frac{Y}{D},\quad \cos\gamma = \frac{Z}{D} \right\}.$$

L' equazione (6) significa adunque, che

$$(10)\qquad x'\cos\alpha + y'\cos\beta + z'\cos\gamma = \frac{M}{D},$$

ove $\frac{M}{D}$ è eguale alla normale anzidetta, compresa fra l'origine ed il punto d' intersecazione col piano osculatore. Se adunque si chiama Ω l'angolo formato da questa normale e dal raggio della sfera condotto al punto della sua superficie di cui x, y, z sono le coordinate, si avrà

$$(11)\qquad \begin{cases} \cos\Omega = \frac{M}{D}, \\ \sin\Omega = \sqrt{1 - \frac{M^2}{D^2}} = \frac{1}{D}\cdot\left(\frac{ds}{d\theta}\right)^3 = \dfrac{\left(\frac{ds}{d\theta}\right)^3}{\sqrt{M^2 + \left(\frac{ds}{d\theta}\right)^6}}. \end{cases}$$

Quest' ultima formola somministra l' espressione generale del raggio assoluto del circolo osculatore, poichè questo raggio è, nel caso attuale, precisamente eguale al raggio del piccolo circolo che nasce dalla intersecazione del piano osculatore colla sfera. Egli è pur chiaro, che di qui si ricava

$$(12)\qquad \operatorname{tang}\Omega = \frac{1}{M}\left(\frac{ds}{d\theta}\right)^3.$$

Ma è possibile di porre l' espressione di M data dal secondo membro dell' equazione (5) sotto una forma assai più concisa nel modo seguente.

Differenziando l' equazione $ds^2 = d\theta^2 + d\varphi^2 \sin^2\theta$ si ha

$$(13)\qquad \frac{ds}{d\theta}\cdot\frac{dds}{d\theta^2} = \frac{dd\theta}{d\theta^2} + \frac{d\varphi}{d\theta}\cdot\frac{dd\varphi}{d\theta^2}\sin^2\theta + \left(\frac{d\varphi}{d\theta}\right)^2 \sin\theta\,.\cos\theta.$$

Per la combinazione delle due equazioni (5) e (13) si avrà pertanto, eliminando $\frac{dd\theta}{d\theta^2}$;

$$\mathrm{M}\sin\theta = -\left(\frac{ds}{d\theta}\right)^2 \left\{ 2\,\frac{d\varphi}{d\theta}\sin\theta\cos\theta + \frac{dd\varphi}{d\theta^2}\sin^2\theta - \frac{d\varphi}{ds}\cdot\frac{dds}{d\theta^2}\cdot\sin^2\theta \right\},$$

cioè,

$$\mathrm{M}\sin\theta = -\left(\frac{ds}{d\theta}\right)^3 \left\{ \frac{d\varphi}{ds}\,d.\sin^2\theta + \frac{d^2\varphi}{d\theta\,ds}\sin^2\theta\,d\theta - \frac{d\varphi.dds}{ds^3}\sin^2\theta \right\}.$$

Ed è chiaro che si può scrivere

$$\mathrm{M}\sin\theta\,d\theta = -\left(\frac{ds}{d\theta}\right)^3 \left\{ \frac{d\varphi}{ds}\,d.\sin^2\theta + \sin^2\theta\,d.\left(\frac{d\varphi}{ds}\right) \right\}.$$

Per modo che si ha questa concisa equazione

$$(14)\qquad \mathrm{M}.\sin\theta\,d\theta = -\left(\frac{ds}{d\theta}\right)^3 d.\left\{ \frac{d\varphi}{ds}.\sin^2\theta \right\},$$

in forza della quale, le equazioni (11) e (12) diventano

$$(15)\qquad \sin\Omega = \frac{d.\cos\theta}{\sqrt{\left[d.\cos\theta\right]^2 + \left[d.\left(\frac{d\varphi}{ds}\sin^2\theta\right)\right]^2}},$$

$$(16)\qquad \operatorname{tang}\Omega = \frac{d.\cos\theta}{d.\left\{\frac{d\varphi}{ds}\sin^2\theta\right\}}.$$

Facendo $\cos\alpha = x''$, $\cos\beta = y''$, $\cos\gamma = z''$, le coordinate x'', y'', z'' saranno quelle del *polo del piano osculatore*. E per via delle equazioni (9) si ha

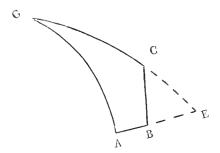
$$(17)\qquad \left\{ \begin{aligned} x'' &= \frac{\mathrm{X}}{\sqrt{\mathrm{M}^2 + \left(\frac{ds}{d\theta}\right)^6}}, \\ y'' &= \frac{\mathrm{Y}}{\sqrt{\mathrm{M}^2 + \left(\frac{ds}{d\theta}\right)^6}}, \\ z'' &= \frac{\mathrm{Z}}{\sqrt{\mathrm{M}^2 + \left(\frac{ds}{d\theta}\right)^6}}, \end{aligned} \right.$$

Essendo data la curva descritta sulla sfera sarà pure data un' equazione della forma $\mathrm{F}(\theta, \varphi) = 0$, od altra equivalente. Per

modo che, eliminando φ fra questa equazione e le tre precedenti, si può fingere che si hanno tre equazioni della forma

$$x'' = f(\theta), \quad y'' = f'(\theta), \quad z'' = f''(\theta),$$

per le quali $x''^2 + y''^2 + z''^2 = 1$. Adunque, eliminando θ fra due di queste tre equazioni si avrebbe l'equazione della curva che è il luogo geometrico della totalità dei poli dei piani osculatori della data curva.

In generale, questa curva può essere considerata siccome formata dalla successiva intersecazione degli archi Ω di circolo massimo condotti normalmente alla data curva, e potrebbe chiamarsi la di lei *evoluta sferica*; poichè un filo ad essa avvolto, e sviluppato, tenendolo teso sulla superficie della sfera, descriverebbe colla sua estremità la curva primitiva, rimanendo sempre applicato sopra di un circolo massimo, stante che si dimostra che tale è la curva sulla sfera onde sia minima la distanza che unisce due punti.

Siano A B, B C due elementi consecutivi dell' evoluta di cui qui si parla: saranno due archi infinitesimi di circolo massimo. Conducendo due archi di circolo massimo A G e C G ad essi normali si formerà il punto G pertinente all' evoluta dell' evoluta primitiva. Prolungando gli archi A B e C G fino al loro concorso in E, si avrà il triangolo sferico A G E rettangolo in A, nel quale $\operatorname{tang} E = \frac{\operatorname{tang} GA}{\sin AE}$.

Ma, considerando siccome rettilineo il triangolo infinitesimo CBE, si avrà CEB + CBE = 90°, essendo (per costruzione) retto l'angolo in C. Adunque, chiamando ω' l'angolo di contingenza CBE, ed s' la lunghezza di un arco dell'evoluta, si ha l'equazione

$$\operatorname{tang}(90^\circ - \omega') = \frac{\operatorname{tang} \Omega'}{\sin ds'},$$

ove $\Omega' = \text{GA}$. Di qui si trae $\omega' = \frac{ds'}{\operatorname{tang}\Omega'}$, poichè è lecito di porre $\sin ds' = ds'$, $\operatorname{tang}\omega' = \omega'$. Ora, vuolsi osservare, che l'angolo ω', formato dai due piani consecutivi normali alla curva, si trova sul piano osculatore, e che si ha $ds = \omega' . \sin\Omega$, stantechè l'archetto ω' è descritto col raggio $\sin\Omega$ del circolo osculatore. Quindi è che noi abbiamo l'equazione

$$(18) \qquad \frac{ds}{\sin\Omega} = \frac{ds'}{\operatorname{tang}\Omega'}.$$

In forza della generazione dell'evoluta sferica è lecito di porre $\Omega = s' + k$, ove k è un arco di circolo massimo il di cui seno rappresenta il raggio assoluto di curvatura al primo punto della data curva. Si può adunque stabilire l'equazione

$$(19) \qquad ds = \frac{\sin(s'+k) \,.\, d(s'+k)}{\operatorname{tang}\Omega'},$$

la quale è analoga all'equazione

$$ds = \frac{(s'+k)\; d(s'+k)}{r'}$$

che si ha per le curve piane; chiamando r' il raggio del circolo osculatore dell'evoluta; s' l'arco di essa, ed s l'arco dell'evolvente.

Per meglio distinguere la curva compresa nelle equazioni (17) soggiungerò che, x', y', z' essendo, in generale, le coordinate del centro del circolo osculatore della curva descritta sulla sfera si ha

$$(20) \quad \begin{cases} x' = \cos\Omega \,.\, \cos\alpha\,; \quad y' = \cos\Omega \,.\, \cos\beta\,; \quad z' = \cos\Omega \,.\, \cos\gamma\,; \\ x' = \frac{\text{M}}{\text{D}} \,.\, \cos\alpha\,; \quad y' = \frac{\text{M}}{\text{D}} \,.\, \cos\beta\,; \quad z' = \frac{\text{M}}{\text{D}} \,.\, \cos\gamma : \end{cases}$$

ed essendo $\cos\alpha = x''$, $\cos\beta = y''$, $\cos\gamma = z''$ ne segue, che

$$(21)\quad \begin{cases} x' = \dfrac{M X}{M^2 + \left(\frac{ds}{d\theta}\right)^6}\,; \\[2ex] y' = \dfrac{M Y}{M^2 + \left(\frac{ds}{d\theta}\right)^6}\,; \\[2ex] z' = \dfrac{M Z}{M^2 + \left(\frac{ds}{d\theta}\right)^6}\,. \end{cases}$$

La superficie conica, avente il vertice al centro della sfera, sulla quale si concepiscono descritte ambidue le curve comprese nelle equazioni (17) e (21), è quella sola che può contenere una infinità di linee curve, che, giusta la teoria di *Monge*, possono essere considerate siccome *evolute* della curva primitiva. Queste evolute sono generalmente espresse dalle tre equazioni

$$\frac{\xi}{\zeta} = \frac{\cos\alpha}{\cos\gamma} = \frac{X}{Z}\,,$$

$$\frac{\eta}{\zeta} = \frac{\cos\beta}{\cos\gamma} = \frac{Y}{Z}\,,$$

$$(\xi - \cos\theta) - (\zeta - \sin\theta\cos\varphi)\,\frac{d\xi}{d\zeta} = 0\,,$$

nelle quali ξ, η, ζ sono le coordinate della superficie conica anzidetta, la quale è rappresentata dalle due prime: la terza è la projezione della retta tangente all' evoluta. Ed è chiaro, che l' infinito numero di queste curve tiene all' esistenza della costante arbitraria che sarebbe introdotta per l' integrazione dell' equazione differenziale in ξ, ζ, $\frac{d\xi}{d\zeta}$ che si avrebbe mediante l' eliminazione di θ e φ. Ora vuolsi osservare, che rappresentando con $f\left(\xi, \zeta, \frac{d\xi}{d\zeta}\right) = 0$ l'equazione così risultante; dessa potrà avere, oltre l' integrale completo, anche una *soluzione particolare*. Ma, nè l' una, nè l' altra potrebbe comprendere la curva espressa per le equazioni (17), poichè le linee *rette* tangenti a questa, non passano, comunque prolungate, per la data curva.

§. III.

La funzione $\frac{d\varphi}{ds}\sin^2\theta$, che, giusta la formola (15) entra nell'espressione del raggio di curvatura ha un significato del tutto trigonometrico che importa di aver presente alla mente. Infatti, sia per un momento ω l'angolo formato sulla superficie della sfera dai due elementi $d\theta$ e ds: il terzo elemento $d\varphi\sin\theta$ essendo perpendicolare a $d\theta$, si ha

$$\sin\omega = \frac{d\varphi}{ds}\sin\theta\,, \quad \cos\omega = \frac{d\theta}{ds}\,.$$

Ed è palese, che fatto $\psi = 90° - \omega$ ne segue che,

$$(22) \quad \left\{ \sin\theta\,.\cos\psi = \frac{d\varphi}{ds}\sin^2\theta\,; \quad \sin\psi = \frac{d\theta}{ds}\,; \quad \operatorname{tang}\psi = \frac{d\theta}{d\varphi\,\sin\theta} \right\},$$

ove l'angolo ψ è quello che è formato dalla intersecazione del piano che contiene l'arco di circolo massimo θ col piano che contiene l'altro arco di circolo massimo perpendicolare a ds.

Introducendo l'angolo ψ nelle formole (7), si avrà

$$(23) \quad \begin{cases} X = M\cos\theta - \dfrac{\sin\theta\,.\cos\psi}{\sin^3\psi}\,, \\[2ex] Y = M\sin\theta\sin\varphi - \left\{ \dfrac{\cos\varphi\,.\sin\psi - \sin\varphi\cos\psi\,.\cos\theta}{\sin^3\psi} \right\}, \\[2ex] Z = M\sin\theta\cos\varphi + \left\{ \dfrac{\sin\varphi\,.\sin\psi + \cos\varphi\cos\psi\,.\cos\theta}{\sin^3\psi} \right\}. \end{cases}$$

La forma di queste espressioni suggerisce, che, formando un triangolo sferico rettangolo A B C, nel quale l'angolo $A=\theta$, l'angolo $B=90°$, ed il lato $AC=\psi-90°$, si avrà, chiamando μ'' il lato B C;

$$(24) \quad \cos\mu'' = \sin\theta\,.\sin(\psi - 90°) = -\sin\theta\,.\cos\psi\,.$$

Formando un secondo triangolo sferico obliquangolo A B C, nel quale l'angolo $A=\theta$, il lato $AB = 180° - \varphi$, il lato $AC = 90° - \psi$, facendo il lato $BC = \mu'$, si avrà

$$(25) \quad \cos\mu' = \cos(180° - \varphi).\cos(90° - \psi) + \sin(180° - \varphi)\sin(90° - \psi)\cos\theta.$$

Finalmente, formando un terzo triangolo sferico ABC, pure obliquangolo, nel quale l'angolo $A=\theta$, il lato $AB=90^\circ-\varphi$, il lato $AC=90^\circ-\psi$, se vi si fa il lato $BC=\mu$, si avrà

(26) $$\cos\mu=\cos(90^\circ-\varphi)\cos(90^\circ-\psi)+\sin(90^\circ-\varphi)\sin(90^\circ-\psi).\cos\theta.$$

Ciò posto è chiaro che si ha

(27) $$\left\{\begin{aligned} X &= M\cos\theta+\frac{\cos.\mu''}{\sin^3\psi}, \\ Y &= M\sin\theta.\sin\varphi+\frac{\cos.\mu'}{\sin^3\psi}, \\ Z &= M\sin\theta.\cos\varphi+\frac{\cos.\mu}{\sin^3\psi}. \end{aligned}\right.$$

Ma noi abbiamo trovato più sopra, che

$$\frac{M}{D}=\cos\Omega,\quad \frac{I}{D}=\sin^3\psi.\sin\Omega:$$

egli è pertanto dimostrato, che le formole (9) e (17) sono equivalenti alle seguenti; cioè

(28) $$\left\{\begin{aligned} \cos\alpha &= x''=\cos\theta.\cos\Omega+\sin\Omega.\cos\mu'', \\ \cos\beta &= y''=\sin\varphi\sin\theta.\cos\Omega+\sin\Omega.\cos\mu', \\ \cos\gamma &= z''=\cos\varphi\sin\theta.\cos\Omega+\sin\Omega.\cos\mu. \end{aligned}\right.$$

La prima di queste tre equazioni, dopo avervi sostituito il valore di $\cos\mu''$ dato dall' equazione (24) diventa

(29) $$\cos\alpha=\cos\theta.\cos\Omega-\sin\Omega.\sin\theta\cos\psi.$$

Differenziando i due membri, si ha

$$\begin{aligned} d(\cos\alpha) &= \cos\Omega\, d(\cos\theta)-\sin\Omega\, d(\sin\theta\cos\psi) \\ &\quad +\cos\theta\, d(\cos\Omega)-\sin\theta\cos\psi\, d(\sin\Omega). \end{aligned}$$

La prima di queste due linee è eguale a zero, in forza del valore precedente di $\tan\!g\,\Omega$ dato dalle equazioni (16) e (22): quindi è che si ha

$$d(\cos\alpha)=-d\Omega\,\{\cos\theta.\sin\Omega+\sin\theta\cos\psi.\cos\Omega\}.$$

È pertanto dimostrato per questa equazione, che non è ammissibile l' equazione $d(\cos\alpha)=0$, quando si passa da un punto al punto consecutivo della curva descritta sulla superficie della sfera, giusta l'idea inerente alla differenziazione. Ma, chi facesse variare nel secondo membro dell' equazione (29) solamente i due angoli θ e ψ, lasciando costante l'arco Ω: allora avrebbe infatti $d(\cos\alpha)=0$, ossia

$$(30)\qquad \cos\Omega\, d(\cos\theta) - \sin\Omega\, d(\sin\theta\cos\psi) = 0.$$

Un tal modo rapido di stabilire quest' ultima equazione è quello che è stato adoprato da *Eulero* nel luogo citato al primo paragrafo di questa Memoria. Ma havvi in questo ragionamento una certa oscurità, poichè l'angolo Ω essendo pure, implicitamente, dei due angoli θ e ψ, sui quali si porta la differenziazione, vuolsi scorgere chiaramente come si possa differenziare il secondo membro dell' equazione (29), trattando Ω a guisa di quantità indipendente dalle variazioni di θ e ψ.

Checchè ne sia di questa oscurità, siccome l' equazione (30) somministra il valore di $\operatorname{tang}\Omega$ quale noi l' abbiamo trovato per via di operazioni inconcusse, non è possibile di impugnare la verità di questo risultato. Del resto si potrebbe giustificare il ragionamento qui fatto da *Eulero* dicendo, che è analogo a quello che si fa, ponendo eguale a zero il differenziale, preso rispetto ad a soltanto, dell'equazione $y=ax+F(a)$, onde avere, per l' eliminazione di a, l' equazione della curva nata dalle successive intersecazioni delle linee rette.

§. IV.

Ora se si finge data la curva descritta sulla superficie della sfera, si dovrà avere l' equazione di una delle sue projezioni: o per via di una sola equazione in θ e φ: o, per via di due equazioni che daranno queste variabili in funzione di una terza, la quale sarebbe presa per la variabile indipendente. Mediante le due formole (11) e (15) si potrà sempre determinare il raggio assoluto del circolo osculatore, cioè $\sin\Omega$.

Per esempio, se fosse quistione della curva *rettificabile* descritta sulla superficie della sfera, per la quale si ha

$$(31) \qquad \left\{ s = a\cos\theta; \qquad d\varphi = \frac{d\theta}{\sin\theta}\sqrt{a^2\sin^2\theta - 1} \right\},$$

a essendo una quantità costante maggiore dell' unità (Vedi pag. 199 del Tomo XV dei *Novi Commentarj*, oppure il T. 2°. del Trattato di *Lacroix*, p. 216-17) ne seguirebbe, assumendo θ per la variabile indipendente, $\frac{ds}{d\theta} = -a\sin\theta$; $\frac{dds}{d\theta^2} = -a\cos\theta$: quindi è che per la formola (15) si ha immediatamente

$$\sin\Omega = \frac{d\theta\sin\theta}{\sqrt{d\theta^2\sin^2\theta + \frac{1}{a^2}\left(d.\sqrt{a^2\sin^2\theta - 1}\right)^2}};$$

e per conseguenza

$$(32) \qquad \sin\Omega = \frac{\sqrt{a^2\sin^2\theta - 1}}{\sqrt{a^2 - 1}}.$$

Nel caso semplicissimo in cui si avesse $\frac{d\varphi}{d\theta} = m$, essendo m quantità costante, la formola (11) darebbe facilmente

$$(33) \quad \sin\Omega = \frac{(1 + m^2\sin^2\theta)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{1 + 4m^2 + m^2(4m^2 - 1)\sin^2\theta + m^4(m^2 - 1)\sin^4\theta}}.$$

E vuolsi osservare, che fatto $\theta = \tau - 90°$, $m = \frac{c}{\sqrt{1 - c^2}} = \frac{c}{b}$, si avrebbe per questa curva

$$(34) \quad \left\{ \begin{array}{c} x = \sin\tau, \ y = \cos\tau.\sin\left(\frac{c}{b}\tau + \varepsilon\right), \ z = \cos\tau.\cos\left(\frac{c}{b}\tau + \varepsilon\right) \\ bs = \int d\tau\sqrt{1 - c^2\sin^2\tau}; \end{array} \right.$$

ε essendo una costante arbitraria. Per modo che, dessa è rettificabile per via di un arco elittico.

Per avere sulla superficie della sfera la curva che è rettificabile mediante le trascendenti elittiche di prima specie, si pone

$$ds = \sqrt{d\theta^2 + d\varphi^2\sin^2\theta} = \frac{d\theta}{\sqrt{1 - c^2\cos^2\theta}}.$$

d' onde si ricava

$$\frac{d\phi}{d\theta} = \frac{c \cdot \cos\theta}{\sin\theta \cdot \sqrt{1 - c^2 \cos^2\theta}}; \qquad \frac{d\phi}{ds} \sin^2\theta = c \cdot \sin\theta \cos\theta;$$

$$\phi = \varepsilon + \frac{c}{b} \log \left\{ \frac{\sqrt{1 - c^2 \cos^2\theta} - b}{c \sin\theta} \right\}.$$

La formola (15) dà

$$(35) \qquad \sin\Omega = \frac{\sin\theta}{\sqrt{\sin^2\theta + c^2 \cos^2.2\theta}}.$$

Presentemente, se noi facciamo $\theta = \tau - 90^\circ$ si avrà sulla superficie della sfera una curva avente per coordinate ortogonali

$$(36) \qquad \left\{ \begin{array}{l} x = \sin\tau, \\ y = \cos\tau . \sin \left\{ \varepsilon + \frac{c}{b} \log \left[\frac{\Delta - b}{c . \cos\tau} \right] \right\}, \\ z = \cos\tau . \cos \left\{ \varepsilon + \frac{c}{b} \log \left[\frac{\Delta - b}{c . \cos\tau} \right] \right\}, \end{array} \right.$$

per la quale, fatto $\Delta = \sqrt{1 - c^2 \operatorname{sen}^2\tau}$, si avrà

$$(37) \qquad s = \int \frac{d\tau}{\Delta} + costante.$$

È adunque possibile di descrivere sulla superficie della sfera una curva trascendente, di cui le lunghezze degli archi avranno le proprietà delle trascendenti ellittiche di prima specie.

Volendo far incominciare l' arco s della curva con $\theta = 0$, si prenderà

$$- F'(c) = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\tau}{\Delta}$$

per la costante arbitraria che entra nel secondo membro dell' equazione (37), e si scriverà

$$(38) \qquad s = \int_0^\tau \frac{d\tau}{\Delta} - F'(c) = \int_{\frac{\pi}{2}}^\tau \frac{d\tau}{\Delta} = F'(c) - \int_0^{\pi - \tau} \frac{d\tau}{\Delta}.$$

Questa curva, a doppia curvatura, presenta un singolar contrasto quando se ne faccia il confronto colla curva piana avente per coordinate ortogonali

$$x''' = \frac{1}{2c} \log \left\{ \frac{1 - c \cdot \cos\tau'}{1 + c \cdot \cos\tau'} \right\}; \quad y''' = \frac{1}{c} \cdot ax \cdot \left\{ \text{tang} = \frac{c}{b} \sin\tau' \right\},$$

per la quale si ha, siccome è noto,

$$s''' = \int_0^{\tau' - \frac{\pi}{2}} \frac{d\tau}{\Delta}$$

(Vedi Tomo 1° del *Traité des Fonctions Elliptiques de Legendre* pag. 40 e 41.).

Per far sì che si abbia $s = s'''$ si dovranno prendere le due ampiezze $\pi - \tau$, $\tau' - \frac{\pi}{2}$, tali che si abbia l'equazione

$$b \,\text{tang}\,(\pi - \tau) \cdot \text{tang}\left(\tau' - \frac{\pi}{2}\right) = 1,$$

poichè allora si ha

$$\text{F}'(c) = \int_0^{\pi - \tau} \frac{d\tau}{\Delta} + \int_0^{\tau' - \frac{\pi}{2}} \frac{d\tau}{\Delta}.$$

Ritornando alla prima delle tre curve prese in esempio, vuolsi osservare che, avendosi per essa,

$$\sin\Omega = \frac{\sqrt{a^2 \sin^2\theta - 1}}{\sqrt{a^2 - 1}}, \qquad \cos\Omega = \frac{a\cos\theta}{\sqrt{a^2 - 1}},$$

$$\sin\psi = \frac{-1}{a\sin\theta}, \qquad \cos\psi = \frac{\sqrt{a^2\sin^2\theta - 1}}{a\sin\theta}.$$

si avrà per la prima delle tre formole (28)

$$\cos\omega = x'' = \frac{\sqrt{a^2 - 1}}{a},$$

e per conseguenza $y''^2 + z''^2 = \frac{1}{a^2}$. Il luogo geometrico *dei poli* della curva rettificabile è adunque un piccolo circolo della sfera del raggio $\frac{1}{a}$, il di cui piano è perpendicolare all'asse delle x.

Ed avendosi per le equazioni (2) e (31)

$$\sqrt{dy^2 + dz^2} = \sqrt{d\theta^2 \cos^2\theta + d\varphi^2 \sin^2\theta} = \frac{\sqrt{a^2 - 1}}{a} \cdot ds,$$

ne consegue, che chiamando s_1 l'arco della projezione sul piano delle y, z della curva rettificabile descritta sulla sfera, si ha

$$s_1 = \frac{\sqrt{a^2-1}}{a} \cdot s\,.$$

Per essere costante il rapporto $\frac{s_1}{s}$, è chiaro, che la curva *rettificabile* diventa una *linea retta*, sviluppando la superficie cilindrica eretta normalmente al piano delle y, z sulla curva che ne è la projezione. Per questa proprietà è singolarmente agevolata la descrizione della curva sulla sfera, quando non si voglia far uso del piccolo circolo che ne è l' *evoluta sferica*.

Havvi un terzo modo di descrizione organica, che pel primo è stato riconosciuto da *Giovanni Bernoulli* (Vedi pag. 236 del Tomo terzo delle sue Opere.). Chi fisserà l'occhio e la mente sopra questo opuscolo di *G. Bernoulli* non potrà a meno di ravvisare quanto fosse, in quel tempo, difficile quella scelta nelle variabili, che salva le inutili complicazioni, anche per un uomo dotato di mirabile ingegno e fervida fantasía. Allora non era ancora del tutto compresa e sentita la risoluzione che stava preparando *Eulero*, surrogando l'analisi e la potenza delle sue trasformazioni ai ragionamenti più sensibili tratti dalla Geometria, o dalla Meccanica.

Rispetto alla curva definita per le equazioni (36) si ha

$$\sin\Omega = \frac{\sin\theta}{\sqrt{\sin^2\theta + c^2\cos^2.2\theta}}, \qquad \cos\Omega = \frac{c.\cos.2\theta}{\sqrt{\sin^2\theta + c^2\cos^2.2\theta}},$$

$$\sin\psi = \sqrt{1 - c^2\cos^2\theta}, \qquad \cos\psi = c\cos\theta\,;$$

d'onde si trae per le formole (28)

$$x'' = \frac{c.\cos\theta\,(1-3\sin^2\theta)}{\sqrt{\sin^2\theta + c^2\cos^2.2\theta}},$$

$$y'' = \frac{c.\sin\theta.\sin\varphi\,(3\cos^2\theta-1) - \sin\theta\cos\varphi.\sqrt{1-c^2\cos^2\theta}}{\sqrt{\sin^2\theta + c^2\cos^2.2\theta}},$$

$$z'' = \frac{c.\sin\theta.\cos\varphi\,(3\cos^2\theta-1) + \sin\theta\sin\psi.\sqrt{1-c^2\cos^2\theta}}{\sqrt{\sin^2\theta + c^2\cos^2.2\theta}}.$$

Sostituendo per φ il valore logaritmico in funzione di θ, precedentemente trovato, si avrà per l'istessa variabile θ le coordinate della curva che è il luogo geometrico dei poli.

Per applicare le precedenti formole alla curva conosciuta nella nautica sotto il nome di *Lossodromia* basterebbe osservare, che questa curva essendo, per sua natura, tale che interseca tutti i meridiani con angolo costante si ha, chiamando ω quest' angolo,

$$\frac{d\theta}{ds} = \cos\omega = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{d\varphi}{d\theta}\right)^2 \sin^2\theta}} .$$

Per modo che, le formole (15) e (16) danno

$$\operatorname{tang}\Omega = \frac{\operatorname{tang}\theta}{\sin\omega}, \qquad \sin\Omega = \frac{\sin\theta}{\sqrt{\sin^2\theta + \cos^2\theta \sin^2\omega}} .$$

L'arco s della curva numerato da $\theta = 90°$, ossia dall'equatore, è espresso per l'equazione $s = \frac{\frac{\pi}{2} - \theta}{\cos\omega}$: e la longitudine φ è basata colla latitudine $\frac{\pi}{2} - \theta$ per via dell' equazione

$$\varphi = -\operatorname{tang}\omega . \int \frac{d\theta}{\sin\theta} = \varepsilon - \operatorname{tang}\omega . [\log . \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\theta],$$

ε essendo una costante arbitraria che rappresenta la longitudine del punto iniziale della curva.

Le coordinate ortogonali x, y, z della lossodromia sono pertanto:

$$x = \cos\theta,$$

$$y = \sin\theta . \sin \left\{ \varepsilon - \operatorname{tang}\omega . \log . \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\theta \right\},$$

$$z = \sin\theta . \cos \left\{ \varepsilon - \operatorname{tang}\omega . \log . \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\theta \right\} .$$

Mettendo per θ il suo valore in funzione dello spazio per esso s, si avrà

$$\varphi = \varepsilon + \operatorname{tang}\omega . \log \left\{ \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{s}{2}\cos\omega\right) \right\} .$$

Mediante la tavola di *Legendre* si potrebbe facilmente ridurre in numeri questa formola.

§. V.

Rispetto alle curve descritte sopra superficie diverse dalla sferica, la posizione del centro della *sfera osculatrice* ed il suo raggio, possono essere analiticamente determinati colle seguenti formole. Siano

$$(39)\quad \begin{cases} (x'-x)\,dx + (y'-y)\,dy + (z'-z)\,dz = 0\,, \\ (x'-x)\,d^2x + (y'-y)\,d^2y + (z'-z)\,d^2z = ds^2, \\ (x'-x)\,d^3x + (y'-y)\,d^3y + (z'-z)\,d^3z = 3\,ds\,.\,d^2s\,, \end{cases}$$

le equazioni di tre piani consecutivi, normali alla curva.

Risolvendole rispetto ad $(x'-x)$, $(y'-y)$, $(z'-z)$ si trova, che fatto

$$V' = -X'\,d^3x - Y'\,d^3y - Z'\,d^3z\,,$$

si ha

$$(40)\quad \begin{cases} x'-x = \dfrac{ds^2.\,dX' - 3\,ds\,.\,dds\,.\,X'}{V'}\,, \\ y'-y = \dfrac{ds^2.\,dY' - 3\,ds\,.\,dds\,.\,Y'}{V'}\,, \\ z'-z = \dfrac{ds^2.\,dZ' - 3\,ds\,.\,dds\,.\,Z'}{V'}\,; \end{cases}$$

ove X', Y', Z' sono funzioni dei differenziali di x, y, z delle quali si ha l' espressione nel secondo paragrafo.

Ora, chiamando r il raggio della sfera osculatrice, cioe

$$r = \sqrt{(x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2},$$

ne risulterà l' equazione

$$(41)\quad \begin{aligned} V'^2.\,r^2 = {} & (ds)^4 \{ (dX')^2 + (dY')^2 + (dZ')^2 \} \\ & + 9\,(ds)^2\,(dds)^2\,(X'^2 + Y'^2 + Z'^2) \\ & - 3\,(ds)^3.\,dds\,.\,d\,.\{ X'^2 + Y'^2 + Z'^2 \}\,. \end{aligned}$$

Sotto questa forma non si vedrebbe facilmente, che per le curve descritte sulla sfera si deve avere r costante ed eguale al raggio

istesso della sfera. Ma le tre equazioni (39), dalle quali quest' ultima deriva, sono immediatamente soddisfatte, quando $x^2+y^2+z^2=1$, facendovi $x'=0, y'=0, z'=0$: ond' è palese, anche per l' analisi, ciò che la Geometria svela *a priori*, vale a dire la compenetrazione della sfera osculatrice colla data sfera.

§. VI.

Prima di por fine a questa Memoria farò osservare, che chi volesse prendere le mosse dalla formola generale

$$u=\frac{ds^2}{\sqrt{(ddx)^2+(ddy)^2+(ddz)^2-(dds)^2}}$$

per formare l' espressione del raggio assoluto del circolo osculatore per le curve descritte sulla sfera avrebbe un risultato assai meno semplice di quello che è dato, sia dalla formola (11), sia dalla formola (15). Infatti, adoprando le formole (3) si trova per $u=\sin\Omega$;

$$\sin\Omega=\frac{\left(\frac{ds}{d\theta}\right)^2}{\sqrt{P+Q\sin^2\theta+R\sin 2\theta-\left(\frac{dds}{d\theta^2}\right)^2}},$$

ove per brevità si è fatto

$$P=1+\left(\frac{dd\theta}{d\theta^2}\right)^2+4\left(\frac{d\phi}{d\theta}\right)^2,$$

$$Q=\left(\frac{d\phi}{d\theta}\right)^4+\left(\frac{dd\phi}{d\theta^2}\right)^2-2\left(\frac{d\phi}{d\theta}\right)^2,$$

$$R=2\,\frac{d\phi}{d\theta}\cdot\frac{dd\phi}{d\theta^2}-\frac{d\phi}{d\theta}\cdot\frac{dd\theta}{d\theta^2}.$$

Ed eliminando $\frac{ds}{d\theta}$, $\frac{dds}{d\theta^2}$ per le formole (1) e (13), si avrebbe

$$\sin\Omega=\frac{\left\{1+\left(\frac{d\phi}{d\theta}\right)^2\sin^2\theta\right\}^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{U}},$$

facendo

$$U=\left(1+\frac{d\phi^2}{d\theta^2}\sin^2\theta\right)\left(P+Q\sin^2\theta+R\sin 2\theta\right)-\left(\frac{ds}{d\theta}\cdot\frac{dds}{d\theta^2}\right)^2.$$

Le operazioni da farsi per ridurre questa formola alla forma di quella che si ha per l' equazione (15) farebbero conoscere, per la loro complicazione, quanto fosse infelice l' idea di applicare direttamente a questo caso la precedente espressione di u. La scelta idonea, sì delle formole che delle variabili, è sempre un punto essenziale nell'applicazione dei principj generali.

Per offrirne un esempio sopra queste istesse formole soggiungerò, che $f(\theta)$ essendo una data funzione di θ che rappresenta il raggio assoluto di curvatura di una ignota curva descritta sulla superficie della sfera; per determinarla, od almeno ridurne la ricerca alle quadrature, vi sarebbe sommo vantaggio adoprando la formola (16). Poichè avendosi $\sin\Omega = f(\theta)$, e per conseguenza

$$\operatorname{tang}\Omega = \frac{f(\theta)}{\sqrt{1-[f(\theta)]^2}},$$

si avrebbe d' un colpo

$$\frac{d\varphi}{ds}\sin^2\theta = -\int d\theta \sin\theta \,.\, \frac{\sqrt{1-[f(\theta)]^2}}{f(\theta)}.$$

Chiamando $F(\theta)$ il secondo membro di questa equazione, si avrà

$$\frac{d\varphi}{d\theta\sqrt{1+\left(\frac{d\varphi}{d\theta}\right)^2\sin^2\theta}} = F(\theta):$$

e di quì si trae

$$\varphi = \int \frac{F(\theta)\, d\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta\,[F(\theta)]^2}}.$$

Per altra via il problema non sarebbe così facilmente ridotto a questi termini.

DELLA MACRÌA
NUOVO GENERE DI PIANTE.

MEMORIA

DEL SIG. PROFESSORE

CAV. MICHELE TENORE

SOCIO ATTUALE

Ricevuta adì 15 Febbrajo 1847.

Fra gli svariati oggetti che di frequente riceviamo dal Brasile col favore delle relazioni che se ne trovano stabilite col nostro Orto Botanico, sul cadere del 1841, una collezione di semi ne veniva affidata al terreno tra i quali si faceva notare una grossa noce appartenente a pianta indefinita. Fin dal primo germogliamento di essa avvenuto nella susseguente primavera, così pel suo lento modo di crescere che per la consistenza che ne prendeva il piccolo fusticino, non si esitava giudicarla appartenente a pianta legnosa: ed in effetti in quel primo anno non essendosi alzata più di 10 centimetri, dopo le due foglie seminali, un'altra coppia di foglie ne metteva che si distinguevano per le notevoli dimensioni e pel vago colorito di bel verde lucido colle venature giallo-dorate. Nulla potevasi allora avventurare circa la classificazione di questa pianta, come ancora neppure alcun che ne riusciva conoscere ne' quattro anni susseguenti: comunque un bell' alberetto se ne fosse composto, adorno di rami e di foglie permanenti, che semprepiù la premura in noi ridestava di curarne la coltivazione e di studiarne i caratteri. Non si tralasciava in pari tempo di presentare il nostro alberetto a quanti distinti botanici sì nazionali che stranieri, che venivano onorandone delle loro visite, ed appena

qualche ravvicinamento di famiglia se ne poteva andar raccogliendo. Sempre con eguale ansietà tenendo dietro al suo crescere, comunque lentamente ne procedesse, attesa la qualità della pianta dichiaratasi affatto arborea, ne incuorava l'esempio di altre non poche simili piante intratropicali, che veggiamo metter fiori e frutti fin da' primi anni della loro vegetazione. Stando in tale aspettativa, ciascuno potrà intendere qual fosse la nostra gioja allorquando ai primi di Agosto dello scorso anno il giardiniere Antonio Giordano veniva ad avvertirne che l' alberetto innominato annunziava i suoi fiori. Di buon grado a tale piacevole avviso ne venivano per noi tollerate le sofferenze di quell' ardente temperie, che largo compenso ne offriva col promuovere l' infiorescenza di quell' alberetto non solo, ma di altre non poche rare piante che nella scorsa state per la prima volta abbiam veduto metter fiori e frutti.

Studiandone attentamente le caratteristiche per la facile marcescenza e caduta di tutt'i fiori vane speranze ne venivano concepite di vederne progredire la fruttificazione; che perciò compensandone alla meglio il difetto coll' osservarne l' ovario ingrandito dal microscopio, potemmo assicurarci che grande affinità la nostra pianta ne offriva con quelle della famiglia delle Ebenacee: comecchè per quanto andremo sponendone più appresso ad essa non meno che ad altra prossima non potesse esattamente riferirsi. Ricercandone quindi scrupolosamente tutti i generi che se ne trovavano registrati nel *Genera plantarum* dello Endlicher compresivi i tre supplementi che ne ha dato fuori fino all'anno 1843, non accadeva poterlo riferire ad alcun di essi, che perciò qual nuovo genere alle Ebenacee affine verremo descrivendolo.

Questo alberetto ha rami alterni e foglie grandi quasi quanto quelle dell'Arancio, della stessa figura ovale, alterne e così belle lucide e glabre, ma alquanto più spesse e quasi coriacee; esse hanno il contorno intatto e sol nella punta portano talvolta un leggiero incavo, sono di color verde mirto colle venature di color giallastro che diventa affatto dorato nella pagina inferiore,

dove il color verde è alquanto smorto. Più intenso il color d'oro si manifesta nel picciuolo che l'attacca ai rami, il quale non è più lungo di 10-15 centimetri. In cima de' rami ne vengono i fiori disposti quasi in corimbo sopra ramoscelli che si dividono irregolarmente; nell' individuo che n' è fiorito presso noi essi fiori sono stati al numero di sette. Il calice è monofillo a forma di bicchiere leggermente slargato in cima e segnato per lungo di altrettante costole quante ne sono le correlative parti del fiore, cioè da 5 ad 8. Alle stesse costole corrispondono altrettanti denti triangolari ineguali in profondità ed in larghezza, lunghi tutto al più tre millimetri: tutto il calice essendo lungo 18 millimetri dalla base che è di un bel color verde, tutto il resto della sua superficie va sfumandosi in giallo, terminando in cima nello stesso color d'oro de' picciuoli e delle vene delle foglie. Il margine de' denti anzidetti suol trovarsi imbrattato di un umor resinoso giallo-bruno, il quale quando il fiore è in boccia si raccoglie in una picciolissima gocciola che annunzia il prossimo spuntare della corolla che gli è sottoposta. Bello è il seguire lo svolgimento della corolla medesima, che col favore de' più infuocati raggi solari, dalle 10 al mezzodì, viene svolgendosi qual delicatissimo velo che in se stesso ne fosse rimaso aggomitolato e ripiegato in cento diversi sensi. La disposizione delle sue parti prima dello svolgimento corrisponde alla *preflorazione duplicato-convolutiva*. Venuto fuori del calice, il tubo della corolla si prolunga pel doppio della lunghezza di esso, e si continua col lembo, che dovrà in poco d'ora distendersene e svilupparsi in superficie leggermente concava, che ne rimane per ogni verso ornata di graziose pieghette serpeggianti. Giunta al suo completo sviluppo il lembo della corolla mostrasi diviso in altrettanti larghi lobi quanti se ne possono numerare ne' denti del calice, cioè da 5 ad 8. Pari alla qualità del dilicato velo che ne raffigura si è la sua bianchezza, e quindi la sua fralezza: a tal che la permanenza di essa non oltrepassa l'altro meriggio. Profumato di gratissimo odore, poco dissimile da quello della *Magnolia grandiflora*, maggior fragranza il nostro fiore nelle ore notturne tramanda.

Studiar volendone gli organi sessuali, ci troveremo dapprima 5 ad 8 stami, che con cortissimi filamenti si attaccano nell' interno del tubo presso la bocca della corolla; le antere sono lineari, lunghe presso 4 millim. e larghe meno di 1, esse si aprono per un solco longitudinale dal lato interno che guarda il centro del fiore; sono perciò *introrse*. Il polline osservato col microscopio si trova composto di globuli ovoidali troncati alle due estremità; essi diventano globosi coll'inumidirli. Il pistillo è impiantato su di un disco carnoso diviso in lobi e che va considerato qual nettario, affatto simile a quello che ho osservato nella mia *Portaea*, ossia nella supposta *Juannulloa aurantiaca*, ed al par di quello ne somministra l'umore resinoideo che abbiam veduto annunziare la comparsa della corolla. L'ovario del pistillo è di figura ovata e quadriloculare; esso si assottiglia in cima, dando origine a tre stili di color rosso che non aggiungono la lunghezza del tubo della corolla, e che si dividono in cima, ciascuno in due stimmi di color giallo; essi dal lato interno sono seminati di papille carnosette. L'ovario è quadriloculare, e sembra portare un solo seme per ogni loculamento. Del frutto non puossi dir altro, e soltanto rammentare ne possiamo la qualità legnosa del suo guscio.

Per la classificazione naturale, la nostra pianta potrebbe riferirsi alla classe xxxviii del sistema di Endlicher denominata delle *Petalanthae*, ma tra le famiglie che vi si comprendono non ve n'è alcuna che possa esattamente convenirle. Un posto intermedio se le potrà allogare tra le *Sapotacee* e l' *Ebenacee*, ma più a queste ultime si avvicina perchè priva affatto di sugo latticinoso, e si allontana da entrambe per la presenza del disco sul quale sta impiantato il pistillo, del quale disco così le *Sapotacee* che *l'Ebenacee* sono sprovvedute. A queste ultime più che alle prime la *Macrìa* si avvicina benanco, per lo stilo e gli stimmi divisi, i quali sono affatto indivisi nelle *Sapotacee*. L' ovario, la disposizione degli ovuli e la qualità ossea del guscio della semenza sono caratteri che d'altronde ha essa in comune colle *Sapotacee*.

Anche più incerto ne sarebbe il posto nella classificazione artificiale linneana, per l' indeterminato numero degli stami: ben vero volendosi tener conto delle affinità della *Macrìa* con altri generi, dove simili anomalie s' incontrano, potrebbe dessa riferirsi alla classe *Ottandria*: ordine *diginia*.

Ho intitolato questo genere al Dottor Saverio Macrì, Professore emerito di Storia Naturale della Regia Università di Napoli, unico superstite, per quanto mi sappia, de' corrispondenti del gran Linneo. Le prime pubblicazioni del sullodato Nestore de' Naturalisti datano dal 1778, nel quale anno egli dava fuori le sue osservazioni sulle *Meduse*, delle quali il *pulmone marino* (Medusa pulmo) con altre due specie la *Medusa tyrrhena* e la *M. tuberculata* trovansi registrate nel *Systema Naturae* (14ª. edizione) come scoperte dal Macrì, il quale le avea illustrate in quel lavoro. Troppo lungo e fuor di luogo sarebbe il voler rammentare i servigj che in sì lungo periodo il Macrì ne ha renduto alla scienza; non vorremo però tacere, come nel possesso delle sue facoltà fisiche e mentali segga egli tuttora socio anziano della classe Fisico-medica nella nostra Reale Accademia delle Scienze, dove ultimamente veniva leggendo altra sua Memoria sullo stesso argomento col quale 70 anni fa esordiva egli nella scientifica carriera; cioè sulla *Doris puteolana!* (1)

MACRÌA

Calyx liber cyatiformis irregulariter 5-8 *dentatus. Corolla gamopetala, ipogyna, subipocrateriformis, limbo* 5-8 *lobato, plicis flexuosis, a centro ad marginem undique decurrentibus. Stamina* 5-8 *ad tubi faucem inserta, filamenta brevissima, antherae lineares biloculares introrsae patentes, longitudinaliter dehiscentes: ovarium liberum quadriloculare disco carnoso* 5 *lobato insidens; styli tres longitudine tubi corollae, ad basim coaliti stigmata*

(1) Rendiconto delle adunanze e de' lavori della Reale Accademia delle Scienze n° 28 e 29 Luglio ed Ottobre 1846 (pubblicato in Gennajo 1847 p. 272 con figura).

bifida, facie interiore glandulosa. Drupa? .... Semen-Nux cortice ligneo tecta.

Macrìa callipticantha.

Arbor; foliis alternis ovalibus integerrimis, rachi et nervis subtus aureis, utrinque glaberrimis, floribus corymbosis terminalibus, pedunculis ebracteatis, corollis albis, pulcherrime flexuoso-plicatis. Ten.

Patria intertropicalis. — Floret augusto.

MANIPOLO PRIMO DI PIANTE DELLA LIGURIA

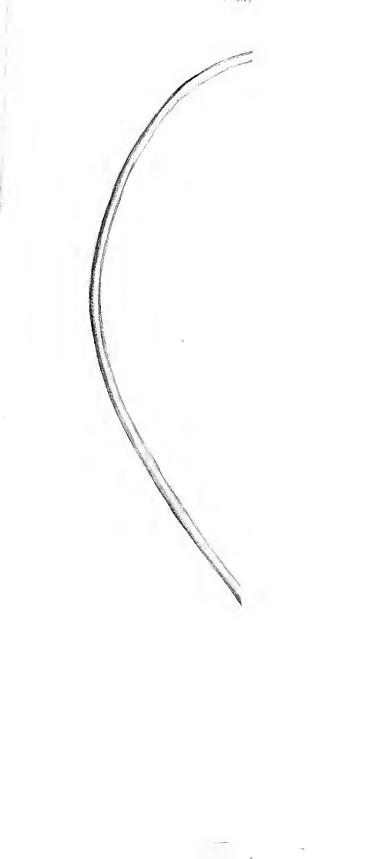
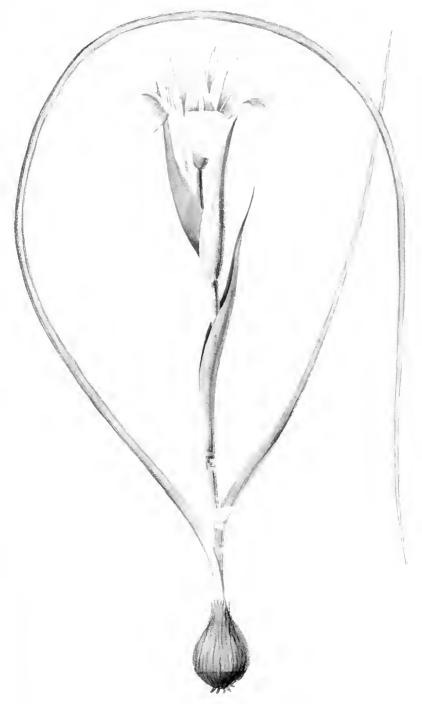
MEMORIA

DEL SIG. PROFESSORE

CAV. ANTONIO BERTOLONI

SOCIO ATTUALE

Ricevuta adì 26 Febbrajo 1847.

La Liguria è una parte dell' Italia, nella quale nascono le piante più rare della nostra Flora. La sua felice posizione sul mare rivolta al mezzogiorno, e difesa al settentrione dall' alta giogaia dell' Apennino e delle alpi marittime fa sì, che in essa il verno sia più temperato, che altrove, e l' estate dolcemente rinfrescata dal vento di mare, per lo che vi si incontrano piante della Spagna, della Provenza, della Corsica, della Sardegna, dell' Affrica settentrionale, dell' isola di Creta, della Sicilia e della Calabria, non che alcune specie sue proprie. Al certo riuscirà utile per la scienza, e grato ai Botanici il saggio, che mi accingo a darne. Lo distribuirò in quattro manipoli, ne' quali esporrò la descrizione e la storia succinta delle specie aggiungendovi le loro figure per la maggior parte disegnate e colorite al naturale dal Rev. Padre De Negri dell' Oratorio. Questi è un zelantissimo coltivatore della botanica patria, e già da molti anni impiega le sue cure nel fare le figure delle piante della Liguria. Trovandomi io in Genova nell' occasione dell' ottavo Congresso degli Scienziati Italiani ebbe la gentilezza di farmi vedere que' suoi lavori, e volle ancora regalarmi un dato numero di tavole a mia scelta, le quali saranno il più bell' ornamento di questi manipoli. Con ciò intendo dargli un attestato della mia più sincera gratitudine, e colgo altresì l' occasione di far conoscere ai Botanici il suo nome, giacchè egli per eccessiva modestia si è tenuto sino ad ora celato.

Iride Noce di terra
Iris Sisyrinchium L.

pinx.

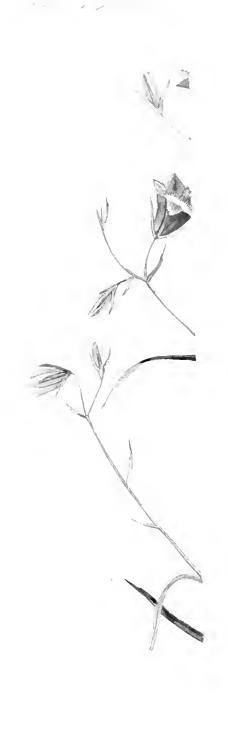
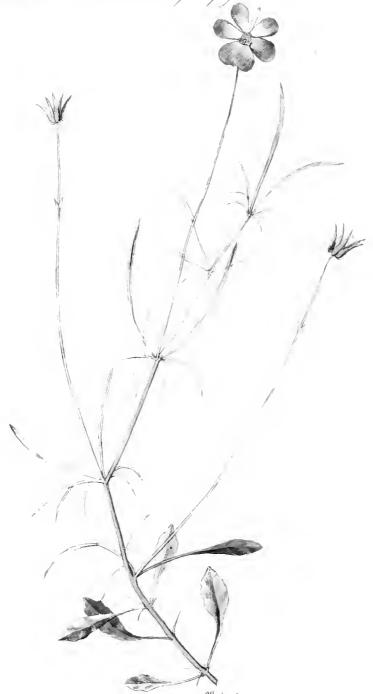
Primavera montanina colorosa
Primula suaveolens = Bert =

Nigi del et pinx — Lit. Bettini

Campanella Soldanella

(Viola sbrandellata)
Viola heterophylla — Bert

Viola sbrandellata var. β
Viola heterophylla β Bert

Bell

1. IRIDE *Giuncastrello*: foglie lineari, canalicolate-accartocciate, all' apice subulate; fusto uni-bifloro; tubo della corolla allungato. *Tav.* 1.

Iris juncea *Bert. Fl. Ital.* 1. *p.* 244. *n.* 11. coi sinonimi. *Poir. Voyag. en Barb.* 2. *pag.* 85. fig. *Enc. méth. bot. éd. de Pad. tom.* 3. *p.* 292. *n.* 45. *Dietrich. in Willd. Sp. pl. ed.* 6. *tom.* 1. *par.* 1. *sect.* 2. *p.* 437.

I. bulbosa lutea inodora minor *C. B. P. p.* 39. *n.* 2.

Xiphion minus, flore luteo, inodoro *Tourn. Inst. rei herb.* 1. *p.* 346. *Shaw. Specim. n.* 628.

Iris bulbosa angustifolia flore flavo, medio albo *Grisl. Virid. Lusit. edit. Ulyssip., et edit. Veron. p.* 89.

Perenn. Nasce a Genova nelle colline d' *Oreggina*, e in quelle fuori della porta degli *Angeli.* Fiorisce di Aprile.

Bulbo ovato, coperto di tonache di colore scuro rossigno, aride, scariose. Fusto cilindrico, diritto, alto sino ad uno o due piedi, grosso quanto una penna di colombo, o una penna da scrivere, articolato, fogliuto, terminato da uno o due fiori. Foglie lineari, canalicolato-accartocciate, subulate all'apice, rigate, colla base inguainanti il fusto, alterne, le inferiori lunghe quanto il fusto, ed anche più, le superiori successivamente più corte. Spata di due pezzi disuguali, ovato-lanciolati, appuntati, concavo-canalicolati, ventricosi, carenati, membranacei nel margine superiore, e nella punta. Corolla gialla, grande quanto quella dell'*Iris Pseudo-Acorus* L. Tubo lungo, gracile. Le tre lacinie esterne del lembo più grandi, ricurve, coll' ugna cuneiforme, assai stretta, e colla lamina grande, ovata, intera, o smarginata. Le tre lacinie interne minori, diritte, strette, lanciolate, ottuse. Stimmi bifidi, colle lacinie acute, nel margine esterno dentellate. Cassula sessile dentro la spata, triangolare, triloculare, trivalve. Tutta la pianta è glabra.

Carlo Clusio fu il primo, che conobbe e descrisse questa pianta nelle *Cur. post. p.* 46., ma non ne diede la figura, sebbene avesse veduta la pianta viva, la quale gli nacque da bulbi, che aveva ricevuti dall' Affrica settentrionale. Linneo la trascurò;

ma il Poiret e il Desfontaines avendola di nuovo trovata nell' Affrica la descrissero meglio, e ne diedero la figura, e segnatamente quella del Desfontaines fu assai buona. Dopo ciò la specie fu ammessa da tutti i botanici.

2. IRIDE *Noce di terra*: bulbo globoso, coperto di tonache filamentoso-reticolate; foglie lineari, canalicolate, più lunghe del fusto; fiori solitarj, o più assieme, spigati *Tav.* 2.

Iris Sisyrinchium *Sp. pl. p.* 59. *Bert. Fl. Ital* 1. *p.* 244. *n.* 12. coi sinonimi.

Perenn. Nasce a Genova nelle colline fuori della porta degli *Angeli*. Fiorisce d'Aprile e Maggio.

Bulbo globoso, ora solitario, ora due soprapposti l'uno all'altro, coperti da tonache filamentose, con filamenti reticolati; tra le fibre della rete escono radici fibrose, flessuose, più o meno ramose. Fusto compresso-tondeggiante, diritto, articolato, tra articolo e articolo leggieramente flessuoso, lungo da una spanna a nove pollici, semplice, o di rado con un ramo laterale. Alla base lo rivestono una, o due guaine troncate. Foglie poche, lineari, appuntate, compresso-canalicolate, qualche volta attorcigliate, esternamente rigate e di un bel verde, dentro il canale pallide, con base inguainante, lunghe quanto il fusto, ed anche di più. Fiore ora solitario, ora più d'uno, e sino a sei, alterni, spigati, tra loro vicini. Spata uniflora, fatta di due pezzi bislungo-lanciolati, appuntati, concavo-canalicolati, acutamente carenati, rigati, disuguali, verso l'apice membranaceo-trasparenti. Qualcheduna delle spate inferiori de' fiori spigati sovente è sterile, e talora si prolunga in una punta fogliata, corta e sottile. Corolla cerulea, o ceruleo-violata, colle lacinie di uguale lunghezza, tre di queste più larghe, di colore più carico e con vene anche più cariche; la loro ugna è stretta e canalicolata; la lamina è ricurva, fatta a spatola, intera, o smarginata; nella faccia superiore dalla sua base sino quasi alla metà porta nel mezzo una macchia gialla, glabra. Le altre tre lacinie sono più strette, diritte, lanciolate, ottuse, o acute, canalicolate. Filamenti cerulei, lunghi quanto l'antera. Ovajo con tre angoli ottusi, e tre solchi. Stimmi profondamente bifidi,

nella loro parte inferiore ricurvi, e adagiati sulle lacinie maggiori della corolla, raddirizzati cogli apici, i quali nel margine esterno sono crenellati. Il fiore si apre alle ore dieci della mattina, e si chiude alle due dopo il mezzogiorno. È fugace; ma io l'ho veduto durare per tre giorni aprendosi, e chiudendosi nelle ore indicate.

Anche quì Carlo Clusio fu il primo, che facesse conoscere questa pianta. Egli la trovò nel Portogallo e nella Spagna, e la distinse in due varietà maggiore, e minore. Parlò di amendue nella *Rar. stirp. per Hisp. observ. hist. pag.* 279-281., e ivi diede la figura della varietà minore alla p. 281. Di poi ripetè le stesse cose nella *Hist. pl. lib.* 1. *p.* 216., ove diede la figura dell'una e dell'altra. Dice, che nel Portogallo i fanciulli mangiano volontieri il bulbo della maggiore, per lo che giudicò, che questa pianta fosse il Sisirinchio di Teofrasto *Hist. lib.* 7. *cap.* 13., il quale si espresse così: *Peculiare Sisyrinchio datum est, ut una radix primo augeatur hyeme; tum ineunte vere, quod in imo excrevit, contrahatur, superumque crescat, quod manditur.* Ma siccome anche altri bulbi di questa fatta si mangiano, nè Teofrasto dichiarò maggiormente la sua specie, così quella pretesa identità rimase dubbiosa, e lo Stapelio comentando il passo di Teofrasto opinò, che quel Sisirinchio corrispondesse invece alla *Romulea Columnae* Fl. Ital. 1. p. 224., della quale diede pur anche la figura *Theophr. Hist. pl. cum Bodaeo a Stapel p.* 880.

3. PRIMAVERA *montanina cotonosa*: foglie cordato-ovate, picciolate, di sotto bianco-cotonose; ombrella semplice, di più raggi, calici lunghi, campanolati, quinquefidi, colle lacinie ovato-lanciolate, appuntate; lembo della corolla concavo *Tav.* 3.

Primula suaveolens *Bert. Fl. Ital.* 2. *pag.* 375. *n.* 4. coi sinonimi.

Perenn. Nella Liguria orientale si trova nel monte *Porcile* nel distretto di Chiaveri, e nell'Apennino ad *Acqua fredda*, nella Liguria occidentale nel monte *Ramazzo* dietro a Sestri di ponente, e nelle alpi della *Scaggia* dietro a Pegli. Ne'luoghi bassi fiorisce d'Aprile, negli elevati di Giugno.

Radice cilindrica, crassa, corta, carnosa, all' apice smozzicata, lateralmente guarnita di fibre numerose, lunghe, discendenti. Foglie tutte radicali, cordato-ovate, ottuse, lungamente picciolate, nel margine roso-dentate, e ripiegate, uninervi, reticolate di vene, bollato-rugose, di sopra verdi e pubescenti, di sotto mollemente bianco-cotonose, e tanto più fittamente, quanto più nascono in luoghi alpestri, elevati. Piccioli alati, con ale roso-dentate, e ripiegate nel margine. Scapi uno, o più dalla stessa radice, cilindrici, grossetti, diritti, pubescenti, più lunghi delle foglie, di circa nove pollici. Ombrella terminale, semplice, con raggi da cinque a dieci. Fogliette dell' involto piccole, lanciolato-lineari, appuntate, disuguali, intere, pubescenti, assai più corte dell' ombrella. Raggi grossetti, disuguali, pubescenti, d' ordinario più corti del calice, ma talora uguali, o un poco più lunghi, altri diritti, altri curvi. Calice grande, campanolato, lungo, pubescente, biancastro, pentagono, quinquefido, colle lacinie ovato-lanciolate, appuntate, diritte. Corolla imbutiforme. Tubo lungo quanto il calice, ma assai più angusto di esso. Fauce dilatata, emisferica, o bislunga. Lembo piccolo, o mediocre, concavo, giallo, con cinque macchie di color d' oro intorno alla fauce, quinquefido, colle lacinie fatte a cuore rovesciato. Stami piantati nella fauce della corolla. Stilo, che si allunga sino a raggiugnere la fauce e gli stami. Stimma fatto a capolino. Cassula bislunga, che si apre all' apice con otto denti. I fiori mandano un grato odore ne' luoghi alpestri freschi, ma lo perdono ne' luoghi riscaldati dal sole; nelle piante trasportate ne' giardini hanno quest' odore di buon mattino, e lo perdono quando s' alza il sole.

La *Primula suaveolens* è perfettamente identica colla *Primula Columnae* Ten., nè si comprende, perchè nel *De Cand. Prodr. tom.* 8. *p.* 36. sia stata riputata diversa. Molto meno poi si comprende, perchè nello stesso *Prodr.* la *Primula suaveolens* sia stata riferita alla *Primula officinalis* Jacq., e la *Primula Columnae* alla *Primula elatior* Jacq. Pare, che l' autore di quelli articoli non abbia veduta la nostra pianta, e che abbia preso per essa qualche scherzo della *Primula veris*, o della *Primula*

elatior; ma la forma, e il cotone delle foglie, e la grandezza e incisioni del calice sono cose ben diverse nella *Primula suaveolens*; mi lusingo poi di avere chiarito a sufficienza nella Flora Italiana tutte le anzidette specie. Del resto Fabio Colonna fu il primo, che conoscesse la *Primula suaveolens*, della quale diede la figura nell'*Ecphr.* 1. *p.* 256. La trovò nelle montagne degli Equicoli; ma posso accertare, che è comune nell' alto di tutto l'Apennino. Non pare, che si estenda molto fuori dell' Italia. Ne posseggo un solo esemplare raccolto a Burgos nella Spagna dal Cav. Gussone.

4. VILLUCCHIO *tricolorato maggiore*: foglie inferiori ovali al rovescio, le superiori bislungo-lanciolate, tutte ottuse; peduncoli solitarj, ascellari, uniflori, con brattee lineari-filiformi; calici irsuti, con lacinie bislunghe, all'apice rotondate con punterella nel mezzo *Tav.* 4.

Convolvulus pseudo-tricolor *Bert. Fl. Ital.* 2. *p.* 450. *n.* 14. col sinonimo.

Ann. Si trova a Genova nelle colline di *S. Bartolommeo.* Fiorisce nell' Aprile e Maggio.

Fusto piuttosto crasso, rotondo-angoloso, lungo anche un piede, giacente-ascendente, o diritto. Foglie inferiori ovali al rovescio, o lanciolate al rovescio, all' apice rotondate, e talora smarginate, le superiori bislungo-lanciolate, ottuse. Peduncoli solitarj, ascellari, uniflori, sottili, sopra la metà guarniti di due piccole brattee lineari-filiformi, alterne, nel margine membranacee, fruttiferi ricurvi, gli inferiori alquanto più lunghi delle foglie, i superiori uguali ad esse, o più corti. Calice corto, campanolato, irsuto, colle lacinie ovali-bislunghe, all' apice rotondate, e sormontate da una punterella nel mezzo. Corolla di mediocre grandezza, assai più lunga del calice, trochiforme-campanolata, di tre colori, nel fondo gialla, nel mezzo bianca, nell' esterno cerulea, varia coll'essere di due colori, cerulea e bianca, e talora ancora è tutta bianca, nel margine porta cinque angoli poco sporgenti, e nell'esterno ha fascie longitudinali pelose. Stami un pochetto più lunghi del calice. Stimma profondamente bifido. Tutta la pianta è quasi irsuta.

Io fui il primo a mostrare nella Flora Italiana l. *c.*, che il *Convolvulus pseudo-tricolor* era una specie nuova, ed ora sono il primo a darne ancora la figura. Dal Prof. Viviani fu preso per il *Convolvulus tricolor* L.; ma al certo ne è diverso per essere più robusto, più alto, meno irsuto; inoltre la forma delle lacinie del calice del *Convolvulus tricolor* L. è di tutt'altra maniera, perchè le medesime sono lanciolate, strette, molto appuntate, e guarnite nel margine di lunghi cigli.

5. CAMPANELLA *Soldanella*: foglie radicali cordato-ovate, o reniformi, con pochi denti a sega, le superiori lineari, o lanciolate, intere, o con segature; fiori solitarj, o pannocchiuti; lacinie calicine filiformi; corolla trochiforme-campanolata *Tav.* 5.

Campanula rotundifolia *Sp. pl. p.* 282. *Bert. Fl. Ital.* 2. *p.* 463. *n.* 5. coi sinonimi.

C. sabatia *De Not. Prosp. della Fl. Ligust. p.* 35. *et* 52. *n.* 6. pianta lussureggiante.

Perenn. Nella Liguria orientale nasce a *S. Stefano d'Aveto*, nella Liguria occidentale nelle rupi tra *Noli* e *Vado*, e ad *Onzo* nel monte d'*Aquila*. Fiorisce di Luglio e Agosto.

Radice fusiforme, o fusiforme-ramosa, ora sottile, ora crassa e carnosa, dal collo della quale ordinariamente nascono più fusti a modo di cespuglio, di rado solitarj, giacenti-ascendenti, o diritti, sottili, angolosi, glabri, pelosi, o vellutati spezialmente nella parte inferiore, lunghi da un pollice a due piedi, ora semplici, uniflori, ora ramoso-pannocchiuti, con rami ascellari, i quali portano da uno a tre fiori. Foglie radicali, e della base del fusto cordato-ovate, o reniformi, picciuolate, acute, con poche segature nel margine, o anche leggieramente crenate, le successive romboidali-ovate, le une e le altre fugaci. Le restanti foglie del fusto d'ordinario sono lineari, anguste, sessili, patenti, o patenti-ricurve, glabre, pelose, o vellutate, di rado scherzano coll'essere bislungo-lanciolate, o lanciolate, guarnite di segature, le inferiori picciuolate. Fiori di mediocre grandezza, sebbene anche in questa variabili, diritti, o curvi. Calice aderente, trochiforme, con cinque angoli ottusi, con dieci nervi, sovente asperso di granellini globosi, di rado glabro, terminato

da cinque lacinie lineari-filiformi, per lo più corte, ma talora allungate sino a superare ancora la corolla. Corolla trochiforme-campanolata, ceruleo-violata, alle volte bianca, intagliata di cinque lacinie ovate, acute, ricurve. Stami più corti della corolla, nati all' apice di una squama bislunga, densamente cigliata. Stilo nella parte superiore peloso per lungo tratto. Stimma trifido, coi segmenti, ricurvi. La cassula si apre superiormente con tre pori-laterali.

Nessuna specie è più variabile di questa. Io ne feci portare piante vive dall' Apennino Bolognese nell' orto botanico di Bologna; queste allora avevano fusti assai corti, con uno o due fiori; negli anni successivi ne uscirono fusti lunghi sino a due piedi, e ramoso-pannocchiuti. Dalla sua varianza sono derivate molte false specie, ed anche la *Campanula sabatia* De Not. appartiene alla varietà lussureggiante della medesima. La figura, che do nella tav. 5., è presa dall'esemplare della *Campanula sabatia.*

Pare, che il Cesalpino fosse il primo a parlare della *Campanula rotundifolia* L., se ad essa si deve riferire con Gaspare Bauhino *Pin. p.* 93. *n.* 22. il *Phyteuma..... planta quaedam dodrantalis in montibus Cesalp. De pl. lib.* 9. *cap.* 30. *p.* 386. Certo è, che dal Gesner in poi fu nota ai botanici, e ricevuta da tutti i sistematici.

6. VIOLA *sbrandellata*: foglie inferiori ovate, crenate, le superiori lineari, lunghissime, intere; stipole palmate, con lacinie lineari, allungate; sprone subulato, ordinariamente più lungo della corolla *Tav.* 6.

Viola heterophylla *Bert. Fl. Ital.* 2. *p.* 715. *n.* 13. coi sinonimi, escluso quello del Reichenbach.

β foglie superiori del fusto lanciolate, acute, dentate *Tav.* 7.

Viola heterophylla *β Bert. Fl. Ital.* 2. *p.* 716.

V. declinata *Reich. Cent.* 13. *p.* 5. *tab.* 20. *fig.* 4516.

Perenn. La trovai nelle alpi della *Scaggia* dietro *Pegli* nella Liguria occidentale. Nasce ancora nell' Apennino della Liguria orientale a *S. Stefano d'Aveto.* La varietà *β* è stata raccolta dal P. Negri nella Liguria occidentale, ma vi è rara, mentre

si trova frequente nei monti intorno al lago di Como. Fiorisce nel Maggio e Giugno.

Radice ramosa. Fusto ottusamente triangolare, nella parte inferiore sdraiato, dalla quale spesso mette radici, che penetrano tra le fessure delle rupi, superiormente ascendente, talora molto ramoso; la sua lunghezza passa da un pollice ad un piede. Foglie radicali, e cauline inferiori più o meno lungamente picciuolate, ovate, oppure ovato-bislunghe, ottuse, crenate. Alla base de' loro piccinoli è una stipola per parte, ora intera, ora con poche incisioni, larghe, lineari, più corte che nelle altre stipole. Foglie cauline superiori lineari, angustissime, ed anche più alla base, lunghissime, talora sino a due pollici, intere, di rado con qualche intaccatura. Le loro stipole sono profondamente palmate, con tre o quattro lacinie lineari, angustissime, acute, intere, lunghe, e la terminale anche di più. Fiori ora pochi, ora più numerosi in un fusto. Peduncoli solitarj, ascellari, uniflori di lunghezza variabile, e talora lunghi anche quattro pollici, il più delle volte più lunghi delle foglie. Sopra la loro metà portano due picciole brattee membranacee, intere, o dentate. Foglioline del calice lanciolato-lineari, appuntate, intere, o con qualche crena leggiera; la loro orecchia discendente è troncata, e talora disugualmente dentata. Corolla grande, senza odore, violata con una piccola macchia gialla, ovata nella base del petalo speronato; trovasi anche tutta bianca. Petalo speronato più largo, fatto a cuore rovesciato, alla base cuneato, la smarginatura ora è più, ora meno incavata con picciola punterella nel mezzo. Gli altri petali sono ovati a rovescio, interi, o appena intaccati; i due vicini al petalo speronato sono barbati alla base. Sperone subulato, retto, d'ordinario più lungo della corolla, di rado uguale, o più corto. Le appendici di due stami sono lunghissime, incrocicchiate a guisa di tanaglia, e scendono sin quasi alla metà dello sperone. Antere bianco-verdognole, terminate da una cresta di color di ruggine. Stilo corto. Stimma fatto a capuccio, lateralmente rostellato, dentro la cavità minutamente papilloso. Cassula ottusa, e ottusamente

triangolare, glabra, lunga quanto il calice. Tutta la pianta è glabra, o con qualche pelo nelle foglie e nelle stipole.

La varietà β si distingue per le foglie superiori del fusto lanciolate, dentate, e per il fiore più piccolo.

Le località, che il Reichenbach assegnò alla sua *Viola valderia* Exc. 3. p. 709. n. 4513. eccettuata quella delle alpi di *Valdieri* in Piemonte, ed anche i caratteri principali, coi quali la distinse, furono cagione, che nella *Fl. Ital. tom.* 2. *p.* 716. io la credessi identica colla mia *Viola heterophylla*; ma di poi il Reichenbach avendo data la figura della *Viola valderia* nella *Cent.* 13. *p.* 5. *tab.* 19. *fig.* 4513. vidi, che essa era diversa, e corrispondeva alla mia *Viola cenisia* β *Fl. Ital.* 2. *p.* 710., e perciò alla vera *Viola valderia* dell'Allioni. In queste due specie non è al certo da fare molto caso della lunghezza dello sperone, perchè essa è variabile, e per quanto la *Viola valderia* nello stato magro si avvicini alla *Viola heterophylla*, e segnatamente alla varietà β, pure se ne distingue sempre per le foglie superiori del fusto lanceolate al rovescio, ed ottuse, mentre tanto nel tipo specie, che nella varietà β della *Viola heterophylla* queste sono sempre acute, e nella varietà β sono esattamente lanciolate, e non lanciolate al rovescio. Posseggo molti esemplari della *Viola valderia*, e alcuni assai lussureggianti; ma nessuno va nella *Viola heterophylla*.

Io fui il primo a far conoscere questa specie nelle *Rar. Ital. pl. dec.* 3. *p.* 53. *n.* 3. La figura, che di poi ne diede il Pio *De Viol. p.* 34. *n.* 35. *tab.* 3. *fig.* 2. fu ricavata da un magro esemplare, che io stesso avevo mandato al Balbis, e siccome sino ad ora non se ne ha alcun' altra, così stimo conveniente presentarne una tanto del tipo specie, che della varietà β. I botanici di Germania non mi sembrano aver colto giusto intorno alla *Viola heterophylla*, e certamente hanno confusa, o amalgamata con essa la *Viola valderia*, lo che non va bene.

NOTA

SULL' ESPRESSIONE DEL VOLUME TERMINATO DALLA SUPERFICIE DI QUARTO ORDINE, LUOGO GEOMETRICO DELLA PROJEZIONE ORTOGONALE DEL CENTRO DELL' IPERBOLOIDE A DUE FALDE SU I PIANI TANGENTI

DI BARNABA TORTOLINI

PROFESSORE DI CALCOLO SUBLIME NELL' UNIVERSITÀ DI ROMA

SOCIO ATTUALE

Ricevuta il 7 Dicembre 1847.

1°. In una mia Memoria pubblicata nel Tomo 31° del Giornale del Signor Crelle di Berlino, ho espresso il volume del solido terminato dalla superficie di quarto Ordine, luogo geometrico della projezione ortogonale del centro dell' Iperboloide a due falde su i piani tangenti, per mezzo di un Integrale definito semplice senza avvertire, che questo integrale può ridursi ai trascendenti ellittici. Mostrare come possa effettuarsi una tal riduzione è il principal oggetto di questa Nota. Prima per altro accennerò per maggior chiarezza alcune cose esposte in detta Memoria.

2°. L' equazione dell' iperboloide a due falde con l'origine al centro, e riferita agli assi principali $2a$, $2b$, $2c$ nella direzione delle coordinate x, y, z, sarà

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$$

ove $2c$ rappresenta l' asse trasverso. Combinando convenientemente l' equazione del piano tangente, e della perpendicolare abbassata dal centro su questo piano, otteremo, come ho fatto vedere nella citata Memoria, l' equazione della nuova superficie projezione del centro su i piani tangenti: questa sarà

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = c^2 z^2 - a^2 x^2 - b^2 y^2.$$

Una tal superficie dotata di centro, e limitata in tutte le direzioni è somigliante a quelle, che nelle figure curvilinee ha la *lemniscata*, ed il centro sarà un punto doppio della superficie ove passeranno due piani tangenti. Per le sezioni principali nei piani xz, yz otteniamo due curve di quarto ordine

$$(x^2 + z^2)^2 = c^2 z^2 - a^2 x^2, \quad (y^2 + z^2)^2 = c^2 z^2 - b^2 y^2$$

le quali sono il luogo geometrico della projezione ortogonale del centro di due iperbole sulle sue tangenti: queste iperbole sono evidentemente due sezioni principali dell' iperboloide a due falde. Per la sezione principale nel piano xy si avrà la curva imaginaria

$$(x^2 + y^2)^2 = - a^2 x^2 - b^2 y^2$$

il che prova essere il centro un punto dal quale partono le due superficie chiuse eguali, e simili fra di loro. È facile dimostrare che gli angoli α, β, γ formati dal piano tangente la superficie nel centro con i tre piani yz, xz, xy sono determinati pel doppio sistema di valori

$$\cos \alpha = \pm \frac{a}{\sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)}}, \quad \cos \beta = \pm \frac{b}{\sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)}}$$

$$\cos \gamma = \frac{c}{\sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)}}$$

quindi il centro è un punto doppio. Se alle coordinate ortogonali x, y, z si sostituiscano le polari r, p, q; ponendo

$$z = r \cos p, \quad x = r \operatorname{sen} p \cos q, \quad y = r \operatorname{sen} p \operatorname{sen} q$$

avremo per l' equazione polare della superficie

$$r^2 = c^2 \cos^2 p - a^2 \operatorname{sen}^2 p \cos^2 q - b^2 \operatorname{sen}^2 p \operatorname{sen}^2 q$$

della quale faremo uso per la risoluzione del problema propostoci.

3°. La formola per la cubatura dei solidi in coordinate polari è

$$V = \tfrac{1}{3} \int\int r^3 \operatorname{sen} p \, dp \, dq.$$

In essa sostituendo il trovato valore di r, si ha

$$V = \frac{1}{3} \int\int \text{sen} p \, dp \, dq \sqrt{(c^2 \cos^2 p - a^2 \text{sen}^2 p \cos^2 q - b^2 \text{sen}^2 p \, \text{sen}^2 q)^3}.$$

Per estendere l' integrale all' intera superficie dovremo cercare la condizione, a cui è soggetto il valore di r^2, il che porge evidentemente

$$c^2 \cos^2 p > (a^2 \cos^2 q + b^2 \text{sen}^2 q) \text{sen}^2 p$$

ossia

$$\cot p > \frac{\sqrt{(a^2 \cos^2 q + b^2 \text{sen}^2 q)}}{c},$$

e perciò eseguendo una prima integrazione relativamente all' angolo p, i limiti delle coordinate positive, saranno

$$p = 0, \quad p = \text{arc tang} \left(\frac{c}{\sqrt{(a^2 \cos^2 q + b^2 \text{sen}^2 q)}} \right)$$

e quindi q compreso fra i limiti $q = 0$, $q = \frac{1}{2}\pi$, d' onde moltiplicando l' integrale per 8, si otterrà l' intero volume V terminato dalla superficie in questione: pongasi adunque

$$p_{,} = \text{arc tang} \left(\frac{c}{\sqrt{(a^2 \cos^2 q + b^2 \text{sen}^2 q)}} \right)$$

si avrà

$$V = \frac{8}{3} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \int_0^{p_{,}} \text{sen} p \, dp dq \sqrt{(c^2 \cos^2 p - a^2 \text{sen}^2 p \cos^2 q - b^2 \text{sen}^2 p \, \text{sen}^2 q)^3}.$$

Per eseguire una prima integrazione relativa alla variabile p, facciamo per brevità

$$A = c^2, \quad B = a^2 \cos^2 q + b^2 \text{sen}^2 q, \quad P = \sqrt{(A \cos^2 p - B \text{sen}^2 p)}$$

$$W = \int \text{sen} p \, dp \sqrt{(A \cos^2 p - B \text{sen}^2 p)^3} = \int P^3 \text{sen} p \, dp$$

avremo dai noti metodi d' integrazione

$$W = -\frac{P^3 \cos p}{4} + \frac{3 B P \cos p}{8} - \frac{3 B^2}{8\sqrt{(A+B)}} \log [P + \cos p \sqrt{(A+B)}]$$

l' angolo $p_{,}$ soddisfa alla condizione

$$\text{sen} p_{,} = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{(A+B)}}, \quad \cos p_{,} = \frac{\sqrt{B}}{\sqrt{(A+B)}};$$

quindi facendo $p = p_{,}$ il valore di W diviene

$$W_{,} = \frac{-3B^2 \log(\sqrt{B})}{8\sqrt{(A+B)}}$$

così per $p=0$ sarà

$$W_0 = \frac{-A\sqrt{A}}{4} + \frac{3B\sqrt{A}}{8} - \frac{3B^2}{8\sqrt{(A+B)}} \log\left[\sqrt{A} + \sqrt{(A+B)}\right].$$

Dalla differenza dei due integrali si ha l' integrale definito

$$W = \frac{A\sqrt{A}}{4} - \frac{3B\sqrt{A}}{8} + \frac{3B^2}{8\sqrt{(A+B)}} \log\left(\frac{\sqrt{A}+\sqrt{(A+B)}}{\sqrt{B}}\right),$$

d' onde per la sostituzione dei valori di A, B, si ha

$$W = \frac{c^3}{4} - \frac{3c(a^2\cos^2 q + b^2 \operatorname{sen}^2 q)}{8}$$

$$+ \frac{3(a^2\cos^2 q + b^2\operatorname{sen}^2 q)^2}{8\sqrt{(c^2 + a^2\cos^2 q + b^2\operatorname{sen}^2 q)}} \log\left(\frac{c + \sqrt{(c^2 + a^2\cos^2 q + b^2\operatorname{sen}^2 q)}}{\sqrt{(a^2\cos^2 q + b^2\operatorname{sen}^2 q)}}\right).$$

Moltiplicando il primo e secondo membro per dq, ed integrando entro i limiti, $q=0$, $q=\frac{1}{2}\pi$, si avrà

$$V = \frac{8}{3}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} W\,dq.$$

Eseguendo le integrazioni nei termini di forma razionale, e ponendo per brevità

$$Q_{,} = \frac{(a^2\cos^2 q + b^2\operatorname{sen}^2 q)^2}{\sqrt{(c^2 + a^2\cos^2 q + b^2\operatorname{sen}^2 q)}}, \qquad Q = \frac{c + \sqrt{(c^2 + a^2\cos^2 q + b^2\operatorname{sen}^2 q)}}{\sqrt{(a^2\cos^2 q + b^2\operatorname{sen}^2 q)}}$$

otterremo facilmente

$$V = \frac{\pi c^3}{3} - \frac{\pi c(a^2+b^2)}{4} + \int_0^{\frac{1}{2}\pi} Q_{,} \log(Q)\,dq.$$

Questa espressione alla quale giunsi nel paragrafo 17° della mia citata Memoria si può ridurre ai trascendenti ellittici nel modo seguente:

4°. Supponiamo $a>b$, e si prenda

$$k^2 = \frac{a^2-b^2}{a^2+c^2}, \quad k'^2 = \frac{b^2+c^2}{a^2+c^2}$$

$$k^2 + k'^2 = 1, \quad \Delta = \sqrt{(1 - k'^2\operatorname{sen}^2 q)}$$

avremo

*

$$\sqrt{(c^2 + a^2 \cos^2 q + b^2 \operatorname{sen}^2 q)} = \Delta \sqrt{(a^2+c^2)}$$

d' onde elevando al quadrato

$$a^2 \cos^2 q + b^2 \operatorname{sen}^2 q = (a^2 + c^2)\, \Delta^2 - c^2;$$

quindi facendo la sostituzione completa nel solo valore di Q, si ha

$$Q_{,} = \frac{(a^2 \cos^2 q + b^2 \operatorname{sen}^2 q)^2}{\Delta \sqrt{(a^2 + c^2)}}, \qquad Q = \frac{c + \Delta \sqrt{(a^2 + c^2)}}{\sqrt{[(a^2 + c^2)\, \Delta^2 - c^2]}}.$$

Osservando poi che

$$(a^2+c^2)\, \Delta^2 - c^2 = (\Delta \sqrt{(a^2+c^2)} + c)(\Delta \sqrt{(a^2+c^2)} - c)$$

ne segue che fatto per brevità

$$\frac{\sqrt{(a^2 + c^2)}}{c} = m$$

sarà

$$Q_{,} = \sqrt{\left(\frac{m\Delta + 1}{m\Delta - 1}\right)}, \quad \log(Q) = \tfrac{1}{2} \log\left(\frac{m\Delta + 1}{m\Delta - 1}\right).$$

La sostituzione dei valori di $Q_{,}$, $\log(Q)$ darà

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} Q_{,} \log(Q)\, dq = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{(a^2 \cos^2 q + b^2 \operatorname{sen}^2 q)^2}{2\sqrt{(a^2 + c^2)}} \log\left(\frac{m\Delta + 1}{m\Delta - 1}\right) \frac{dq}{\Delta}.$$

Infine se a $\cos^2 q$ si sostituisca $1 - \operatorname{sen}^2 q$ e si ponga

$$U_{2n} = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\operatorname{sen}^{2n} q}{\Delta} \log\left(\frac{m\Delta + 1}{m\Delta - 1}\right) dq$$

otteniamo

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} Q_{,} \log(Q)\, dq = \frac{1}{2\sqrt{(a^2+c^2)}} [a^4 U_0 - 2a^2(a^2-b^2)\, U_2 + (a^2-b^2)^2 U_4].$$

Così il problema riducesi a calcolare integrali di forma U_{2n}.

5°. Infatti se si prende l' integrale

$$U_0 = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \log\left(\frac{m\Delta + 1}{m\Delta - 1}\right) dq$$

e si differenzi relativamente al parametro m, come in un integrale somigliante ha fatto il Sig. *William Roberts* di Dublino,

si avrà (*)

$$\frac{d\,U_0}{dm} = 2\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{dq}{1 - m^2 \Delta^2} = 2\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{dq}{1 - m^2 + m^2 k^2 \,\mathrm{sen}^2 q}$$

ove sostituendo

$$1 - m^2 = (1 - m^2)(\cos^2 q + \mathrm{sen}^2 q), \quad 1 - k^2 = k'^2$$

si trova

$$\frac{d\,U_0}{dm} = 2\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{dq}{(1 - m^2)\cos^2 q + (1 - m^2 k'^2)\,\mathrm{sen}^2 q}\,.$$

Prima d'integrare osserviamo che nel nostro caso, $m > 1$, $m k' > 1$, per ciò converrà scrivere

$$\frac{d\,U_0}{dm} = -2\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{dq}{(m^2 - 1)\cos^2 q + (m^2 k'^2 - 1)\,\mathrm{sen}^2 q}\,.$$

Effettuando l'integrazione indicata si ha

$$\frac{d\,U_0}{dm} = -\frac{\pi}{\sqrt{(m^2 - 1)}\sqrt{(m^2 k'^2 - 1)}}$$

e quindi

$$U_0 = -\pi \int \frac{dm}{\sqrt{(m^2 - 1)}\sqrt{(m^2 k'^2 - 1)}}\,.$$

Il secondo membro è un trascendente ellittico di prima specie, e potrà ridursi alla consueta forma data da Legendre col porre

$$m k' = \frac{1}{\mathrm{sen}\,\phi}, \quad dm = -\frac{1}{k'} \cdot \frac{\cos\phi\, d\phi}{\mathrm{sen}^2 \phi}$$

e però

$$U_0 = \pi \int \frac{d\phi}{\sqrt{(1 - k'^2 \,\mathrm{sen}^2 \phi)}},$$

ovvero per la notazione di Legendre

$$U_0 = \pi\, F(k', \phi),$$

ove ϕ sarà l'ampiezza, e $k' < 1$ il modulo.

Dopo l'integrazione dovrà sostituirsi per

$$m = \frac{\sqrt{(a^2 + c^2)}}{c}, \quad k^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + c^2}, \quad k'^2 = \frac{b^2 + c^2}{a^2 + c^2}$$

(*) Liouville, Journal de Mathématiques 1846, pag. 163.

il valore di

$$\operatorname{sen}\varphi = \frac{1}{mk'} = \frac{c}{\sqrt{(b^2+c^2)}}.$$

Nella stessa guisa per l' integrale U_2, abbiamo dalla differenziazione

$$\frac{dU_2}{dm} = 2\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\operatorname{sen}^2 q\, dq}{(1-m^2+m^2k^2\operatorname{sen}^2 q)}.$$

Per integrare il secondo membro convien fare la separazione dei termini per mezzo della divisione, il che porge

$$\frac{\operatorname{sen}^2 q}{1-m^2+m^2k^2\operatorname{sen}^2 q} = \frac{1}{m^2k^2} - \frac{(1-m^2)}{m^2k^2(1-m^2+m^2k^2\operatorname{sen}^2 q)};$$

quindi moltiplicando per dq, ed integrando abbiamo come sopra

$$\frac{dU_2}{dm} = \pi\left(\frac{1}{m^2k^2} - \frac{(m^2-1)}{m^2k^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{(m^2-1)}.\sqrt{(m^2k'^2-1)}}\right).$$

Qui pure la moltiplicazione per dm, e la consueta sostituzione di $mk' = \frac{1}{\operatorname{sen}\varphi}$, dà l' integrale

$$U_2 = -\pi\left[\frac{1}{mk^2} - \frac{1}{k^2}\int d\varphi\sqrt{(1-k'^2\operatorname{sen}^2\varphi)}\right].$$

L' integrale che trovasi nel secondo membro è un trascendente ellittico di seconda specie, e si rappresenta con il simbolo $E(k', \varphi)$, quindi

$$U_2 = -\pi\left[\frac{1}{mk^2} - \frac{E(k',\varphi)}{k^2}\right],$$

e sostituendo nuovamente i valori di m, k' si ha

$$U_2 = -\pi\left[\frac{c\sqrt{(a^2+c^2)}}{(a^2-b^2)} - \frac{(a^2+c^2).E(k',\varphi)}{a^2-b^2}\right].$$

Applichiamo ora lo stesso metodo alla ricerca del valore di U_4.

6°. Differenziando al solito relativamente ad m, si troverà

$$\frac{dU_4}{dm} = 2\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\operatorname{sen}^4 q\, dq}{(1-m^2+m^2k^2\operatorname{sen}^2 q)}.$$

Dalla divisione deduciamo

$$\frac{\operatorname{sen}^4 q}{1-m^2+m^2k^2\operatorname{sen}^2 q} = \frac{\operatorname{sen}^2 q}{m^2k^2} - \frac{(1-m^2)}{m^4k^4} + \frac{(1-m^2)^2}{m^4k^4(1-m^2+m^2k^2\operatorname{sen}^2 q)}.$$

Moltiplicando per dq, ed integrando entro i limiti $q=0$, $q=\frac{1}{2}\pi$, avremo

$$\frac{dU_4}{dm}=\pi\left[\frac{1}{2m^2k^2}+\frac{m^2-1}{m^4k^4}-\frac{(m^2-1)^2}{m^4k^4\sqrt{(m^2-1)}.\sqrt{(m^2k'^2-1)}}\right].$$

Qui pure nell'integrare relativamente ad m pongasi nell'espressione irrazionale $mk'=\frac{1}{\operatorname{sen}\varphi}$, si troverà facilmente

$$U_4=\pi\left[\frac{1}{3m^3k^4}-\frac{1}{2mk^2}-\frac{1}{mk^4}+\frac{1}{k^4}\int\frac{(1-k'^2\operatorname{sen}^2\varphi)^2d\varphi}{\sqrt{(1-k'^2\operatorname{sen}^2\varphi)}}\right].$$

Se nell' integrale del secondo membro si ponga

$$\Delta'=\sqrt{(1-k'^2\operatorname{sen}^2\varphi)}$$

esso si svolge in

$$\int\frac{(1-k'^2\operatorname{sen}^2\varphi)^2d\varphi}{\Delta'}=\int\frac{d\varphi}{\Delta'}-2k'^2\int\frac{\operatorname{sen}^2\varphi\,d\varphi}{\Delta'}+k'^4\int\frac{\operatorname{sen}^4\varphi\,d\varphi}{\Delta'}.$$

Ora per i primi due integrali abbiamo evidentemente

$$\int\frac{d\varphi}{\Delta'}=F(k',\varphi),\ \int\frac{\operatorname{sen}^2\varphi}{\Delta'}=\frac{F(k',\varphi)-E(k',\varphi)}{k'^2}$$

come per il terzo, facendo per brevità

$$Z_{2n}=\int\frac{\operatorname{sen}^{2n}\varphi\,d\varphi}{\Delta'}$$

conviene ricorrere alla formola generale data da Legendre, cioè (*)

$$\Delta'\cos\varphi\operatorname{sen}^{2n-3}\varphi=(2n-3)Z_{2n-4}-(1+k'^2)(2n-2)Z_{2n-2}+k'^2(2n-1)Z_{2n},$$

ove fatto $n=2$, e sostituiti i valori di Z_0, Z_2 si trova

$$\int\frac{\operatorname{sen}^4\varphi\,d\varphi}{\Delta'}=\frac{\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi\,\Delta'}{3k'^2}-\frac{2(1+k'^2)E(k',\varphi)}{3k'^4}+\frac{(2+k'^2)F(k',\varphi)}{3k'^4}.$$

Da queste espressioni dopo la riduzione e sostituzione di $k'^2=1-k^2$, otteniamo

$$\int\frac{(1-k'^2\operatorname{sen}^2\varphi)^2d\varphi}{\Delta'}=\frac{2(1+k^2)E(k',\varphi)}{3}-\frac{k^2F(k',\varphi)}{3}+\frac{k'^2\Delta'\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi}{3}.$$

L'ultimo termine per la sostituzione dei valori di k', $\operatorname{sen}\varphi$, $\cos\varphi$, darà

(*) Fonctions elliptiques. Tom. 1er, pag. 12.

$$\frac{k'^2 \operatorname{sen}\varphi \cos\varphi \sqrt{(1-k'^2 \operatorname{sen}^2\varphi)}}{3} = \frac{abc}{3\sqrt{(a^2+c^2)^3}},$$

quindi è che il valore di U_4 diviene

$$U_4 = \pi \left[\frac{abc}{3k^4\sqrt{(a^2+c^2)^3}} + \frac{1}{3m^3k^4} - \frac{1}{2mk^2} - \frac{1}{mk^4} \right]$$

$$+ \pi \left[\frac{2(1+k^2)E(k',\varphi)}{3k^4} - \frac{F(k',\varphi)}{3k^2} \right].$$

Sostituendo nel secondo membro i noti valori di m, k, k', abbiamo

$$U_4 = \frac{\pi}{2} \left[\frac{c(2ab-4c^2-9a^2+3b^2)}{3(a^2-b^2)^2} \right]$$

$$+ \pi \left[\frac{2(a^2+c^2)(2a^2+c^2-b^2)E(k',\varphi)}{3(a^2-b^2)^2} - \frac{(a^2+c^2)(a^2-b^2)F(k',\varphi)}{3(a^2-b^2)^2} \right].$$

Così gli integrali U_0, U_2, U_4 trovandosi espressi in trascendenti ellittici di prima e seconda specie di modulo $k' = \frac{\sqrt{(b^2+c^2)}}{\sqrt{(a^2+c^2)}}$, e di ampiezza

$$\varphi = \operatorname{arc}.\operatorname{sen} \left(\frac{c}{\sqrt{(b^2+c^2)}} \right)$$

si avrà facilmente la riduzione somigliante per l' integrale, che rappresenta la cubatura del solido di cui si è parlato.

7°. Infatti i valori trovati di U_0, U_2, U_4 si sostituiscano nell' ultima formola del parag. 4° avremo

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} Q_1 \log(Q)\, dq = \frac{\pi}{2} \left[c(2ab-4c^2+3a^2+3b^2) \right]$$

$$+ \frac{\pi}{2} \left(\frac{3a^4-(a^2-b^2)(a^2+c^2)}{3\sqrt{(a^2+c^2)}} \right) F(k',\varphi) + \frac{\pi}{2}\sqrt{(a^2+c^2)} \left(\frac{2c^2-2b^2-2a^2}{3} \right) E(k',\varphi),$$

quindi l' espressione di V già trovata al parag. 3°

$$V = \frac{\pi c^3}{3} - \frac{c(a^2+b^2)}{4} + \int_0^{\frac{1}{2}\pi} Q_1 \log(Q)\, dq$$

diviene finalmente

$$V = \frac{\pi abc}{6} + \frac{\pi}{6} \left[\frac{3a^4-(a^2-b^2)(a^2+c^2)}{\sqrt{(a^2+c^2)}} \right] F(k',\varphi)$$

$$+ \frac{\pi}{6} \cdot 2\sqrt{(a^2+c^2)} \left[c^2-b^2-a^2 \right] E(k',\varphi).$$

Il primo termine rappresenta l' ottava parte del volume di un ellissoide costruita sopra i medesimi semiassi a, b, c. Quando $a=b$ si ha $k'=1$, e perciò

$$E(k',\varphi)=\int d\varphi \cos\varphi=\operatorname{sen}\varphi=\frac{c}{\sqrt{(a^2+c^2)}}$$

$$F(k',\varphi)=\int\frac{d\varphi}{\cos\varphi}=\frac{1}{2}\log\left(\frac{1+\operatorname{sen}\varphi}{1-\operatorname{sen}\varphi}\right)=\frac{1}{2}\log\left(\frac{\sqrt{(a^2+c^2)}+c}{\sqrt{(a^2+c^2)}-c}\right),$$

ovvero

$$F(k',\varphi)=\log\left(\frac{\sqrt{(a^2+c^2)}+c}{a}\right)$$

d' onde

$$V=\frac{\pi c^3}{3}-\frac{\pi a^2 c}{2}+\frac{\pi}{2}\cdot\frac{a^4}{\sqrt{(a^2+c^2)}}\log\left(\frac{\sqrt{(a^2+c^2)}+c}{a}\right).$$

A questa formola si giunge egualmente per mezzo del primitivo riportato valore di W, mentre per $a=b$ le due quantità $Q_{,}$, Q del parag. 3° divengono

$$Q_{,}=\frac{a^4}{\sqrt{(a^2+c^2)}},\quad Q=\frac{c+\sqrt{(a^2+c^2)}}{a}.$$

In questo caso V sarà il volume generato dalla rotazione dell' area della curva

$$(x^2+y^2)^2=c^2x^2-a^2y^2$$

attorno l' asse rettilineo $2c$.

FINE della Parte I. del Tomo XXIV.

MEMORIE

DI MATEMATICA E DI FISICA

DELLA

SOCIETÀ ITALIANA DELLE SCIENZE

RESIDENTE IN MODENA

TOMO XXIV.

PARTE SECONDA.

MODENA

DAI TIPI DELLA R. D. CAMERA

MDCCCL.

INDICE

DELLE MEMORIE CONTENUTE

IN QUESTA PARTE II^a. DEL TOMO XXIV.

ANNALI

DELLA SOCIETÁ ITALIANA DELLE SCIENZE RESIDENTE IN MODENA

CONTINUATI E SCRITTI DAL SEGRETARIO DI ESSA

DALL' ANNO 1845 AL PRINCIPIO DEL 1850.

All' atto di raccogliere la penna del mio antecessore per la continuazione di questi Annali della Società io stimo parte di tale ufficio, non che debito di mia particolare amicizia e gratitudine verso l' egregio Continuatore defunto, il premettere un cenno brevissimo della vita di lui e de' lunghi e zelanti servigi alla Società medesima per lui prestati; comecchè mi riserbi di far ciò più distesamente in apposito scritto di commendazione, ove mi sia conceduto.

Sortiva Antonio Lombardi i natali in Modena il dì 22 Ottobre dell' anno 1768, ed erano suoi Genitori li conjugi Venerio e Barbara Zerbini, cittadini distinti e agiati, ma specialmente premurosi della miglior educazione religiosa e civile de' propri figli, che due maschi furono ed una femmina. Compiva con lode il giovine Antonio nella patria fiorente Università gli studi superiori delle matematiche, riportandone il grado d' Ingegnere, da lui poscia per qualche onorevole incombenza esercitato, e vi congiungeva la coltura delle buone lettere, in guisa che il celebre storico della italiana letteratura, il Tiraboschi lo amò ed ebbelo, qual suo sottobibliotecario, a Collega fin dall' anno 1790 nella Estense Biblioteca. E morto quel degno Successore dei Muratori e dei Zaccaria, col promoversi alla stessa carica di primo Bibliotecario il P. Pompilio Pozzetti, indi il Canonico Ciocchi, rimaneva pur sempre il Lombardi, giovine ancora, nel secondo posto d' ufficio e d' onore, sino a che nell' anno 1807 elevato egli

medesimo alla dignità principale, per quarant' anni di seguito la sostenne ed amministrò, illustrandone pure di non pochi ne' lievi di lui lavori il magnifico ed utile Stabilimento. La continuazione della Storia letteraria del Tiraboschi nel secolo decimottavo, opera pubblicata di quattro Volumi in 4°, un Catalogo ragionato dei Libri dell'Estense che trattan di fisica e di matematica, inedito e in molti Volumi con altri somiglianti cataloghi di materie differenti, e una Cronaca modenese, del pari inedita in tre Volumi in folio, dall' anno 1796 al 1802; sono queste le bibliografiche fatiche da lui eseguite e ai posteri tramandate.

Cominciarono i servigi di lui alla Società italiana delle scienze nel 1801 per l' affidatoli ufficio di Vice-Segretario Amministratore. Nominatone Socio onorario nel 1809 e nel 1818 Socio Attuale, nel successivo 1819, per la grave e immatura perdita del prof. Santo Fattori, egli fu sostituito al medesimo nell' incarico di Segretario, da lui poscia colla massima diligenza e indefessamente adempiuto fin alla morte. A lui devesi principalmente che la Società siasi mantenuta nel pieno suo lustro e vigore, per attività di operazioni amministrative, di pubblicazioni e di corrispondenza tanto italiana che estera, durante l' ultimo periodo della vita e presidenza del Marchese Luigi Rangoni, il quale colpito di lenta paralisi, nè più reggendo alle cure e agli studi del suo nobilissimo ingegno, riposò tranquillo di commettere interamente la direzione degl' interessi Sociali alla sperimentata integrità e premura del Segretario. Nè poco il Lombardi contribuì ancora co' propri lavori alla collezione degli Atti e delle Memorie della Società. Imperocchè, oltre a qualche sua dissertazione di scientifico argomento inseritavi, e al proseguimento non interrotto degli Annali condotto all' anno 1845 e da lui terminato col Num. 360, leggonsi di lui parecchi elogi a illustri Soci defunti, tra' quali ricorderò solo quelli del Bonati e del Brunacci; rimanendone poi tuttora inedito quello ch' egli scrisse dell' ultimo Presidente, il prelodato Marchese Luigi Rangoni.

Egli sostenne pure altre incombenze di pubblica utilità e decoro, Direttore qual egli fu per molti anni della Sezione di scienze nella R. Accademia modenese di scienze lettere ed arti, Economo ed amministratore di un patrio Gabinetto letterario, Uno de' RR. Censori de' libri, e onorato della fiducia de' Sovrani, de' Governi, e de' concittadini suoi per importanti e delicate missioni. E mi basti in proposito il ricordare com' egli nel 1815 venisse inviato dalla gloriosa memoria di Francesco IV. a Parigi, e vi ricuperasse i preziosi Manoscritti e le rare edizioni, di che nel 1796 era stata derubata la Biblioteca Estense.

Uomo di schietto animo, d' illibato costume, di antica fede e di specchiatissima religione, del pari assentita con umile soggezion d' intelletto che praticata con franca libertà di opere, egli non ismentì in alcun tempo, nè per mutar di vicende, queste doti eminentemente lodevoli. Congiunto in matrimonio con una Sorella del celebre prof. Paolo Ruffini, dalla quale non ebbe figli, visse però sempre nella maggiore concordia di reciproco amore colla medesima, dividendone insieme quella purezza di spirito che ad entrambi sembrava comunicata dall' ammirabil loro Fratello e Cognato. Alla morte del quale profondamente addolorato il Lombardi, a sfogo di ammirazione e cordoglio, ne scrisse un Opuscolo che mandò in luce intitolandolo « Memorie storiche della vita di Paolo Ruffini. » Sereno dipoi e tranquillamente attivo il nostro Segretario proseguì nell' onorata e lunga sua carriera, sin che infermò gravemente di pleuritide e, dopo alcuni giorni di malattia, munito di tutti i conforti della Religione, rese a Dio l' anima placidamente in su l' albeggiare del 29 Aprile correndo l' anno 1847.

Ripigliam ora la narrazione dei fasti accademici, dal punto ove il Lombardi lasciolla.

361. Alla settima riunione degli Scienziati italiani, convocata pel Settembre dell' anno 1845 a Napoli e di cui è detto nel Num. 360, il Sig. Cav. Presidente delegava, come rappresentanti della Società a quel dotto Consesso, il Socio attuale Sig. professore Genè di Torino ed il Socio onorario Sig. Ruffo Don Folco, Principe di Scilla e allora Ministro per gli affari esteri di S. M. Siciliana; muniti i quali delle relative patenti dall' ora defunto Segretario, a lui ne rispondevano dell' adempiuta rappresentanza con soddisfazione reciproca.

362. In seguito alla deplorata morte del Presidente Rangoni, che aveva sempre custodita presso di sè la ormai numerosa collezione dei libri pervenuti alla Società in dono dalle altre Accademie e da singoli Autori, il Successore Sig. Cav. Marianini richiamò a se la detta collezione, in un col Catalogo esattamente compilatone dal Socio onorario il Sig. prof. Geminiano Riccardi, che venne perciò formalmente ringraziato di tale sua sollecitudine e benemerenza verso il nostro Corpo scientifico.

363. Nell' infausto giorno 21 Gennajo dell' anno 1846 la Società italiana delle scienze ebbe a lamentare la perdita del proprio Auspice per la morte dell' augusto e glorioso Francesco IV. d'Este, Arciduca d'Austria e Duca di Modena, Principe di retto animo e di alta mente superiore agli encomj, nel favorire i buoni ed utili studi a niuno secondo, e degno di tempi migliori. Dividendo il comun lutto e dolore per così acerbo avvenimento la Società stessa partecipò non meno al pubblico e solo conforto nel novello e giovine Sovrano Francesco V. che, battendo le orme luminose delle virtudi paterne, prosegue ad accoglierla e proteggerla all'ombra del suo Trono.

364. Mediante lettera circolare dell' 8 Febbrajo 1846 il Segretario divulgava ai Soci l' elenco di quelli fra loro che nell' anno caduto aveano risposto puntualmente alle sue interpellazioni, e a' quali perciò competeva l' annuo compenso per porto di lettere fissato dallo Statuto.

365. Colla perdita irreparabile fatta dalla scienza celeste alla morte del celebre Astronomo di Konisberga, Bessel, accaduta il 17 Marzo del 1846, anche la Società italiana era privata di uno de' suoi più splendidi ornamenti nel ruolo de' Membri stranieri. Datone quindi il funesto annunzio ai Membri attuali e presentata loro, a nomina del Cav. Presidente, una Distinta di sei illustri Soggetti stranieri da sostituire al Defunto, scorso il termine consueto dei due mesi conceduti al rispondere e aperte le schede, risultava eletto a forte pluralità di voti (19 sopra 39 votanti, ossia più della metà in favore) il Fisico Danese Oerstedt, Scopritore dell'Elettro-magnetismo; risultamento di votazione che il Segretario nelle sue private reminiscenze ben a ragione appellava straordinario, dividendosi comunemente i singoli voti sopra sei Candidati in un rapporto assai minore di prevalenza per uno di essi.

366. Passava nella classe degli Emeriti il Socio attuale P. Inghirami, che un' ostinata e crudele infermità d' occhi aveva tolto da qualche anno alle studiose applicazioni, cui dava opera indefessamente per lo innanzi, con tanto profitto della giovanile istruzione e della scienza più matura. Quindi a sostituirlo nella classe de' Membri attivi il Segretario diramava, con sua Circolare del 3 Luglio 1846, la nota de' sei Soggetti italiani proposti dal Presidente, fra' quali dopo due mesi trovavasi eletto per maggioranza di voti il Sig. Marchese Massimiliano Spinola di Genova.

367. Dispose il Sig. Cav. Presidente che fosse partecipata ai Soci stranieri la seguìta elezione del celebre Oerstedt a loro Collega; il che adempivasi dal Segretario con sua lettera in data dell' 11 Luglio 1846.

368. Per l' autunno dell' anno medesimo il Socio attuale Sig. Cav. Matteucci fece conoscere di voler egli recarsi in Inghilterra e intervenire alla riunione dell'Associazion britannica per l' avanzamento delle scienze, fissata a Southampton in quell' epoca. Munivalo quindi il Segretario nostro, d'ordine espresso del Presidente, con lettera dell' 8 Agosto 1846 che

accreditavalo a rappresentar la Società presso quella dotta Radunanza, e insieme ne preveniva la presentazione con altra lettera al Presidente di quella, l'onorevole Sig. Murkison, che ne rispondeva parole del più gentile aggradimento.

369. In sul cominciar dell' Agosto 1846 l' Accademia di agricoltura commercio ed arti di Verona partecipava alla Società l' annunzio lagrimevole della repentina morte, avvenuta colà il 25 Luglio precorso, dell' ingegnoso Fisico e rinomato Scopritore della pila a secco, il Socio attuale Ab. Zamboni, che rappresentava pure la Società presso quell' Accademia in conformità della convenzione fra i due Corpi stabilita il 18 Aprile dell' anno 1843. Quindi a riempire il posto vacante nella Società, e in seguito di relativa Circolare del 3 Ottobre 1846 fu eletto a pluralità di voti il Sig. Dott. Michele Medici, professore di Anatomia umana nella Pontificia Università di Bologna; mentre d' altra parte la detta Accademia Veronese promosse a rappresentar la Società italiana (come da lettera del Segretario di quella, il Sig. Conte Giovanni Scopoli) il proprio Membro Sig. Dott. Giulio Sandri, divenuto per tal modo Socio attuale sopranumerario insieme col Sig. Ingegnere Pietro Maggi.

370. Nello stesso mese di Agosto il nostro Segretario spediva pure il Diploma di Socio onorario al Presidente dell' Accademia Agraria di Verona, il Sig. Cav. Antonio Pompei, adempiendone un articolo della precitata convenzione 18 Aprile 1843, e coll' antidata del 24 Febbrajo 1845 per mancata opportunità di averlo innanzi adempiuto.

371. Da graziosa lettera del Sig. Marchese Brignole-Sale, Presidente generale dell' ottava Riunione degli Scienziati italiani fissata pel Settembre del 1846 in Genova, era mosso invito, coll' annunzio del dotto Convegno e per intervenirvi personalmente, al Presidente nostro il quale, per corrispondere e cooperare al nobile intendimento, incaricava specialmente per mezzo del Segretario li due Soci attuali Signori Cav. Ottaviano Fabrizio Mossotti e Cav. Giacomo Tommasini di

rappresentar l' intera Società nel Congresso genovese e facevali perciò accompagnare da relative lettere patenti.

372. Nella mentovata Circolare del 3 Ottobre 1846 furono avvertiti i Soci che il Collega loro, l' umile scrivente, aveva già consegnato ai Volumi dei nostri Atti undici Memorie; laonde richiesti a un tempo del loro voto se l' Autore, a termini dello Statuto, meritasse riceverne titolo e pensione di *Socio giubilato*, essi per mera bontà loro assentirono pressochè unanimi alla proposta, e quindi il Candidato ne venne promosso effettivamente all' indicato grado.

373. A cominciare coll' anno 1847 il Socio attuale Sig. Barone Giovanni Plana per lo Statuto acquistava titolo e pensione di *anzianità*, succedendo egli al Cav. Giuseppe Venturoli, mancato in Bologna il 19 Ottobre dell' anno 1846. E per supplire nei Soci attuali ai decessi Venturoli e Tommasini, diramatasi Circolare dal Segretario in data 14 Gennajo 1847, uscivano eletti il Sig. Marchese Lorenzo Pareto di Genova e il Sig. Cav. Vincenzo Flauti di Napoli; per quest' ultimo, che ottenne parità di voti col Signor Cav. Paolo Savi, avendo il Presidente deciso col suo voto di preponderanza determinato dal rilesso dell'anzianità nella carriera scientifica.

374. Recavasi il Cav. Presidente in persona e nel giorno 24 Gennajo 1847 ad umiliare il T. XXIII Parte matematica delle Memorie Sociali all' Altezza Reale del Sovrano Estense Francesco V, che degnavasi aggradirne l' omaggio e manifestarne i sensi più lusinghieri dell' alta Sua benevolenza al nostro Corpo accademico.

375. Spirato col Gennajo del 1847 il termine perentorio al concorso del programma sopra il ritorno della famosa Cometa del 1296 nell' anno 1848 (Vedi il T. XXIII, Parte matematica a pag. (65)), e non essendone pervenuta, durante l' intervallo assegnato, Memoria veruna alla Società, l' argomento ed il premio ne rimasero di conseguenza insoluti.

376. All' occasione di partecipare ai Soci l' elezione dei due nuovi Colleghi, Pareto e Flauti, il Segretario con Circolare

del 24 Marzo 1847 espose pure la nota de' Soci che avean diritto, in numero di 31, al compenso postale per l'anno 1846.

377. La mattina del 29 Aprile 1847, in età ottuagenaria e dopo breve malattia come dissi, rendeva l' anima placidamente al Creatore il Segretario Antonio Lombardi. Quindi il Signor Cav. Presidente, col giorno 24 del successivo Maggio, diramava ai Soci una sua Enciclica, nella quale annunziata la dolorosa perdita, ricordati i meriti del defunto, accennato di averne ritirati tutti gli oggetti spettanti alla Società, e dichiarata la nomina da Sè fatta del Segretario successore nell' umile persona dello scrivente, proponeva la nota di sei rispettabili Soggetti all' uopo di rimpiazzare con uno di essi il vacante posto di Socio attuale. Intorno a che la pluralità relativa dei voti essendosi pronunziata in favore del professore di Pisa, il Signor Cav. Paolo Savi, che perciò era l' eletto, confermavasi per tal modo il risultamento dell'ultima precedente votazione. E infine il Presidente annunziava pure la morte del Segretario, con propria lettera del 31 Maggio 1847, ai Soci onorarj non meno che agli esteri.

378. Il novello Segretario, in occasione di far conoscere al Corpo la seguita elezione del Cav. Savi, mediante la sua prima Circolare del 9 Agosto 1847, protestava ingennamente della propria confusione al vedersi onorato di tal incarico, e ne pregava di anticipata indulgenza i Colleghi. Avvenuta poi nel frattempo la deplorabil perdita del Socio Cav. Genè, nel più bello della sua vita mancato in Torino all' incremento della scienza e alla gloria d' Italia, nella citata Circolare venne altresì comunicata ai Soci la proposta fatta dal Presidente di sei Dotti illustri e italiani da riempirne il vuoto del defunto fra i Membri attuali, rispondendo i quali risultò eletto a forte maggioranza di voti il Sig. Ab. Barnaba Tortolini, professore di Calcolo sublime nella romana Università della Sapienza.

379. Nella Circolare del Segretario, segnata N. 2 e del 10 Novembre 1847, fu annunziata l' elezione del prof. Tortolini, commendata ed eccitata vieppiù l' attività de' Soci a

proseguire nell' invio d' importanti lavori scientifici, a raggiungerne il nobilissimo scopo del nostro Istituto e a crescergli fama presso lo straniero. Avvertivasi poi che d' ora innanzi, per saggia disposizione del Presidente, abbandonata la superflua e spesso poco mantenuta distinzione di Parte matematica e Parte fisica di uno stesso Tomo delle Memorie, si adotterà quella più semplice e sempre vera di Parte I^a e Parte II^a. E secondandone il giusto desiderio ed avviso di alcun Socio, si è pur fissato che le Circolari del Segretario portino in fronte un numero progressivo da ricominciarsi in ciascun anno.

380. Benchè alla Società non fosse pervenuto l' invito della Presidenza generale alla nona Riunione degli Scienziati italiani, fissata per la seconda metà del Settembre 1847 in Venezia, pure non mancò la Presidenza nostra di accreditare a rappresentar la Società in quel dotto Congregamento (forse l'ultimo per sovversive cagioni, estranee allo scopo scientifico, ma fatalmente soffiate nella istituzion dei Congressi) li due suoi Membri attuali, il Cav. Santini, e il prof. Bizio, che vi intervennero e risposero di averne adempiuta l' incombenza.

381. Mediante Circolare, N. 1. e del 1°. Febbrajo 1848, erano invitati i Soci ad approvare o no la proposizione del Presidente di aggiungere nei Volumi, all' Elenco delle Opere ricevute dalla Società in dono, quello de' lavori più recenti de' Membri attuali, mandati ed usciti per altri tipi alla pubblica luce in Italia e fuori: proposizione che venne approvata all' unanimità e quindi ammessa, come se ne vedrà in questo Volume il primo saggio. Nella Circolare medesima furon raccolti e presentati i nomi de' Soci, che risposero alle inchieste nel precorso 1847 entro il termine conceduto, per distribuirne quindi a ciascuno il fissato indennizzo postale.

382. Con successiva Circolare, N. 2. e del 21 Febbrajo 1848, comunicavasi ai Membri attuali il programma della R. Accademia di Torino in data del 23 Gennajo 1848, che riapriva il concorso al premio generosamente offerto dal Signor

Conte Pillet-Will di diecimila franchi da distribuirsi in parti eguali agli Autori di quattro Opere d'introduzione agli studi della Fisica, della Chimica, della Meccanica e dell'Astronomia, a giudizio dell'Accademia suddetta, e a termine di presentazione fissato col 31 Dicembre 1849.

383. Sorgeva l'anno 1848, memorabile e fecondo malauguratamente in Europa, come di grandi colpe così di desolanti ruine e sventure, per opera principalmente delle anatematizzate Società clandestine; e, non meno che alla pubblica tranquillità e floridezza sbandite, sorgeva avverso ai buoni e pacifici studi. Avvegnacchè rallentatane, durante le civili perturbazioni dell'Italia dal Marzo all'Agosto del detto anno, però non venivane del tutto abbandonata e neppur sospesa la stampa del Tom. XXIV, Parte I delle nostre Memorie; il qual Volume anzi nel Giugno intermedio usciva terminato dai torchj: ma frattanto non fu concesso di eseguirne sollecitamente le spedizioni tutte in Italia e all'estero, essendo stato d'uopo attenderne, per la sicurezza, circostanze più favorevoli di tempo. In Modena il Signor Cav. Presidente ha potuto di leggieri adempiere il grato dovere di offerir il primo esemplare di tal Volume in tributo al Regnante Francesco V, che si degnò riceverlo, dalle sue mani e in presenza del Segretario, la mattina dell'11 Febbrajo 1849, e avendone pure in tale occasione la Reale Altezza Sua dichiarata la continuazione del Suo eccelso Favore alla Società.

384. Fra le tante calamità pubbliche e private, riversate sopra l'Europa nel medesimo anno 1848 della più infausta rimembranza, la nostra Società ebbe a lagrimare la perdita di due suoi Membri e luminari distintissimi, straniero l'uno e l'altro nazionale. Mancava di vita il Chimico Berzelius a Stokolma il giorno 7 di Agosto, e mancava similmente in Londra il 15 del successivo Novembre l'Astronomo P. De Vico, quello nell'età grave ma non decrepita di 69 anni, questo nel vigore della virilità e dell'ingegno, e vittima gloriosa dell'ostracismo e dell'espulsione violenta dall'Italia di

una religiosa Compagnia sommamente benemerita e illustre. Quindi con Circolare del 20 Febbrajo 1849 il Segretario invitava i Soci a rimpiazzare li due Colleghi defunti colla scelta di uno in ciascuna delle due note di sei Soggetti italiani e di altrettanti stranieri, fra li più degni e preclari, proposte loro dal Presidente, e l' elezione, all' aprimento delle schede per maggioranza di voti, cadeva sopra il Sig. Giovanni Brignoli de Brunnhoff, professore di Botanica nella R. modenese Università, quanto al nazionale, e quanto al Socio straniero sopra l' insigne Geometra francese il Sig. Le Verrier, sì meritamente celebre nel mondo scientifico per la sua razionale scoperta e divinazione felicissima del pianeta Nettuno.

385. Per inevitabile conseguenza di un fiero attacco di paralisi e cefalitide il Vice-Segretario e Amministratore della Società, l' Avvocato Luigi Ruffini che ne fu colpito, cessò di vivere il giorno 20 Gennajo del 1849, nell' età d' anni 73 e confortato nel passo estremo dai soccorsi della Religione. In lui pure il Corpo Sociale perdette un uomo, che lo giovava di legale sapienza e consiglio, e che per lunga serie d' anni amministrò l' azienda economica di esso con integrità, pari allo zelo, degno fratello qual egli era dell' impareggiabil Cavaliere prof. Paolo, e Cognato perciò ancora dell' ottimo Segretario Lombardi. Al danno della qual perdita pose riparo l' egregio attual Presidente coll' immediata nomina del successore, per l' ufficio anzidetto di Vice-Segretario, nella persona del proprio figlio, il Sig. Ingegnere Dott. Pietro Marianini, giovine che precorre col senno e sapere all' età e non può fallire a dividere, come le cure, così la rinomanza del Genitore.

386. Mentre la guerra funestamente riaccesa in Italia seminava di cadaveri le terre presso la destra sponda del Ticino e terminava, come folgore, nella campale giornata di Novara, l' insigne Naturalista e Membro attuale della nostra Società, il Dott. Mauro Rusconi rifugiatosi a menar tranquilla vita di studio su le floride rive del lago di Como, nel luogo

detto la *Cadenabbia*, vi soggiacque ad un colpo di paralisi che lo rapì alle scienze, nell' anno settuagesimo terzo di sua età e correndo il giorno 27 di Marzo dell'anno 1849. L' agitazione degli animi e delle cose che teneva dietro a quel turbine marziale, e i posteriori movimenti delle cattoliche armi vittoriose, che solo nel Giugno riuscirono a liberar interamente lo Stato Pontificio e Roma dalla più empia tirannide rivoluzionaria, non permisero di riaprir le corrispondenze scientifiche fuorchè nel Luglio successivo. E quindi a reintegrar la Società della perdita del Rusconi dovette il Segretario attenderne l' opportunità della consueta Circolare d' invito ai Colleghi; mandata in giro liberamente la quale colla data del 15 Agosto e dopo il bimestre assegnato al riscontro, ne risultò eletto per Socio attuale a ben decisa preponderanza di voti il chiarissimo Sig. Cavaliere Gioacchino Taddei, Chimico di bella fama in Firenze.

387. Accade, ahi troppo sovente, che appena rimarginata una ferita del Corpo Sociale, altra più acerba e profonda viene la morte a recargli, troncando i giorni di altro de' suoi Membri più ragguardevoli. Così è avvenuto che, rimpiazzato appena il Rusconi dal Taddei, la falce della implacabile nemica dell' uman genere mieteva in Bologna il dì 1°. del Novembre ultimo passato la preziosa vita del Collega nostro e Socio Anziano, il Cavaliere prof. Gio. Battista Magistrini, uno de' più potenti Ingegni matematici dell' Italia e non meno commendevole per complesso raro di virtudi religiose civili e domestiche. Al posto e con pensione di anzianità gli succede immediatamente, per diritto e in conformità dello Statuto, il Socio attuale Sig. Cav. prof. Antonio Bordoni; e la prossima votazione farà conoscere chi è destinato a succedergli nel posto vacante di Socio ordinario.

388. Il quinquennio de' fasti accademici, argomento di questa rapida esposizione, ha termine in altra pubblica sventura luttuosissima, che pure dev' essere molto sentita e lagrimata dalla nostra Società. Voglio dire della immatura morte,

avvenuta in Brünn il 15 del caduto Dicembre per tifo micidialissimo, della Reale Altezza dell'Arciduca Ferdinando Carlo Vittorio d'Austria-Este, rapito nel fiore degli anni non meno che in quello delle migliori speranze e della più luminosa carriera. Fratello dell' augusto Sovrano, che pur è largo de' Suoi Reali Auspicj alla dotta Istituzione italica dei Quaranta, Egli ha lasciato di Sè un generale compianto e desiderio vivissimo, cui perciò noi tutti dobbiam partecipare in modo speciale, come per le mie personali attinenze d' istruzion giovanile al Defunto io ne provo e conservo acerbissimo il dolore. Ma confortiamoci insieme nella Divina Provvidenza, che regge tutte cose amorosamente, e confidiamone che ai foschi e miseri giorni del compiuto periodo quinquennale farà che seguano tempi sereni e prosperi, o non avversi per lo meno al rifiorimento dei pacifici ed utili studi.

ELENCO DI LIBRI E OPERE

NEL BIENNIO 1848-1849 OFFERTE IN DONO

ALLA SOCIETÀ ITALIANA DELLE SCIENZE

CHE, PUBBLICANDONE I TITOLI, INTENDE SIGNIFICARNE AGL'ILLUSTRI DONATORI LA PROPRIA STIMA E RICONOSCENZA.

Results of Astronomical Observations made during the years 1834-5-6-7-8 at the Cape of Good Hope, by Sir John F. W. Herschel. London, 1847. Un Vol. in 4°. con legatura magnifica e titolo in oro.

Observations made at the Magnetical and Meteorological Observatory at St. Elena. Vol. I., 1840-1-2-3. London, 1847, in 4°. Legatura in cartone e titolo in oro.

Philosophical Transactions of the Royal Society of London, for the year 1847. Part. I. and II. London, 1847. Un Vol. in 4°.

Idem. For the year 1848. Part. I. and II. London, 1848; and for the year 1849. Part. I. London, 1849.

Proceedings of the Royal Society, N.os 67-8-9. 70-1-2. London, 1847-1848, in 8°.

Memoirs of the Royal Astronomical Society. Vol. XV. and XVI. London, 1846-1847, in 4°.

Proceedings of the Royal Astronomical Society. Vol. VII. N.os 1 . . . . . 17. London, in 8°.

The Report of the British Association for the advancement of science for 1846. London, 1846. Un Vol. in 8°.

Id. Report etc. for. 1847. London, 1848, in 8°.

Id. Report etc. for. 1848. London, 1849, in 8°.

A Catalogue of those stars in the Histoire cèleste Française of Jerôme Delalande. London, 1847. Un Vol. in 8°.

A Catalogue of 9766 stars in the southern hemisphere from the observations of the Abbé de Lacaille. London, 1847. Un Vol. in 8°.

Address of the most noble the Marquis of Northampton etc. the president, read at the general Meeting of the Royal Society, 9 Iune 1848, in 8°.

Smee Alfred. Elements of Electro-Biology, or the Voltaic Mechanism of man; of Electro-Pathology, especially of the nervous System; and of Electro-Therapetics. London, 1849. Un Vol. in 8°. con legatura distinta.

Memorie della R. Accademia delle scienze di Torino: serie 2ª. T. IX. Torino, Stamperia Reale, 1848. Un Vol. in 4°.

Sismonda Eugenio. Notizia storica dei lavori fatti dalla Classe delle scienze fisiche e matematiche durante l'anno 1847: estratta dal T. IX. serie 2ª. delle Memorie della R. Accademia di Torino. In 4°.

Novi Commentarii Academiae scientiarum Instituti: Tomus nonus. Bononiae, ex typographaeo Emigdii ab Ulmo, MDCCCXLIX. Un Vol. in 4°.

Rendiconto delle Adunanze e de' lavori della R. Accademia delle scienze di Napoli, NN.ⁱ 31. 32. 33. 34. 35. 36. 37. 38. 39. 40. 41. 42. 43. 44. 45., l'ultimo de' quali spetta al Giugno 1849. Napoli, in 4°.

Annuaire Magnetique et Mèteorologique par Kuppfer, anneé 1845. St. Petersbourg, 1848. Due Volumi in 4°.

Résumès des observations mètéorologiques par Kuppfer: 1.er Cahier in 4°. St. Petersbourg, 1846.

Bulletin des sèances de la Société Vaudoise. N. 18, in 8°.

Fusinieri Dott. Ambrogio. Memorie sopra la luce, il calorico, la elettricità, il magnetismo, l'elettro-magnetismo ed altri oggetti. Padova, per Sicca e figlio, 1846. Un Vol. in 4°.

Id. Memorie meteorologiche. Padova, per Sicca e figlio, 1847. Un Vol. in 4°.

Id. Fondamenti di filosofia nella Fisica. Opuscolo in 4°.

Id. Annali delle scienze del Regno Lombardo-Veneto: Appendice II ai Bimestri V e VI. 1845; Risposta e Riflessioni: Appendice III agli stessi Bimestri; Riscontro, Discussioni ed Aggiunte. Ivi ancora, Ossidazioni interne di Coppie saldate nella pila di Volta, Memoria. Nei Bimestri precedenti III e IV dell'anno medesimo, Effetti meccanici delle correnti galvaniche, altra Memoria; e tutte in 4°.

Catullo Cav. Tommaso. Appendici due al Catalogo degli Ammoniti delle Alpi Venete, con due tavole, XII e XIII del Prodromo. Padova, 1847, in 4°.

Michaelis Medici. De vita et scriptis Petri Nannii — Sermo. Bononiae, 1848, in 4°.

Tortolini Ab. Barnaba. Nota sulla quadratura di una certa superficie curva: estratta dalla Raccolta scientifica del Palomba. Anno IV. Roma, 1848, in 8°.

Id. Addizione alla Memoria intitolata: Nuove applicazioni del calcolo integrale relative alla quadratura delle superficie curve e cubatura de' solidi: estratta dal giornale di matematica di Crelle. T. 34. Berlino, in 4°.

Id. Nota, sull' equazione e rettificazione della curva piana. luogo geometrico di un punto, dal quale se si conducono due tangenti a due circoli di egual raggio, il loro prodotto sia costante.

Id. Sulla riduzione di alcuni Integrali definiti ai trascendenti ellittici, ed applicazione a differenti problemi di Geometria e di Meccanica razionale. Roma, 1848, in 8°.

Id. Nota sull' espressione del volume terminato dalla superficie di 4°. ordine, luogo geometrico della projezione ortogonale del centro dell' iperboloide a due falde sui piani tangenti: inserita nel T. XXIV. Parte 1ª. delle Memorie della Soc. It. Modena, 1848, in 4°.

Id. Nota sull' equazione della curva piana, luogo geometrico di un punto tale, dal quale condotte due tangenti ad un ellissi data, l'angolo della medesima sia costante: estratta dalla Raccolta scientifica di Roma. Anno IV, in 8°.

Id. Commentatio de formatione quarumdam equationum algebraicarum quibus satisfaciant functiones algebraicae datae. Bologna, 1848, in 4°.

Id. Sul movimento de' projettili nell'aria: Nota estratta dalla Raccolta scientifica, Anno V. Roma, 1849, in 8°.

Bellani Canon. Angelo. Conghietture sopra un antico singolare arnese di prezioso metallo, disotterrato presso Como, con una tavola. Memoria estratta dal Giornale dell' I. R. Istituto Lombardo, T. I. nuova serie. Milano, 1848, in 4°.

Id. Della causa della mortalità dei gelsi, e del modo d' impedirla. Memoria estratta dal Giornale dell' I. R. Istituto. T. I. Milano, 1848.

Id. Di alcune specie e varietà di bachi da seta, e di altri fenomeni fisiologici che questi presentano: estratta dal Giornale Agrario Lombardo-Veneto. Fascic. di Luglio, 1848, in 8°.

Id. Risposta al quesito riproposto con premio sopra la mortalità dei gelsi, con Appendice critica. Milano, 1847, in 8°.

Id. Confronto di alcune vecchie esperienze ed osservazioni di A. B. con altre recenti di diversi Autori, per servire di seguito a quelle già pubblicate: estratto dagli Annali di Fisica e Chimica del prof. Majocchi. Fascic. 84, in 8°.

Tenore Cav. Michele. Semina quae in horto Regio Neapolitano Anno 1848, pro mutua commutatione offeruntur. Un foglio.

Id. Elogio Storico di G. G. Berzelio, scritto dal Dott. Martius: prima versione dal tedesco di M. T. Napoli, 1849, in 8°.

Sandri Dott. Giulio. Cenno sulla disposizione ai mali contagiosi. Venezia, 1845, in 4°.

Id. Memoria su la foglia de' gelsi. Verona, 1843, in 8°.

Id. Nota alla Memoria precedente. Verona, 1844, in 8°.

Id. Su lo stesso argomento, Articolo estratto dal Giornale Agrario Lombardo-Veneto. Milano, 1845, in 8°.

Id. Memoria su la Fersa del gelso; estratta dal detto Giornale Agrario. Milano, 1848, in 8°.

Id. Sulla golpe del frumento, Memoria premiata dall' Accademia di Agricoltura, commercio ed arti di Verona. Verona, 1847, in 8°.

Chelini P. Domenico delle S. P. Dimostrazioni di alcuni teoremi del Signor Federico Gauss intorno alle superficie curve: dal Giornale Arcadico. T. XCV. Giugno e Luglio. Roma, 1848.

Id. Note sulle linee geodesiche di curvatura nelle superficie di second' ordine: dalla Raccolta scientifica del Palomba, Anno II.

Id. Dimostrazione del principio delle velocità virtuali: dalla Racc. scient. Anno III.

Id. Sui centri dei sistemi geometrici: Racc. scient. Anno V. 1849.

Id. Sull' uso sistematico dei principj relativi al metodo delle coordinate rettilinee, Memoria estratta dalla Racc. scient. Anno V. Roma, 1849, in 8°.

Zantedeschi Cav. Ab. Francesco. Cenni di alcuni studi sperimentali. Firenze, 1848, in 8°.

Id. Dell' influenza delle variazioni di pressione nelle indicazioni termometriche.

Id. Della produzione di imagini ottenuta dalla projezione spontanea degli ossidi metallici sottoposti ad alte temperature, e di un quarto stato della materia.

Id. Dei fenomeni elettrici della macchina di Armstrong e delle cause loro assegnate dai Fisici. 1848.

Id. Elenco delle principali opere scientifiche dell' Ab. Francesco Zantedeschi, Cavaliere etc. etc. Venezia, 1849.

Id. Annali di Fisica, Fascic. I. Padova, 1849-1850, in 8°.

Geromini. Introduzione alla Clinica della Medicina Misontologica. Milano, 1849. Un Vol. in 8°.

Porta Luigi. Delle malattie e delle operazioni della ghiandola tiroidea. Milano, 1849, in 4°.

Del Giudice Francesco. Universalità dei mezzi di previdenza difesa e salvezza per le calamità degl' incendj, Opera

premiata in concorso dall' Accademia delle scienze dell' Istituto di Bologna. Bologna, 1848. Un Vol. in 4°.

Scortecagna Orazio. Intorno a due specie di vermi: estratto dai nuovi Annali delle scienze naturali di Bologna. Fasc. di Aprile 1848, in 8°.

Tardy prof. Placido. Sopra alcuni punti della teoria del moto dei liquidi. Firenze, 1847, in 4°.

Cenno necrologico sul Cav. prof. Gio. Battista Magistrini. Bologna, 1849, in 8°.

ELENCO

DEI PIÙ RECENTI LAVORI DEI MEMBRI ATTUALI DELLA SOCIETÀ

PUBBLICATI FUORI DEGLI ATTI DELLA MEDESIMA.

Avogadro. Nel T. VIII. Serie 2ª. delle Memorie della R. Accademia delle scienze di Torino,

Mémoire sur les Volumes atomiques et sur leur rèlation avec le rang que les corps occupent dans la sèrie Electro-chimique:

Mémoire sur les Volumes atomiques des corps composès.

Bellani. Nel Giornale dell' I. R. Istituto Lombardo di scienze lettere ed arti: T. I. della nuova serie, 1848,

Della causa della mortalità dei gelsi, e del modo d' impedirla:

Congliettnre sopra un antico singolare arnese di prezioso metallo disotterrato presso Como.

Belli. Nel Giornale suddetto, Fascicoli dei Numeri 44..... 48,

Considerazioni sulle Trombe di terra e di mare: Articoli tre.

Nel Giornale medesimo, T. I. della nuova serie,

Sulla luce azzurra della grotta di Capri. Estratto di una Memoria del Prof. Melloni, con Aggiunte:

Sul movimento delle bolle d' aria nei livelli in conseguenza del calore. Comunicazione di alcune osservazioni di M. Liagre, con Aggiunte.

Bianchi. Nella Raccolta scientifica del Palomba, Giornale di Roma, Anno III.,

Nota intorno alle proprietà delle proporzioni aritmetiche e geometriche, le une considerate comparativamente alle altre:

Sopra la Plejade australe, ossia il bel gruppo di stelle nella costellazione del Sagittario.

Ivi, Anno IV.,

Sopra le occultazioni di Aldebaran per la Luna nell' anno 1848, Articoli due:

Lettera 3ª. sopra le rifrazioni astronomiche nelle piccole altezze:

Nota sopra il numero delle cifre, che ha la radice di qualunque ordine di una corrispondente potenza numerica, intera ed esatta.

Ivi, Anno V.,

Fenomeno presentato dalla cometa di Petersen la sera 8 Dicembre 1848:

Nota sopra l'obbliquità dell'ecclittica nell'anno 1848.

Carlini. Nella Raccolta scientifica suddetta, Anno III.,

Alcune considerazioni sul calcolo delle orbite delle comete:

Effemeride della Cometa di Hind nella possibile riapparizione dopo la congiunzione col Sole.

Bertoloni. Nei Novi Commentarii Accademiae scientiarum Instituti Bononiensis, T. IX. Miscellanea botanica VII.,

Sermo de Robigine tritici.

Nei Nuovi Annali delle scienze naturali, Serie 2ª, T. VIII.,

Osservazioni sopra quattro specie di Veccie Italiana.

Ivi, T. IX.,

Osservazioni intorno al Polycarpon peploides.

A parte,

Flora Italica. Voluminis septimi fasciculus secundus et tertius. Bononiae, Typis haeredum Richardi Masi.

Fusinieri. Nel T. III. delle Memorie dell' I. R. Istituto Veneto di scienze lettere ed arti,

Sulla Filosofia della Fisica, 1847.

Negli Annali delle scienze del Regno Lombardo-Veneto, Bimestri V e VI. del 1845, pubblicati negli anni 1847, 1848,

Discussioni sopra varj oggetti della Filosofia della Fisica, Appendice III.; Varie Risposte e opposizioni al prof. C. Conti.

Mossotti. Negli Annali della Università toscana, T. I.,
Sulle proprietà degli spettri formati dai reticoli, ed analisi della luce che somministrano.
Nel giornale toscano, il *Cimento*, anno IV.,
Considerazioni sulle forze di capillarità e coesione dei liquidi relative alle recenti esperienze dei Signori Henry, Donny ed Hoger.
Sandri. Nelle Memorie dell' Accademia Agraria di Verona, T. XXI., e premiata, 1847,
Sulla golpe del frumento.
Negli Atti dell' I. R. Istituto Veneto di scienze lettere ed arti, T. VI., 1847,
Estratto della Memoria dell' A. sull' idea generale di contagio.
Nei T. XX e XXII. delle Memorie dell' Accademia Agraria di Verona, premiata,
Memoria, e successiva Nota sulle macchie nelle foglie dei gelsi.
Nel Giornale Agrario Lombardo Veneto, Fasc. di Gennajo 1848,
Articolo sulla fersa del gelso, e in generale sulla produzione degli esseri che vivono in altri viventi.
Nel Giornale col titolo, il *Tornaconto*, NN.[i] 37 e 38,
Articolo sulla pulmonea bovina, in cui mostrasi che veramente è contagiosa.
Sismonda. Nel T. IX. 2ª. serie delle Memorie della R. Accademia di Torino,
Notizie e schiarimenti sulla costituzione delle Alpi piemontesi:
Notizie due: una sul gesso della formazione terziaria in Piemonte, e l' altra sui conglomerati delle Alpi.
Tortolini. Nel Giornale del Sig. Crelle. T. XXXIV. Berlino, 1847,
Addizione alla Memoria intitolata: « Nuove applicazioni del calcolo integrale relative alla quadratura delle superficie curve e cubatura dei solidi. »
Nel Giornale arcadico di Roma, T. CXIII., 1847,

Memoria sopra alcune superficie curve derivate da una data superficie, e di genere *concoidali.*

Ivi, T. CXVI, 1848,

Memoria sulla riduzione di alcuni integrali definiti ai trascendenti ellittici, ed applicazione a differenti problemi di Geometria e di Meccanica razionale.

Nella Raccolta scientifica del Palomba, anno IV.,

Nota sulla quadratura di una certa superficie curva.

Ivi, anno IV.,

Nota sull'equazione e rettificazione della curva piana, luogo geometrico di un punto, dal quale se si conducano due tangenti a due circoli dati di egual raggio il loro prodotto sia costante.

Ivi, anno IV.,

Nota sull' equazione della curva piana, luogo geometrico di un punto tale, dal quale condotte due tangenti ad un' ellissi data, l' angolo delle medesime sia costante.

Nei Novi Commentarii Accademiae scientiarum Instituti Bononiensis, T. IX., 1848,

Commentatio de formatione quarumdam Equationum Algebraicarum, quibus satisfaciant functiones algebricae datae.

Santini. Nella Raccolta scientifica del Palomba, anno IV., Roma, 1848,

Nota di osservazioni e comunicazioni astronomiche diverse.

Plana. Nella Raccolta scientifica del Palomba, anno III., Roma, 1847,

Memoria sopra le formole matematiche, atte a risolvere i problemi relativi all'azione emanata dalle correnti voltaiche circolari:

Memoria intorno alle formole atte a paragonare colla teoria le osservazioni fatte sull' azione che le correnti terrestri esercitano sopra i conduttori voltaici perfettamente mobili, nell' ipotesi che queste correnti fossero di figura circolare.

Nel T. IX. 2ª. serie delle Memorie della R. Accademia di Torino,

Recherches analytiques sur la découverte de la loi de la pesanteur des planétes vers le Soleil, et sur la théorie de leur mouvement elliptique; 1.re et 2.de Partie.

Nel Giornale di Crelle, T. XXXVI.,

Nouvelles Formules pour reduire l' integrale

$$V = \int \frac{T\,dx}{\sqrt{X}}, \text{ etc. etc.}$$

Pianciani. Nella Raccolta scientifica del Palomba, anno III.,

Sperimenti fatti in conferma della Memoria del Commendatore Bar. Plana sopra le formole matematiche relative all' azione emanata dalle correnti voltaiche:

Azione magnetica sulla luce polarizzata: Nota.

Vico. Nella Raccolta scientifica del Palomba, anno III.,

Nota sulla teoria del moto uniforme.

ELOGIO

DEL CAVALIERE E PROFESSORE

GIUSEPPE VENTUROLI

SCRITTO DAL DOTTORE E INGEGNERE

MAURIZIO BRIGHENTI

Ricevuto il 1° *Giugno* 1848.

Giuseppe di Domenico Venturoli e di Anna Persiani, l' uno e l' altra di civile ed abbastanza agiata famiglia bolognese, nacque in questa città nel dì 21 Gennaro 1768. Erano allora tempi di pace, e di studi per tutta l' Europa; e Bologna manteneva gloriosamente la fama antica d' insegnatrice. Ond' egli sortì la patria adatta, la fortuna sufficiente, il tempo propizio all' ingegno straordinariamente capace, che la natura gli avea dato: sortì poi i genitori solleciti de' figliuoli e di ottimo esempio, la complessione inalterabile alle fatiche della mente, e l' indole temperata e ottimamente composta a mantenere costante il tenore della vita fra le condizioni pubbliche sommamente mutabili e mutate che gli toccarono.

Gli bastò la puerizia all' acquisto delle umane lettere, e il primo fiore dell' adolescenza a quello della filosofia. Era allora consuetudine fra noi di mandare innanzi a tutto il latino, e durano tuttavia le lodi, che gli furon date ne' quattordici anni, di scrittore elegante in quella lingua, e quelle per le tesi sostenute nel cimento solenne della laurea filosofica, che ottenne nel 20 Aprile 1789.

Il Venturoli di 21 anni sapeva non solo di latino e di filosofia quanto s' insegnava nelle scuole, ma di greco, di

francese, di spagnuolo, d'inglese tanto da intenderne qualunque scrittura, e scriverne; e di leggi, di scienze naturali, di matematiche quanto i maestri. Nello studio delle leggi fu avviato da principio, e se ne distolse per avversione alle gare forensi; voltosi a quello della medicina fu preso da tale apprensione della malattia del diabete, che gli pareva d'esserne affetto, e se ne rattristava a modo che il prudente genitore e i medici ne lo ritrassero; onde si diede finalmente a tutt' uomo a quello delle matematiche applicate.

Restano di lui manuscritte sei Dissertazioni latine recitate in questo Istituto delle scienze e nell' Accademia del Conte Carlo Rusconi dal 1791 al 1794; quattro sono di argomento idraulico, una sulla elettricità atmosferica, l' altra sulla forza del cuore. S' egli ci fosse mancato ne' 26 anni, basterebbero queste scritture a mostrare ch' era già de' più dotti scienziati dell' età sua.

Nella prima sul corso delle acque negli alvei aperti sottopose alle rigorose condizioni delle generali equazioni della Idrodinamica stabilite dal d' Alembert le ipotesi del Bonati, del Guglielmini, e degli strati paralleli, e mostrò che non potevano adempirsi ne' fiumi, bensì talvolta nei tubi e negli acquedotti chiusi. Trattò nella seconda del pendolo idrometrico, nella terza degli efflussi, nella quarta della pressione sulla sezione del lume, e rannodò alla teoria del moto lineare e delle resistenze tutti i problemi che vi si riferiscono, e si trattavano allora con modi diversi e con supposizioni particolari ad ogni caso. Immaginò fin da quel tempo quel pendolo composto, che fra i tachimetri ebbe luogo cospicuo per la teoria; e se non fosse a centro fisso potrebbe tenersi pel più semplice a determinare la scala delle velocità in qualunque stato di acque dei fiumi. La Memoria sulla elettricità atmosferica, oltre far fede della sua dottrina nella fisica sperimentale, mostrò con quanta dirittura della mente dalle esperienze del Volta sull' accrescimento di capacità pel fuoco elettrico ne' liquidi che passano allo stato aeriforme, egli ne cavasse

la spiegazione dello stato elettrico dell' atmosfera, che fu la più ragionevole di tutte, fino alle più recenti osservazioni del Pouillet, che le indebolirono quel fondamento. Nell' ultima sulla forza del cuore fece manifesto che la misura diversa datane dal Borelli, dall' Hales e dal Keil dipendeva unicamente dalle forze diverse messe in conto da ognuno di que' sapienti.

In tanta gioventù scrisse ancora l' Elogio del Montefani, uscito qui anonimo per le stampe della Volpe nell'anno 1794. Egli non volle dichiararsene autore per indole modestissima. Ma quell' aureo latino, quella tanta dottrina che vi splende il manifestarono. E il Pessuti lo proclamava nelle Romane Effemeridi parlandone con affetto di grande riverenza e meraviglia, e salutando dal Tevere il giovane filosofo e letterato di Bologna, come uno di *que' rari e fortunati genj* = *queis meliore luto finxit praecordia Titan.* =

A sì luminose prove di valore seguitarono le ricompense; nel 1790 fu ascritto all' Istituto come Socio onorario, l' anno dopo fatto Segretario aggiunto al Canterzani; nel 1795 ottenne la lettura onoraria nell' Università e tre anni dopo la stipendiaria; inoltre l' ufficio di Professore sostituto d' Istoria naturale e di assistente nella Biblioteca. Fra queste cure si versò tranquillamente nei rivolgimenti repubblicani che avvennero allora, e durarono fino all' ordinamento del Regno italico. E nondimeno ci lasciò scritta in questo intervallo di tempo una eccellente Memoria sulla degenerazione del senso del colorito, che succede nell' occhio stanco dall' avere lungamente riguardato ad uno de' principali colori del prisma; e pubblicò egli la traduzione dell'opera sul calore animale ec. del Crawford, illustrandola di note dottissime; e la Società Italiana, che si onorava di lui fino dal 1804, registrò ne'suoi Volumi la sua bellissima Dissertazione sull' efflusso dell'acqua dai tubi addizionali.

Ma soprattutto veniva preparando i materiali per comporre l'aureo Trattato degli elementi di Meccanica e d'Idraulica,

uscito in luce negli anni 1806-1807. Leggeva in Matematiche applicate nell' antico studio pel Canterzani fino dal 1797, e in qualità di Professore dell' Università nazionale nel 1802. Ond' ebbe l' occasione e lo stimolo crescenti a quella fatica, il cui bisogno era sentito da tutte le scuole d' Italia.

Questo libro è per le mani di tutti, e fu dal costante consenso dei dotti sì favorevolmente giudicato in Europa e in America fino ai nostri giorni, che non potrebbero aggiungergli lode le mie parole. Dirò solo che potranno mutare specialmente nella Idraulica i principj, accrescersi in seguito le cognizioni in tutta quanta la Meccanica; penso anzi che muteranno quelli, si accresceranno questi, ma che sarà impossibile di ordinare in un corpo di dottrina gli uni e gli altri più perfettamente, più splendidamente di quello che il Venturoli fece al suo tempo nel suo Trattato. E credo di non poter essere contraddetto affermando che quel libro rimarrà perpetuamente il modello di siffatte istituzioni. Guardando allo stato della scienza, non lascia cosa alcuna da desiderare, e presenta spesso il merito proprio degli ingegni, potenti anche nella invenzione, di ampliarne o migliorarne le applicazioni, come nei problemi delle pressioni e degli sforzi sui cardini di una porta, dell'ariete idraulico, del pendolo semplice e del composto, dei tubi addizionali o di condotta e delle ruote idrauliche, e specialmente della determinazione del moto delle acque in un piano o nei vasi conici.

Sia pur vero che la teoria del moto delle acque è tanto manchevole da non potersi applicare con fiducia alla pratica; e che convenga rinunciare alle ipotesi, e attenersi unicamente alle osservazioni onde comporne una scienza induttiva e non più, siccome la Medicina.

Ma i tentativi fatti dal Venturoli, che sono de' più famosi, per la determinazione del moto delle acque in un piano, quantunque preceduti da quelli del Lagrange, quelli al tutto suoi dell'efflusso dai vasi conici, diedero occasione a guardare e riguardare nelle equazioni fondamentali dell' Idrodinamica,

aumentarono la scienza delle celebri indagini de' nostri giorni, fecero ripetere il nome del Venturoli fra tutti i dotti viventi con ammirazione che durerà.

Sommo letterato ch' egli era diede alle sue scritture, in qualunque lingua fossero, una forma semplice ed elegante, e soprattutto di dettato tanto perspicuo da non potersi bramare di più. Riuscì eccellente anche nel parlare improvviso dalla cattedra per l' ordine delle idee e la loro esattissima significazione, la più breve possibile ed insieme la più trasparente. Ne' 20 anni che lesse all' Università fu chiamato ad ogni maniera di pubblici uffici; di Censore della stampa, di Consigliere della Provincia e del Comune, di Membro del Collegio elettorale dei dotti, di Reggente dell' Università, d' Ingegnere idraulico. Per gli studi fu mandato a Lione a rappresentare ne' Comizi l' Accademia dell' Istituto bolognese, per le acque a Milano, ed ivi e fra noi ebbe a riferire più volte sulla immissione del Reno in Pò da tre secoli disputata, finalmente intrapresa, e con immenso dispendio portata quasi a fine, poi di nuovo sospesa, chi sa se per compiersi o no in tempi migliori! Ma il più grave e solenne di tutti i carichi gli venne affidato dalla santa memoria di Pio VII, quando nel 1817 il chiamò a Roma a reggere la Scuola e il Corpo degl' Ingegneri, e a presiedere al Consiglio d' arte per i lavori di acque, strade e fabbriche dello Stato.

Aveva nel detto anno quel glorioso Pontefice fondata la detta Istituzione nel M. P. del 23 Ottobre coll' opera del celebre Girolamo Scaccia; il quale conosciuto quì di persona il Venturoli lo indicò egli al sapientissimo Principe come degno Capo di essa, egli che poteva aspirarvi, ed era certo di esservi designato dallo stesso Principe per merito e per ricompensa del servigio ottimamente reso. Raro ed imitabile esempio di quel virtuoso sapiente, al quale il Venturoli fu poi sempre collega ed amico fedelissimo! E questi molto operò per la Scuola, molto più pel Consiglio d' arte, durato a reggere dell' una e dell' altro per sei lustri il timone!

*

Dalla prima uscirono ed escono allievi peritissimi della scienza e delle pratiche in ogni maniera di pubbliche fabbriche; dall' altro i più solenni giudicati che mai si pronunciassero, sì rispetto all' arte che all' amministrazione. Riconosciamo di perpetua obbligazione l' immortale Pio VII, che decretò la Scuola e il Corpo degl' Ingegneri pontifici, Girolamo Scaccia che diede forma al decreto, Giuseppe Venturoli che nell' atto fece gloriosa quella magnifica Istituzione.

Niuno, fra i benemeriti e chiari che cooperarono col Venturoli, gl' invidiò questa lode, perchè o gli furon colleghi o discepoli, e tutti amarono in lui la bontà e la modestia singolare, ammirarono e riverirono il sapere e l' ingegno straordinario.

Era sopra ogni credere eccellente pel giudizio rettissimo e sicuro in ogni maniera di opere d' arte o di controversie amministrative, e lo significava ben circoscritto e con singolare efficacia a persuaderlo altrui; la qual perfezione gli veniva dalla felice natura e dal saper bene. Ond' è che i suoi pareri, specialmente in materia di acque, lo qualificano pel più compito idraulico de' suoi tempi, avendo abbracciata tutta la vastità della scienza e della pratica. Molti furono stampati; il maggior numero è nell' archivio del Consiglio d' arte; taluni n' ha lasciato manuscritti al figliuolo. In tanta altezza di grado, non isdegnava i subjetti più umili; e vedemmo da lui composte molte questioni di artieri, di confini, di servitù, in somma di ogni specie di quegli affari minuti de' quali sono impazienti i dotti del valore di lui. Ma aveva l' ingegno e l' animo tolleranti, e per ciò appunto grandissimi; fin dalla prima età operosissimo non rifuggiva dalle fatiche di ogni sorta.

Mi pare in lui singolare, che dalla puerizia alla matura virilità, dato soprattutto alle scienze, alle lettere e all' esercizio della cattedra, viveva per lo più fra studi indefessi, molto parco a sollevarsi nelle brigate e ne' teatri. Quando ne' cinquant' anni fu chiamato agli affari pubblici, divenne amantissimo degli spettacoli, in particolare modo delle musiche

e delle colte conversazioni. L'avresti detto interamente e onestamente assorto in questi piaceri, se non avesti saputo che dal primo mattino alla sera era tutto delle sue gravi occupazioni.

Frutto di que' lunghi e forti studi fu la cognizione ampia di tanto varie letterature; e facea meraviglia, come senza pompa e solo richiesto, ti dava conto de' classici italiani, latini, francesi, inglesi, spagnuoli, come se gli avesse avuti sott' occhi allora, allora; riferendone esattamente i luoghi e non di rado le sentenze colle loro parole; e più della memoria prodigiosa si ammirava in lui la sapienza del giudicarne. Che diremo, che della musica ancora era espertissimo? Accompagnava col piano forte all' improvviso, e ben di rado lo arrestavano le maggiori difficoltà. Ho notate, forse troppo al minuto, queste cose che a me sembrano stupende, per mostrare quanto avesse ampia la mente ed operosa la volontà.

Negli uffici molti e gravissimi che tenne fu de' più solleciti. Ne' venti anni ne' quali lesse all' Università diligentissimo, pronto ad ogni bisogno ad ogni desiderio degli studiosi, e ne' sei lustri che stette al Consiglio d' arte, dissimulando quasi la faraggine delle cose tanto varie da giudicarsi, dava l' opera sua così alle più gravi come alle più leggere e fastidiose; e si mostrava ora il computista, ora il solenne maestro, sempre l' uomo esatto e premuroso del debito suo e speditissimo in ogni parte.

In qualità di Segretario *della Sezione dell' Istituto Reale delle scienze* sedente in Bologna ci ha lasciato testimonio delle cure indefesse che vi pose, nella corrispondenza epistolare coi colleghi e col Governo, specialmente per la pubblicazione del sesto ed ultimo Volume degli Atti di quella insigne Accademia, uscito quì nel 1814 colla data del 1813. Vinse colla costanza le molte e dure difficoltà che gli si pararono innanzi in que' tempi tanto difficili ed ai pacifici studi tanto infesti, ed arricchì quel Volume delle indicazioni che vi si leggono sulla qualità e sull' importanza delle materie trattate in tutta la Raccolta. Seguitò fino al 1817 a mantenere in vita la *sua*

Sezione, ma le Memorie dei colleghi e le sue, lette o mandategli in questo tempo, furono dagli autori stampate in altre collezioni o separatamente, perchè mancarongli i necessari ajuti del Governo. Traslocatosi a Roma in quell' anno, cesse l' ufficio di Segretario al collega Sig. Prof. Magistrini, che seguitò a mantener semiviva quell' Accademia fino al 1829, nel qual anno risorse colle antiche regole la presente Benedettina delle scienze.

A questo risorgimento cooperò il Venturoli con effetto, e i nuovi commentari di questo antico Istituto bolognese si fregiarono degli ultimi scritti di lui. Vi si leggono la teoria e la pratica del movimento alternativo delle maree negli estuari, applicata specialmente al porto di Cesenatico; l' effemeridi, dal 1822 al 1846, della portata quotidiana ed annua del Tevere, paragonata alla pioggia caduta sulla campagna tributaria; l' applicazione della formola del pelo d' acqua rigurgitato al canale di Pavia. Bella dimostrazione di quanto quell' insigne Professore stimasse importante la cognizione dei fatti per dedurne le leggi del corso delle acque, e come vedesse il vuoto delle teorie da lui professate con tanto onore nel tempo de' suoi più vigorosi studi. E già ne aveva dato argomento fin da quando divulgò fra le ricerche della scuola di Roma la formola di Eytelwein colle nuove esperienze sul Pò e sul Tevere, e quella determinazione della curva del pelo d' acqua promossa teoricamente dal Mossotti, e da lui ridotta alla pratica nel caso di lievi alterazioni nel corso dei canali. Di questa ricerca, certamente delle più belle ed utili del Venturoli, riprodusse in latino il sunto qui sopraccennato negli Atti della Benedettina, forse perchè quelle Memorie della scuola di Roma e segnatamente quest' ultima, uscita anonima nel 1823 e poco divulgata, era stata messa fuori da altri tacendone o notandone di sfuggita l' Autore, o sotto forma alquanto diversa. È da dolere che gli Atti della scuola di Roma finissero con questa unica Memoria del Venturoli; e soleva addurne a cagione che mancarono gl' incoraggimenti

d' ogni maniera. Ond' egli si rivolse al patrio Istituto e coi preziosi scritti che abbiamo indicati sollevò la professione dell' Ingegnere idraulico a maggiore altezza, mostrando la pratica essere il sommo dell' arte che dalla cognizione dei fenomeni compone la scienza; la quale è tanto più perfetta, quanto più i fenomeni sono universali e bene osservati in ogni loro attinenza.

Così il Venturoli venne in voce di sommo filosofo teorico e pratico e di grande letterato fra noi e fuori: e fu tra noi l' ultimo della insigne famiglia di sapienti, che da Domenico Guglielmini fino ai giorni nostri mantennero splendida e continuamente gloriosa la scienza delle acque in Bologna, ov' ebbe per opera loro le fondamenta, e si accrebbe; fu l'erede ultimo della vasta erudizione negli studi del vero e del bello di cui ci lasciarono esempio.

Visse, quanto all'ordinario corso mortale è concesso, lungamente; non quanto avrebbe probabilmente potuto. Perchè di complessione delicata ma forte, egli sentiva anche nella vecchiaja il vigor della mente e del corpo degli anni migliori; e non si astenne dalle fatiche sproporzionate all'età. Nell'ultimo anno di sua vita volle visitare le strade e le acque delle Marche e delle Legazioni, e collaudarne i lavori: e v'impiegò tre mesi con incessanti giri e rigiri. Poi andò a Venezia e a Milano a vedervi le antiche e le nuove meraviglie, i tanti amici e colleghi. Tornato qui infermò poco dopo di violenta iscuria, e ci mancò il 19 Ottobre 1846. Mirabile nella puerizia e nella prima adolescenza, riverito nell' età matura, e sempre più attempando, finì con esemplare serenità in patria fra i congiuntissimi, e nelle braccia del figliuolo e della nuora che amava tenerissimamente.

Fu pio, benefico, ottimo padre di famiglia, specchio di modestia, di costanza d' animo, di virtù domestiche e pubbliche. Meritò gli onori, de' quali fece la stima che i prudenti fanno. Venne ascritto fra i Soci di tutte le più famose Accademie d' Italia: ebbe dal Governo le prime cariche, e dall'

unanime giudizio di tutti i dotti nostrani ed esteri ottenne il primo luogo fra i maestri da preporsi all' insegnamento delle Matematiche applicate.

Dopo morte il patrio Municipio gli decretò l'erma ricordevole della immagine fra gl' illustri concittadini, il Consiglio d'arte nel Panteon Capitolino: nè gli mancherà il monumento in questa Università.

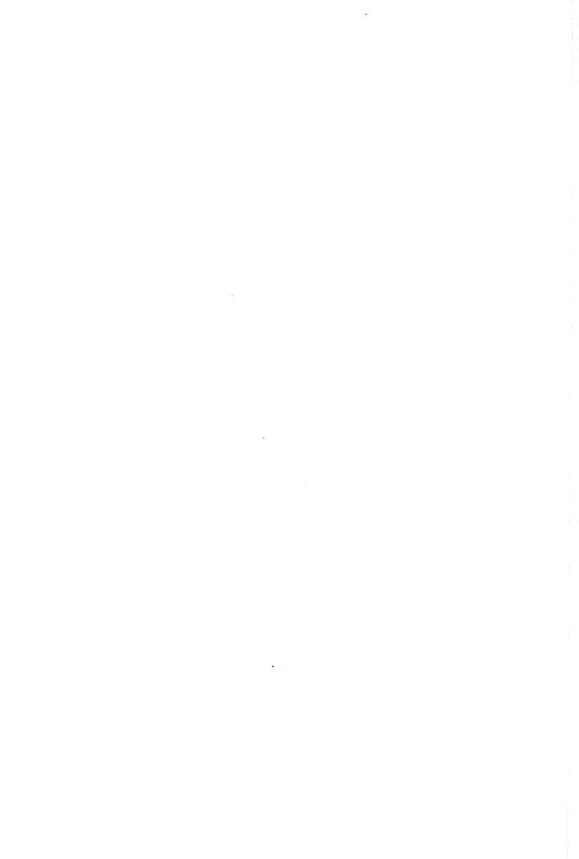
Meravigliarono taluni che un uomo sì grande e benemerito fosse giunto alla vecchiaja senza insegne di Cavaliere; onde applaudirono alla Santità di N. S. Pio IX, che appena salito sul trono lo nominò Commendatore di S. Gregorio Magno. Il Venturoli, che in tanta modestia parea glorioso di non aver tocco siffatti onori, si rallegrò di riceverli dalla sapienza di un tanto Pontefice, le cui virtudi e il gran cuore sono l' ammirazione del mondo.

MEMORIE

DELLA

SOCIETÀ ITALIANA DELLE SCIENZE

RESIDENTE IN MODENA

Tomo XXIV. — Parte II.

DI ALCUNE PARALISI
CURATE COLL' ELETTRICITÀ VOLTAICA.
MEMORIA SECONDA

DEL PROFESSORE

STEFANO MARIANINI.

Ricevuta il 20 Luglio 1845.

La benigna accoglienza che i cultori delle scienze mediche fecero alla mia Memoria sopra alcune paralisi curate cogli elettromotori (1) mi anima a pubblicare questa seconda. Molte furono le persone affette da paralisi, alle quali, dopo la pubblicazione di quella, mi venne dato di amministrare l'elettricità, la quale ad alcune apportò salute, a non poche notabile miglioramento, ad altre riuscì indifferente, a nessuna dannosa. Ma per amore di brevità non parlerò de' casi in cui la cura elettrica niuno o insignificante vantaggio recava, a meno che abbiano dato occasione a qualche osservazione speciale.

L'elettromotore impiegato fu sempre quello a corona di tazze allestito con acqua più o meno salata, in cui pescavano le piastre di rame e zinco per circa sette o otto centimetri quadrati di superficie; ed i metodi e le cautele usate, ove non sia detto altrimenti, furono quelli descritti nell'altra Memoria. Se non che trovai opportuno di valermi talvolta del galvanometro per conoscere il grado di forza che spiegava

(1) Annali delle Scienze del Regno Lombardo-Veneto. I e II bimestre del 1833.

l'elettromotore nelle diverse circostanze. E ciò principalmente io faceva perchè non mi accadesse di attribuire ad aumento o a difetto di suscettibilità delle parti elettrizzate lo scuotersi più o men fortemente, quando per avventura non sarebbe provenuto se non dalle variate condizioni dell' apparecchio. È noto che quando la comunicazione fra i poli è stabilita da un conduttore umido, sì le contrazioni che gli effetti elettro-magnetici sono più forti o più deboli secondo la conducibilità del detto deferente. Perciò osservando al principio di ogni elettrizzazione la deviazione galvanometrica, e quando il solo filo dello stromento serve a chiudere il circuito, e quando fa parte di questo anche la persona da elettrizzare, veniamo a conoscere se le differenze, che accadono nella gagliardia delle contrazioni o delle sensazioni, provenga da alterazione nella energia dell'elettromotore, o da variata conducibilità de' cuscinetti umidi, ovvero da variata suscettibilità nelle parti elettrizzate di rispondere alla corrente voltaica.

PARTE PRIMA

Cure seguite da guarigione.

I. Elia Mardo israelita d'anni dodici per sudore ritirato divenne paralitico in alcuni muscoli del lato sinistro del collo, per cui rimase colla testa quasi appoggiata sulla spalla destra, ed eragli impossibile da circa un anno rialzarla. Egli venne elettrizzato ai primi d' Agosto del 1829 coll' elettromotore a corona di tazze facendo comunicare mediante striscie metalliche e cuscinetti umidi la mano sinistra col polo negativo, e la parte superiore laterale sinistra del collo col positivo, e regolando le comunicazioni in guisa che le contrazioni producessero movimenti simili a quelli che l'ammalato avrebbe dovuto fare per raddrizzare il collo. Io elettrizzai quel ragazzo cinque volte con parecchie centinaja di scosse ogni volta; ed il vantaggio riportato consisteva principalmente nel con-

traersi i muscoli più fortemente che non i primi giorni a parità di circostanze. Dopo della quinta elettrizzazione, dovendo la famiglia del malato trasferirsi con esso a Corfù, io le diedi la corona di tazze, acciocchè la madre di lui, la quale, assistendo alle fatte elettrizzazioni, aveva imparato ad apprestarle questo rimedio, potesse proseguire, come fece, la cura. Non so per quanto tempo siasi proseguita l'elettrizzazione; ma so che l'esito è stato felice, avendomene assicurato il Sig. Samuele Olper di Venezia, il quale vide il suddetto Elia Mardo dopo un anno perfettamente ristabilito.

II. La Signora Triffoni di circa quarant' anni era affetta alle gambe, e più ancora ai piedi, da paralisi incompleta, per cui non poteva camminare senza le stampelle. La ho elettrizzata nello spedale civico di Venezia l'autunno del 1829 col solito metodo quindici volte; ma non seppi se non dopo la pubblicazione della citata Memoria che il miglioramento osservato dopo quella breve cura aveva proseguito, e così bene, che dopo qualche mese la Triffoni trovossi guarita.

III. La Signora Susanna Muja, quella stessa che, presa da emiplegia all'età d'anni ventiquattro, e, trovati inutili i molti rimedj usati per quattro anni, guarì dopo l'amministrazione dell'elettricità nel modo che pubblicai nella citata Memoria, dopo cinque anni che godeva buona salute, ricadde ai primi di Maggio del 1834, in conseguenza di aborto, nell'antica paralisi al lato sinistro; la quale questa volta era limitata al solo arto inferiore. Memore del buon effetto in altro tempo ritratto dalla corrente voltaica, la Signora Muja volle a dirittura questo rimedio. E siccome anche questa volta la trovai molto eccitabile alle scosse; così limitai il numero delle coppie a quaranta o al più quarantacinque allestite con acqua leggermente salata, dandole non più di trecento scosse da principio, e non più di 350 verso il termine della cura; ed aggiungendo ogni volta quattro o al più sei circoli da quattro minuti cadauno. Il polo positivo comunicava per via della solita striscia di piombo e del cuscinetto umido colle vertebre

lombari, ed il negativo col collo del piede o colla pianta. La elettrizzazione eseguivasi quasi sempre la mattina mentre l'ammalata era a letto, e ciò per maggiore comodità, ed anco perchè le contrazioni riuscivano molto più forti che non quando era alzata.

O fosse perchè il male era meno grave, o perchè più recente, o pel concorso di entrambe queste favorevoli circostanze, il miglioramento non si fece desiderare come la prima volta. Dopo dieci elettrizzazioni l' inferma aveva già guadagnato sensibilmente. Dopo la vigesima faceva de' passi alzando il piede da terra; e dopo la vigesima sesta, che fu l' ultima, camminava speditamente, come prima che si ammalasse. Questa cura durò dal 10 di Maggio al 12 di Giugno.

Ma non passò un anno che in seguito a qualche patema, ed a strabocchevole mestruazione, cadde la Signora Muja per la terza volta paralitica all' arto inferiore sinistro. Riavuta che fu dagl' incommodi uterini, io mi recai da lei coll' apparato voltaico il dì otto aprile del 1835, e la trovai molto abbattuta di spirito, presa dal timore che, col ripetersi, quell' affezione avesse poi a farsi abituale ed invincibile. Io la confortava col dirle che, se l' elettricità è, come pare, il rimedio di quella sua malattia, l' avrebbe guarita anche questa volta, e traeva argomento di buon pronostico ancor dal vedere che tollerava le scosse meglio delle altre volte. Fortunatamente io male non mi apposi. Dopo otto elettrizzazioni la Signora cominciò a sentire la gamba alquanto sciolta, ed il 20 di Maggio non aveva più il menomo incomodo; ebbe la 24.ª elettrizzazione, e d' allora in poi non ricadde mai più.

IV. La damigella Sofia Rossi di Venezia d'anni quindici, quasi dalla nascita non godè mai buona salute: molti de' mali sofferti avevan lasciate reliquie: eccellentemente sviluppata nelle facoltà intellettuali, pochissimo nelle corporee, gracile, magra, pallida, maltrattata dalla scrofola, dalla clorosi, dalla rachitide, non era mai, non dirò guarita, ma neppure migliorata da alcuna di queste affezioni; e da ultimo, fattasi enorme

la curvatura alla metà superiore della spina dorsale, cadde paraplegiaca. Riusciti vani anche per questo nuovo malore gli altri rimedj, il Signor Dottore Bosio ch' era stato testimonio della cura elettrica da me apprestata alla Signora Triffoni, volle tentare l'elettricità.

Il 22 Maggio del 1835 io vidi per la prima volta questa inferma. Era inetta a qualunque benchè minimo movimento volontario in tutte le parti degli arti inferiori, i quali erano anche pochissimo flessibili. Qualche volta, e specialmente quando veniva sostenuta da altre persone, li detti arti si contorcevano stranamente. La paralisi era estesa fino ai lombi, per lo che, essendo seduta, se non appoggiavasi ai bracciuoli, o non facevasi tenere con cinghia, cadeva boccone. Il tatto mi parve allo stato naturale.

Sebbene la giovane inferma fosse eccessivamente apprensiva e timida, si persuase facilmente di lasciarsi elettrizzare quello stesso giorno. Adoperai un elettromotore a corona, di trenta coppie di rame e zinco immerse nell'acqua di mare per circa quattro centimetri quadrati di superficie. Poneva sulla regione delle vertebre lombari un cuscinetto bagnato contenente l'estremità d'una striscia di piombo la quale con l'altro capo comunicava col polo positivo: ed un altro cuscinetto colla striscia di piombo applicavasi al collo dell' uno o dell'altro piede, e portava l'altro estremo di questa striscia a toccare il polo negativo quando voleva dare la scossa. Quel giorno mi limitai a dar cento scosse all'arto destro, ed altrettante al sinistro, e dieci minuti di circolo in tre volte a ciascun arto. Ne' giorni successivi si andò aumentando gradatamente il numero delle scosse e quello delle coppie con cui si davano. Di maniera che alla decimottava elettrizzazione si faceva uso di ottanta coppie, e si davano cinquecento scosse a ciascun arto: e così si è proseguito sino alla fine della cura che durò due mesi; e le elettrizzazioni furono quaranta.

I primi indizj di miglioramento apparirono dopo la sesta elettrizzazione, e consistevano in una qualche flessibilità per-

manente agli arti. Dopo l' ottava si ebbero alcuni leggeri movimenti volontarj nel piede destro, i quali s' andavano sempre facendo più spiegati ed estesi ne' dì successivi. Dopo la decimottava videsi qualche movimento anco nell' arto sinistro. Dopo la 33.ª l' inferma sedendo stava ritta senza giovarsi di cinghia, o puntellarsi ai bracciuoli della sedia; poteva far i passi quando era sostenuta ai lati. E vedendo che il miglioramento progrediva anche tralasciando per parecchi giorni l' elettricità, dopo la quarantesima elettrizzazione andò a villeggiare. Il miglioramento non arrestossi per questo: io la vidi il 30 di Settembre che poteva far qualche passo appoggiata al braccio d'una persona. Proseguì sempre di bene in meglio non ostante l' avversa stagione. Ed il venti di Gennajo del 1836 la vidi stare in piedi delle ore senza stancarsi, e poteva camminare, correre e danzare come prima della paralisi (1).

V. Maria Gallo di Venezia d'anni dieci, non poteva da un anno e mezzo camminare senza sostegno, e senza molto zoppicare per enorme debolezza dell' arto inferiore destro, e sentiva ad ogni passo un vivo dolore al ginocchio. Il colorito della fanciulla era ottimo come la carnagione e la nutrizione; la gamba stessa inferma e la coscia non differivano dalla sana, se non nella forza. La madre pure era sana e di buon colore; ma nella sua giovinezza aveva perdute le ossa nasali non so se per iscorbuto, o per altra malattia. Riuscite inutili le cure apprestate per lungo tempo, volle il medico che quella zitella fosse trattata coll' elettricità.

Nell' Aprile pertanto del 1836 io impresi ad elettrizzarla dando trecento o al più quattrocento scosse ogni volta, impie-

---

(1) Questa e la precedente storia vennero lette alla Sezione di Medicina del Congresso scientifico di Firenze, e pubblicate nel Giornale per servire ai progressi della Medicina dell' Ottobre 1841. Tuttavia ho riputato non inutile il qui riprodurle insieme alle altre non ancor pubblicate e per l' importanza che mi sembrano avere, e perchè posso aggiungere, che anche la Signora Sofia Rossi ricadde nella stessa paralisi dopo tre anni ch' era guarita, e si riebbe collo stesso rimedio apprestatogli dal prelodato Sig. Dottore Bosio, come egli stesso ebbe la bontà di scrivermi.

gando trenta, quaranta o al più cinquanta coppie e dirigendo la corrente dalla coscia inferma al piede. Nè si ommisero i soliti circoli negl' intervalli di riposo: ma per questi impiegavansi solamente dodici, sedici, o al più venti coppie, riuscendo troppo forte il bruciore alla cute specialmente della coscia dov' era applicato il cuscinetto umido. Alla fine di Maggio era stata elettrizzata venticinque volte, e trovavasi notabilmente migliorata, camminava ancora zoppicando, ma senza sostegno, e con molto minore pena e fatica di quello che facesse prima della cura elettrica. Venne allora sospesa l' elettrizzazione; tuttavia il miglioramento non s' arrestò. Nell'Agosto successivo il camminare riusciva alla ragazza ancor meno incomodo. Ripigliò le elettrizzazioni, e n' ebbe un buon numero nel detto mese e nel successivo. Andò sempre di bene in meglio, e la lasciai nell' autunno che poteva dirsi quasi compiutamente guarita.

VI. Agostino Scaglioni di Modena, d' anni trenta, cantore di professione, cadde emiplegiaco al lato destro il 28 Gennajo dell' anno 1838 in conseguenza, per quanto pare, di troppo frequente uso di liquori spiritosi. Trasportato nella Clinica, ricuperò in breve tempo, mercè la cura apprestatagli dal chiarissimo Signor Professore Emiliani, la favella e la regolarità delle forme del volto: ma rimase una pertinace impotenza di muovere il braccio destro, la mano e le dita, di piegare il ginocchio, il piede e le dita di esso. E veduti affatto inutili per due mesi gli altri rimedj ad apportare ulteriore miglioramento all' infermo, volle il sullodato Clinico, ch'egli venisse trattato coll'elettricità voltaica. Recatomi pertanto il tre d'Aprile per incominciare la cura elettrica trovai lo Scaglioni cogli arti paralitici flessibili, meno caldi, specialmente alle estremità, degli altri, benchè fossero egualmente nutriti, e nel lato sano abbastanza forte per potere coll' ajuto d' una stampella ed anco del solo bastone passare lentamente da luogo a luogo strascinando come meglio poteva la gamba inferma. La mano malata stava costantemente socchiusa.

Ho incominciato nel detto giorno a darle duecento scosse, e due circolazioni continuate ciascuna per tre minuti, dirigendo la corrente dalla metà della spina alla mano, ed altrettante scosse e circoli dirigendola dalla detta regione spinale al piede, e facendo uso dell'elettromotore allestito con acqua mediocremente salata, ed impiegando quaranta, o al più sessanta coppie.

Dopo la terza elettrizzazione, cioè il sei d'Aprile, trovai lo Scaglioni assai lieto perchè sentiva la mano inferma tiepida, e la era di fatto. Dopo la quarta la mano cominciò anche ad inumidirsi per traspirazione. Dopo la quinta io vidi anche qualche indizio di movimento volontario in alcune dita. Alla settima elettrizzazione stringeva con qualche forza un dito applicatogli al palmo della mano, la quale era pur sempre tiepida ed umida. All'ottava l'infermo eseguiva varj piccoli movimenti colla mano, coll'antibraccio, e stringeva la mano con forza, specialmente quando era a letto. Dopo la nona elettrizzazione cominciò ad eseguire qualche movimento anche col pollice, che fino allora era stato inerte.

Qui fu sospesa per tre giorni l'elettrizzazione, perchè l'infermo venne salassato a motivo di certa oppressione al capo, da lui detta *smania*, per la quale gli pareva sempre di dover cadere in deliquio. Tolto mediante il salasso quell'incomodo ripigliossi la cura elettrica portando il numero delle scosse a sei cento. Dopo la decimaterza elettrizzazione l'infermo cominciò a movere qualche poco il braccio, a distendere la mano, ed a piegare il ginocchio nel sollevare il piede da terra. Da questo punto fino alla quarantesima elettrizzazione, che ebbe luogo il 26 di Giugno, il miglioramento del braccio progredì con più celerità che quello della mano e della gamba.

Una più lunga sospensione della cura elettrica ebbe allora luogo a motivo della mal ferma mia salute, e non potei riassumerla se non il 23 del mese d'Agosto. Nulla però aveva scapitato lo Scaglioni in quell'intervallo, anzi aveva guadagnato

notabilmente nella forza del braccio e della gamba. La mano per altro parevami ancora nello stato in cui l'aveva lasciata. Ne' due mesi successivi ho elettrizzato altre trenta volte lo Scaglioni, ed il suo stato procedette sempre di bene in meglio per guisa che verso la fine d'Ottobre potendo egli camminare senza bastone e gestire liberamente, ricuperati per la massima parte anche i movimenti della mano, uscì dallo Spedale, e tornò all'esercizio della sua professione.

VII. Angelo Mentichetti di circa quarant'anni non poteva eseguire da un mese verun movimento volontario nella mano sinistra e nei diti della medesima in conseguenza di legature praticategli a motivo di febbre accompagnata da deliro. Trecento scosse e tre circoli di tre minuti, dirigendo la corrente dalla mano sana all'ammalata, col solito elettromotore, e ripetuto cinque volte questo trattamento tra il nove ed il 16 dell'Aprile del 1838 ridonarono alla mano inferma del Mentichetti i movimenti, e quasi per intero la forza che aveva perduta durante la sofferta malattia.

PARTE SECONDA

Cure seguite da miglioramento.

VIII. Il primo d'Ottobre del 1832 Maddalena Michieli d'anni 42, cieca già da qualche anno per amaurosi venutagli in conseguenza di gravi malattie nervose, e molestata da emicrania, da veglie ostinate, e da abituale inappetenza, venne assoggettata, giusta la prescrizione del medico alla elettropuntura. Si collocavano per ciò tre aghi ad un sopracciglio insinuandone per breve tratto le punte sotto l'epidermide, ed altrettanti all'arco *sottorbitale* allo stesso modo, e colla striscia di piombo comunicante col polo positivo toccavasi or l'uno or l'altro degli aghi inferiori, e con altra striscia comunicante col negativo toccavasi uno degli aghi superiori. In questa guisa le si davano ogni giorno trenta o al più quaranta scossette,

le quali erano vivamente sentite, quantunque l'elettromotore constasse solamente di quattro, cinque o sei coppie. Un eguale trattamento facevasi all'altr' occhio.

Piccoli e fugaci furono i vantaggi riportati dall' inferma quanto alla cecità, ad alleviare la quale era diretta la cura; sebbene in fine le scosse erano frequentemente accompagnate dalla sensazione del bagliore. Ma l' emicrania e la veglia dopo la quarta elettrizzazione cominciarono a scemare: e tale miglioramento proseguì per guisa che, dopo la decimaquinta elettrizzazione, la Michieli sentivasi assai bene, mangiava con appetito, dormiva saporitamente, ed erano scomparsi i penosissimi dolori di capo che da tanto tempo la tormentavano; e volle metter fine alla cura elettrica.

IX. La Signora Cecilia Moro d'anni 68, emiplegiaca al lato sinistro da qualche mese, priva del movimento negli arti offesi, non però del senso, malinconica e facile al pianto, venne elettrizzata nel Settembre del 1834. Si erano concepite le più belle speranze vedendo di giorno in giorno crescere nell' inferma l'attitudine di muovere volontariamente il braccio e la gamba, e scemare la malinconia. Ma dopo la decimaquinta elettrizzazione, volendo quella buona vecchia far prove troppo ardite della ricuperata forza, cadde e si fratturò la gamba paralitica.

X. Nella Memoria, nella quale ho tessuta la storia del singolare fenomeno elettro-patologico presentatomi dalla Contessa Quirini Stampaglia emiplegiaca priva di favella, ho pure accennato il miglioramento, che colla diuturna elettrizzazione si ottenne nello stato di quell'inferma: miglioramento il quale consisteva nel repristinamento di qualche movimento volontario nei diti della mano paralitica, e nella favella in gran parte ricuperata (1). Ma quest' ultimo vantaggio, che è certamente il più insigne che si ottenesse, io credo non sia da attribuirsi all' elettricità, ma sibbene all' istruzione data alla

(1) La Storia qui citata è inserita nel Volume precedente, pag. 379.

inferma. Imperocchè avendo osservato fino dai primi giorni che ella pronunciava le tre sillabe *ma*, *ni*, *no*, e che nella lingua era forse solamente qualche torpore, ma non paralisi, potendo ella restringerla, allargarla, spingerla in fuori e ritirarla, curvarla e muoverla in tutti i sensi, mi venne il pensiero d' insegnarle a parlare.

Ho incominciato adunque a farle ripetere moltissime volte le dette sillabe, poscia a fargli replicare più volte ciascuna di esse. Il giorno dopo l' ammalata metteva meno intervallo tra una sillaba e l' altra, quindi potè pronunciare le parole formate dalla replica di una, o dall' unione di due qualunque di esse, come *mama*, *nono*, *mano*, *nino*, *mani* ec. Lo stesso giorno le ho fatte sentire più volte le sillabe *va* e *la*; ma non potè pronunciarle che il dì seguente; e quindi imparò a dire altre parole di due sillabe formate dall' unione delle cinque che sapeva proferire. Dalla sillaba *va* si passò successivamente a *fa*, *pa*, *ba*, *bi*, ec., e poi alle sillabe *na*, *da*, *si*. Si procurava ch' essa guardasse alle labbra e alla lingua della persona che le andava pronunciando sillabe e parole, sempre adagio, e calcando bene, come suol dirsi, ogni sillaba; le si diceva come doveva muovere la lingua e le labbra, si procurava insomma di mettere in opera la forza d' imitazione e l' istruzione.

Non era ancora stato possibile far pronunciare alla giovane inferma le vocali isolate, ma finalmente promovendo in lei lo sbadiglio sono riuscito a farle dire *a*, *a* più volte, e il giorno appresso imparò a far sentire le vocali tutte, l' ultima delle quali fu la *e*. Dopo di ciò non tardò molto a far sentire le sillabe *ca*, *qua*, *ga*, *ci*, *gi* ed altre simili. Ed il trentesimo giorno da che si era incominciato ad istruirla, potè ripetere anche *ra*, *ro* ec., e così non v' era più lettera che non sapesse proferire.

Per riuscire a farle pronunciare le parole, nelle quali si trovano due diverse consonanti unite, le si facevano prima pronunciare come se tra l' una e l' altra vi fosse stata una

vocale. Le si insegnava per esempio a dire *pàdere*, *faratello*, *pàrolo*, e facendole più e più volte ripetere tali parole veniva poi a proferire *padre*, *fratello*, *parlo*. E così proseguendo la giovane Quirini poteva in capo a quattro mesi recitare alcuni sonetti già da lei saputi ed allora richiamatigli alla memoria, sostenere qualche dialogo imparato a mente, ed anco esternare colla favella i suoi desiderj e bisogni. E se chi l'istruiva avesse saputo parlargli il dialetto a lei famigliare, meno lenti certamente sarebbero stati i progressi: ne sia prova che, avendole suggerito di recitare le preghiere latine a lei un tempo abituali, bastava fargliene sentire le prime parole, che tutte intere recitavale con esattezza. Ed in proposito di tali orazioni noterò ancora che la prima volta che si richiamarono alla sua memoria, l' inferma fece le più alte meraviglie che in sì diuturna infermità non le fosse mai venuto il pensiero di orare. La qual circostanza io non volli qui tacere perchè può servire a far meglio rilevare, se non forse la qualità, la gravezza almeno della malattia di quella giovane infelice.

XI. Il Sig. Ignazio Volpini di circa quarant'anni, di temperamento sanguigno, ben nutrito, ed abitualmente di buon umore, era da otto mesi emiplegiaco al lato destro; per cui a stento poteva reggersi in piedi e camminare, e non poteva eseguire alcun movimento nè col braccio, nè colla mano, nè coi diti. Gli arti erano flessibili e dotati delle naturali loro dimensioni; ma il braccio non poteva piegarsi meccanicamente senza che l' ammalato provasse forti dolori alle articolazioni. Il giorno 20 Dicembre del 1834 s' incominciò ad amministrare al detto infermo l' elettricità voltaica col solito metodo, e, dal detto giorno fino al 23 del mese di Maggio dell'anno successivo, venne elettrizzato cinquanta volte. Da principio gli si davano duecento scosse ad ogni elettrizzazione, ed in fine seicento, e sempre impiegando non meno di trenta coppie e non più di cinquantacinque.

I vantaggi ottenuti furono specialmente nell' arto superiore, avendo acquistato l'attitudine di allargare e stringere

la mano, di aprire i diti ad uno ad uno, di portar la mano alla testa ed alle spalle, ed essendo scomparsi i dolori che provar soleva quando, o esso stesso, o altri moveva il braccio infermo.

Osservazione. Dopo l' ottava elettrizzazione si è veduto che le scosse più forti, quelle cioè ch' erano date con cinquanta o più coppie, lasciavano un tremore in tutto il braccio, che durava per tre o quattro minuti secondi. Un egual tremore accadeva in quel braccio ogniqualvolta l'ammalato s'adirava, o in qualunque altro modo commoveasi fortemente.

XII. Il Signor Avvocato Paolo Valsamachi di Cefalonia d' anni cinquantacinque era emiplegiaco al lato sinistro in conseguenza di gravi patemi d'animo dal Dicembre del 1834; e il dieci di Giugno dell'anno successivo 1835 volle per consiglio del ch. Sig. Dottor Ruggieri intraprendere la cura elettrica. Le dita della mano inferma ed anco il pollice del piede potevano eseguire appena qualche legger movimento, ed era molto gonfio sì l' arto superiore che l' inferiore. Il senso mi pareva più squisito negli arti paralitici che ne' sani.

Mediante le diciotto elettrizzazioni apprestate al detto infermo dal dì 10 al 17 di Giugno (nel qual giorno partì da Venezia per andare ai fanghi) scomparve la gonfiezza del braccio e della mano, e scemò notabilmente quella della gamba e del piede, acquistò l' attitudine di muovere lentamente il braccio e la mano; e qualche vantaggio si è conseguito anco nell' arto inferiore.

XIII. Giovanni Ferossato d' anni trenta, falegname dell' arsenale di Venezia, da due mesi aveva perduto in gran parte il tatto nella mano sinistra, e non sapeva dirne la cagione. Egli sentiva se i corpi palpati colla detta mano erano più o meno caldi di essa, ma non ne distingueva la forma, ne la scabrezza o levigatezza. Nell' elettrizzazione dirigevasi per lo più la corrente voltaica dalla mano inferma alla sana. Dopo la terza elettrizzazione disse il Ferossato che cominciava ad acquistare un po' di tatto. Dopo l' ottava, che venne praticata

il 16 Settembre del 1835, m' accorsi anch' io per le prove fatte che il tatto era nella mano inferma molto meno ottuso di quello che fosse da principio; ma non lo vidi più.

Osservazione. Ogni volta che il Ferossato venne a farsi elettrizzare, nel tempo che le si davano le prime quaranta o cinquanta scosse non poteva a meno di sganasciare dalle risa.

Non solamente alle prime scosse, ma durante tutta quanta l'elettrizzazione, che consisteva in trecento scosse non poteva tenersi dal ridere Francesco Pinardi vetrajo di Venezia d'anni ventisei. Egli avea paralitici da gran tempo tre diti della mano destra in conseguenza di lue, e gl' impediva di lavorar con prestezza nel suo mestiere. Dopo cinque elettrizzazioni abbandonò la cura. E ciò nel mese di Marzo del 1837.

XIV. Il Sig. Don Tommaso Vincenzi di Modena Sacerdote d'anni 65 affetto da sei mesi da torpore al lato sinistro venne, per consiglio dell' egregio Sig. Dottor Martini, elettrizzato dodici volte nel mese di Luglio dell' anno 1837. Le si davano dugento scosse dirigendo la corrente da una mano all' altra, ed altrettante dirigendola dalle scapole ad una delle mani, impiegando da quaranta a sessanta coppie. Il vantaggio ottenuto fu che si promosse il sudore, che da molto tempo era soppresso, nè con altri mezzi erasi mai potuto procurare.

Osservazione. Dopo la decima elettrizzazione il Sig. Don Vincenzi si fece applicare le coppette al dorso, come suoleva di quando in quando, ed osservò che mentre le coppette erano attaccate, egli sentiva molte contrazioni o scosse simili a quelle che aveva provate mediante gli elettromotori.

XV. Il Sig. Parisini aveva da molti anni la mano destra affetta da paralisi incompleta, per la quale durava molta fatica a scrivere. Elettrizzato trentacinque volte nella state del 1838, dandogli trecento scosse ogni volta, e dirigendo la corrente dalla mano sana all' ammalata, migliorò a segno da potere scrivere con qualche speditezza, e con meno fatica che per lo innanzi.

XVI. Il giorno 21 Gennajo dell'anno 1840 intrapresi ad elettrizzare il Sig. Dottore Giuseppe Lancellotti d' anni cinquantanove. Riavutosi dall'apoplessia che colpito avealo il 31 Dicembre dell' anno antecedente, era rimasto senza moto volontario, e senza tatto nel braccio, nella mano, nella gamba e nel piede del lato destro; e dopo aver tentati per parecchi giorni inutilmente gli altri rimedj, il ch. Sig. Professore Goldoni prescrisse l' elettricità. Dugento scosse date colla corona di tazze di quaranta o cinquanta coppie, dirigendo la corrente dalla regione delle vertebre dorsali alla mano inferma, ed altrettante dalle vertebre lombari al piede, ed alcuni circoli continuati per pochi minuti produssero in pochi giorni il vantaggio di qualche movimento volontario nelle dita della mano inferma, e poscia nella mano stessa. Il piede, che da principio mostravasi insensibile alle correnti eccitate da quell' elettromotore (nè potevasi adoperarne altro più energico, perchè le scosse riuscivano dolenti), cominciò a provare qualche contrazione, e poi ad eseguire alcuni piccoli movimenti volontarj. Dopo l' ottava elettrizzazione cominciò l' infermo a sentire le elettro-punture toccando la cute degli arti paralitici colla parte acuminata della striscia di piombo comunicante col polo negativo dell' apparecchio, impiegando ventiquattro coppie. Dopo la duodecima l' infermo sentiva se la punta di piombo toccava il piede, quantunque non comunicasse coll' elettromotore, e nella mano sentiva tale puntura impiegando sol cinque coppie. Il miglioramento sì nel tatto che nel moto fu progressivo. Dopo quaranta elettrizzazioni si lasciò l' ammalato in riposo; poi ripigliossi la cura elettrica in primavera proseguendola fin verso l' Agosto; alla qual epoca il Dottor Lancellotti poteva eseguire molti movimenti coll' omero infermo, col braccio, colla mano e colle dita, e passeggiare lentamente anche senza l'appoggio del bastone, e far le scale assistito da una persona. Andò quindi a villeggiare coll' intenzione di ripigliare la cura elettrica al ritorno. Ma sopravvenuta notabile gonfiezza alla gamba, ed altri incomodi che l' obbligavano all' uso frequente

di purganti, e, quel che è più, de' sintomi minaccianti apoplessia, i quali richiedevano pronti e generosi salassi, si abbandonò il pensiero di ripigliare l' elettricità.

Osservazione. Tra la vigesimaquinta e la trigesima terza elettrizzazione, avendo l'ammalato un po' escoriata la gamba inferma nella parte interna verso il malleolo, le scosse recavano dolore alla parte escoriata quando la pianta del piede comunicava col polo negativo, anche impiegando solamente trentasei coppie: ma se il piede communicava col polo positivo, non si aveva quella molesta sensazione, neppure adoperando sessanta coppie.

Un' osservazione simile alla qui notata erami accaduto di fare elettrizzando nell' Ottobre del 1833 certo Sig. Martini di Venezia melanconico, stupido, con pochissima memoria, e grande difficoltà di parlare e di deglutire; egli aveva di più la mano destra e la gamba molto torpide. Quando il cuscinetto comunicante col polo positivo applicavasi alla spina non più distante di due decimetri dal luogo dove aveva aperto un vescicante, sentiva un forte bruciore anche impiegando solamente otto coppie.

XVII. La giovane Luigia Gardini modenese, d' anni 25, domestica di condizione, sordastra forse dalla nascita, per aver preso del freddo alla testa viaggiando in carrozza scoperta, soffriva da un anno delle fitte e de' forti tinniti alle orecchie, e specialmente alla sinistra. I vescicanti, e gli altri rimedj fino allora adoperati avendo deteriorato il suo stato, venne prescritta dal ch. Sig. Professore Roncati l'elettricità voltaica. Io cominciai perciò ad elettrizzare la detta giovane il 18 Maggio del 1842 con cinquecento piccole scosse ogni giorno, dandone 200 all'orecchio destro, e 300 al sinistro: e queste con dieci, quindici o al più ventiquattro coppie, e dirigendo la corrente dal braccio destro alla parte posteriore dell' orecchia sinistra, o dal braccio sinistro alla parte posteriore dell'orecchia destra. In questa guisa venne elettrizzata la Gardini diciannove volte in venticinque giorni, e con notabile miglioramento de' suoi

incomodi. Le fitte erano scomparse, ed i rumori e tinniti che la molestavano continuamente durante la veglia si limitavano a qualche mezz' ora del giorno.

La cura che segue, come ancora la vigesima, le aggiungo per le osservazioni a cui diedero luogo, quantunque pochissimo vantaggio ne traessero le persone alle quali vennero apprestate.

XVIII. Il Sig. Consigliere Protomedico Francesco Aglietti, d'anni 76, affetto da ventisei mesi da tremore al braccio destro per cagione di apoplessia superata nel resto felicemente, volle sperimentare l'elettricità. Venne perciò elettrizzato trenta volte tra il due d'Agosto e il dieci d'Ottobre del 1832. Gli si diedero ogni volta da trecento a quattrocento scosse adoperando cinquanta, sessanta, e fino ottanta coppie, facendo comunicare la mano sinistra col polo positivo, e la destra col negativo, oltre a quattro o cinque circoli di tre minuti.

Piccolo fu il miglioramento conseguito nel braccio, e ad esso forse l'elettricità non contribuì se non indirettamente, poichè durante questa cura si aumentò notabilmente la suppurazione del setone che aveva alla regione delle vertebre cervicali; e si accrebbero anche le altre secrezioni. Un altro effetto che si osservò in questa cura si fu un insigne aumento nella facoltà di scuotersi; poichè verso la fine con quaranta coppie si ottenevano contrazioni più forti che non da principio con ottanta.

XIX. Anche nel Sig. Cesare Ventura, d'anni 48 crebbe notabilmente la suscettibilità di scuotersi, e più presto che non accadde nel Consigliere Aglietti predetto. Imperocchè dopo la decima elettrizzazione i muscoli della gamba e del braccio paralitici contraevansi più fortemente con quaranta coppie di quello che facevano con ottanta nelle prime elettrizzazioni.

Il Ventura era emiplegiaco al lato sinistro, ed al segno che non poteva eseguire il più piccolo movimento nè col braccio, nè colla mano, nè colla gamba; e solo poteva muovere qualche poco il pollice del piede. Le quindici elettrizzazioni alle quali venne sottoposto l'infermo nell'Ottobre del 1833

per nulla giovarono al braccio; ma alla gamba procurarono tanta forza e mobilità volontaria, che poteva reggersi in piedi da solo, e fare qualche passo; e di ciò fu pago il Ventura.

XX. La Signora Lucrezia Fontana di Venezia, divenuta amaurotica e cieca già da sette anni per gravissimo patema d'animo cagionato dalla morte dell'unico suo figlio, intraprese una cura elettrica il 2 d'Agosto del 1836, cura suggerita e diretta dal Signor Dottore Fario, valente oculista. Ogni terzo giorno sottoponevasi l'inferma a qualche centinajo di piccole scosse, ed a parecchi circoli applicando alla nuca un cuscinetto umido, al quale era unita la striscia di piombo comunicante con un polo dell'elettromotore, ed un altro cuscinetto, comunicante coll'altro polo, o al sopracciglio, o in vicinanza dell'angolo esterno dell'occhio, o vicino all'angolo interno, e qualche volta ancora al bulbo dell'occhio coperto dalla palpebra. Impiegavasi il solito elettromotore, ed il numero delle coppie non eccedeva il ventiquattro.

Alla sesta elettrizzazione cominciò la Signora Fontana a provar la sensazione del bagliore ogni volta che la scossa era data con ventiquattro coppie, e quella suscettibilità andò successivamente crescendo per modo che dopo la decimottava elettrizzazione provava benissimo il bagliore anche usando solo sei coppie. Nè si potè conseguire di più colle ulteriori elettrizzazioni, che portaronsi al numero di quaranta, se non che le pupille divennero alquanto sensibili alla viva luce improvvisa.

Osservazioni. Ho approfittato della rara compiacenza di quell' egregia Signora per istituire alcuni esperimenti sulle sensazioni da lei provate sotto l'azione delle correnti elettriche: ed eccone i principali e più costanti risultamenti ottenuti.

1°. Allorquando io chiudeva il circolo voltaico immergendo gli estremi delle striscie di piombo nell'acqua, se un cuscinetto bagnato comunicava coll'una o coll'altra tempia vicino all'angolo esterno dell'occhio, e l'altro era applicato, come al solito, alla nuca, l'ammalata accusava un sapore acido accompagnato da salivazione. E tali sensazioni venivano tollerate

con indifferenza, se le coppie dell'elettromotore erano meno di venti; al di là delle 24 cominciavano a riuscire assai moleste. La corrente veniva diretta dalla nuca alla tempia.

2°. Quando le comunicazioni erano alla nuca ed al bulbo dell'occhio coperto dalla palpebra superiore, tenendo chiuso il circolo con dieci o dodici coppie, oltre le punture che provava alla palpebra, l'inferma accusava anche una sensazione di calore. La corrente era diretta dalla nuca all'occhio.

3°. Applicando il cuscinetto comunicante col polo positivo alla nuca, e quello comunicante col negativo al sopracciglio si aveva sapore e salivazione che crescevano nel momento che s'interrompeva il circolo. Che se la corrente era diretta al contrario, aveansi tali sensazioni con molto minor numero di coppie; ma poi scemavano tosto che il circolo veniva interrotto.

4°. Applicato il polo positivo all'angolo esterno dell'occhio, ed il negativo alla nuca, la sensazione di sapore che nasceva sulla lingua svaniva interrompendo il circolo. E quando la corrente s'avviava al contrario, anche adoperando quindici coppie, l'inferma non provava alcuna sensazione sulla lingua, ma sorgeva nell'atto che il circolo veniva interrotto.

5°. Istituita la seconda parte di quest'ultima esperienza impiegando 24 coppie, aveasi un sapore assai leggero durante il circolo, ed uno assai vivo nel momento dell'interruzione.

6°. Applicato il polo negativo ed il positivo al bulbo d'un occhio coperto dalle palpebre, ed impiegando soltanto quattro o cinque coppie, l'inferma non provava alcuna sensazione al compiersi del circolo; ma accusava una sensazione di calore ed una puntura all'occhio nell'interrompersi del circolo stesso. E se impiegavansi dieci o dodici coppie, accusava una puntura alla nuca nel momento che il circolo veniva chiuso, calore e puntura all'occhio nel momento che veniva aperto.

7°. Applicato il polo positivo al sopracciglio verso l'angolo esterno dell'occhio, ed il negativo alla nuca; vivo sapore appena chiuso il circolo, e cessazione all'aprirlo. Ed invertita la corrente, niuna sensazione quando si chiudeva il circolo, e

vivo sapore accompagnato (com' era sempre) da salivazione al cessare della circolazione elettrica.

8°. Fatto comunicare l'angolo esterno dell'occhio col polo positivo, e la nuca col negativo, impiegando trenta coppie, l' inferma provava una sensazione di caldo dov' era applicato il cuscinetto umido vicino all'occhio, al compiersi del circolo, e provava un vivo sapore sulla lingua, all' interrompersi. E quando la corrente venne diretta al contrario, accusava il senso d'una trafittura all' angolo esterno dell' occhio durante il circolo; e nell' atto che il circolo cessava, tanto s' affievolivano quelle sensazioni che pareva svanissero sull' istante.

Eccettuato quest' ultimo esperimento, il quale sol due volte venne istituito, tutti gli altri si replicarono almeno una ventina di volte durante l'elettrizzazione della Sig^a. Fontana. Ed alcuni di questi io aveva già avuto occasione d' istituirli nel Novembre del 1833 nell'elettrizzare che feci certa Elisabetta Linari pure amaurotica. Tali fatti confermano quanto in altre Memorie feci osservare relativamente ai diversi effetti che la corrente produce sui nervi secondo che li trascorre giusta il loro andamento, o in direzione opposta (1). Essi avvalorano eziandio l'idea di mio fratello Pietro che le correnti voltaiche possano essere utilmente impiegate in medicina anche come sussidio diagnostico (2).

(1) Memoria sopra la scossa che provano gli animali nel momento che cessano di fare arco di comunicazione fra i poli d' un elettromotore ec. Venezia 1828. *Annales de Chimie et de Physique*, Mars 1829.

Sur un phénomène physiologique produit par l'életricité, Bibliotheque Universelle, Decembre 1829.

Sopra le contrazioni muscolari ed alcune sensazioni prodotte dalle correnti elettriche. Annali delle scienze del Regno Lombardo-Veneto, 1834.

Di alcune paralisi curate coll' elettricità voltaica, con un' appendice sopra un nuovo fenomeno elettro-fisiologico. Annali suddetti, 1833. *Biblioth. Univ. Juillet, Aout et Septembre*, 1833.

(2) Proposta dell' elettromotore voltaico siccome patoscopico del Dottor Pietro Marianini Protomedico di Mortara. Atti del Congresso scientifico di Firenze, p. 607. Giornale per servire ai progressi della Medicina, Ottobre 1841.

APPENDICE ALLA PRECEDENTE MEMORIA.

Storia di una paralisi completa degli arti inferiori, della vessica orinaria, e dello sfintere dell'ano guarita mediante l'elettricità voltaica. (1)

Agostino Grandi, d'anni 60, di temperamento flemmatico, di buona costituzione, alquanto pingue, fu nel Marzo del 1832 preso da incontinenza di orina in causa di un forte spavento. Nel Marzo poi del 1836 fu colpito da apoplessia che gli portò un profondo stupore, la paralisi della lingua, dell' estremità inferiori e dello sfintere dell'ano, persistendo già fino dall' accennata epoca quella della vessica orinaria.

Dietro la pratica di quei mezzi che in tali malattie l'arte suggerisce, l' infermo si riebbe alquanto, ma solo in parte; che ostinata e ribelle ai più attivi rimedj persisteva la paralisi della vessica, dello sfintere dell'ano e degli arti inferiori, i quali ultimi erano freddi, e poco stante si fecero edematosi, ed in essi completa tanto era la paralisi che, nè la ripetuta applicazione di più vessicanti, nè la ripetuta fregagione fatta colla tintura di Cantaridi, nè qualunque meccanica irritazione valsero, non dirò ad eccitarli al più oscuro movimento, ma neppure a suscitarvi la menoma sensazione, nè a richiamarvi un leggiero rossore. Alla perfine solo dopo parecchi giorni comparvero alle sure, dove applicati eransi in diverse volte più epispastici, due vescichette di non grande estensione contenenti poco siero, che rotte mostrarono un fondo assai pallido, le quali in alcuni giorni si cicatrizzarono.

---

(1) L' egregio Signor Dottore Marco Martini, Medico di questa R. Corte mi ha graziosamente comunicata questa sua storia, la quale, parendomi molto interessante, ho creduto bene di qui aggiungere, valendomi del permesso da esso lui gentilmente accordatomi.

S. MARIANINI.

Per l' inutilità dei quali mezzi mi condussi nella determinazione di provare il più potente tra gli stimoli, il fluido elettrico. Sottoposi pertanto nel Giugno dello stesso anno il mio infermo alla cura elettrica, servendomi dell'elettricità sviluppata dalla corona a tazze di Volta. Incominciai con 80 coppie, e fissato ad un piede l'estremo libero di un conduttore coll'applicare lo stesso estremo dell'altro conduttore all' altro piede nel modo da farne risentire una scossa, che ripetei fino al numero delle 400. Nei primi giorni l' infermo non se ne risentì; insistendo però, e facendo precedere l' immersione dell' estremità inferiori fino al ginocchio in acqua calda satura di farina di senape fresca, incominciò l' infermo a provare un senso di vellicazione alquanto piacevole, ed in seguito poi incominciò a risentire un' incomoda sensazione, un bruciore nel luogo delle sure stato già due mesi addietro denudato dell' epidermide dal vescicante; dal qual punto come da un centro, andò gradatamente per giorno risvegliandosi negli arti addominali la sensibilità per cotesto stimolo che anzi arrivò poi al segno che l' infermo se ne doleva altamente, per cui dovetti diminuire il numero delle coppie ristandomi fra le 50 e 60, ed in allora accrebbi il numero delle scosse fino alle 500, le quali essendo tollerate e con sensibile vantaggio delle parti paralizzate, mi spinsi un giorno ad aumentarlo fino alle 700, ma, lo confesso, ebbi a pentirmi del mio ardimento; perocchè l' infermo ne restò così oppresso ed abbattuto che fui costretto ad interrompere e sospendere per tre giorni appresso la cura: dopo di che ritornai all' abbandonato numero delle 500 scosse. Fin verso la fine di Giugno l' infermo venne elettrizzato in letto, ma egli stesso fattosi accorto del lento, sì, ma deciso ripristinamento dei già perduti moto e senso, volle in appresso alzarsi e ricevere seduto su di una sedia l'amministrazione di un sì valido rimedio. Al che volontieri aderii e potei con maggior comodità variare di più guise i punti di applicazione dei due conduttori dirigendo di preferenza allo spinale midollo la corrente e le scariche elettriche, giacchè

in questo riconosceva la precipua sede dell' alterazione produttrice la paralisi.

Protrassi la cura fino ad autunno inoltrato e da quella in allora cessai, non tanto per il sopravvenire di una stagione non troppo opportuna, quanto per aver condotto l' individuo ad uno stato tale di ben essere, che aveva potuto riprendere le ordinarie sue occupazioni. E posso con verità asserire che non momentanea nè efimerica ne fu la guarigione, giacchè in questi tre successivi anni niuno dei vinti incomodi ricomparve e neppure quello dell' incontinenza d'orina, il quale come già avvertii, contava più di quattro anni al momento dell' insulto apopletico.

Disgraziatamente però il 27 dello scorso Dicembre del 1839 senza lagnarsi prima di alcuna cosa molesta, alla sera fu colpito da apoplessia fulminante, e nel giorno 30 cessò di vivere.

Dott. M. Martini.

SOPRA L' AZIONE MAGNETIZZANTE
DELLE CORRENTI ELETTRICHE MOMENTANEE

MEMORIA VII. (1)

INFLUENZA DEL CONDUTTORE LIQUIDO FATTO ATTRAVERSARE DALLA SCARICA DELLA BOCCIA DI LEIDA NELLA MAGNETIZZAZIONE DA ESSA PRODOTTA NEL METALLO ATTORNO AL QUALE SI FA CIRCOLARE LA SCARICA STESSA

DEL PROF. STEFANO MARIANINI.

Ricevuta il 1° *Marzo* 1846.

I. Nella seconda Memoria sull' azione magnetizzante delle correnti elettriche momentanee, nella quale trattai delle analogie da me osservate tra le magnetizzazioni e le correnti di induzione prodotte dalle stesse momentanee correnti, notai, fra le altre cose, che, come variava la direzione della corrente indotta quando la scarica elettrica attraversava un conduttore liquido; così nelle stesse circostanze la scarica, che circolava attorno ad un ferro magnetizzato, produceva effetto opposto, se l' obbligava a passare per un dato liquido. Ivi ho pur registrate parecchie sperienze istituite sul ferro privo di polarità magnetica e di magnetismo: ma quelle erano dirette solamente a dimostrare, che la scarica elettrica, sia essa forte o debole, di alta o bassa tensione, eccitata da boccia di poca o di molta capacità, e traversante, oltre il filo metallico dell' elica, anche un altro conduttore qualunque, polarizzava magneticamente il ferro sempre nel medesimo senso, purchè la corrente circolasse attorno ad esso nello stesso verso.

(1) Le altre sei Memorie si trovano nel volume terzo delle mie Memorie di Fisica sperimentale scritte dopo il 1836 alle pagine 51, 79, 123, e nel volume quarto alle pagine 5, 83 e 111.

Io m'era già assicurato che aggiungendo all'elica de' lunghissimi fili metallici, diminuivasi la forza magnetica che la scarica produceva sul ferro; e nel sostituire ai fili metallici de' strati liquidi intendeva di trovar qualche utile confronto tra la conducibilità de' fili metallici e quella degli strati liquidi. L'esito pertanto di tali tentativi dimostrò che i conduttori liquidi aggiunti all' elica fanno un effetto ben differente dei fili metallici nelle magnetizzazioni operate dalle scariche elettriche. Imperocchè mentre i detti fili non fanno che scemare in proporzione della loro lunghezza l'azione magnetizzante delle scariche, gli strati liquidi bene spesso l' accrescono.

Nella maggior parte delle sperienze le magnetizzazioni vennero eseguite collocando i ferri in un tubo di vetro cilindrico lungo un decimetro, avente sedici millimetri di diametro, circondato da un' elica di fil di rame di circa due decimillimetri di grossezza ben coperti di seta. Questo tubo era collocato sopra una bussola in modo che il suo asse stava in un piano perpendicolare al piano verticale in cui si trovava l'asse dell'ago calamitato, ed il punto di mezzo del detto asse era nella verticale passante pel centro dell' ago stesso, e discosto dal medesimo di quattro centimetri.

II. Incomincio adunque dal descrivere alcune delle accennate sperienze.

1ª. Ho messo un cilindro di ferro dolce lungo centimetri 8, 5 e pesante 15 grammi nell'elica, caricai alla tensione di sei gradi dell'elettrometro a doppio quadrante del Volta una boccia di Leida, la capacità della quale è espressa dal numero 5 (1), e, scaricata poi sull' elica circondante il ferro,

---

(1) Io soglio assumere come unità di capacità de' coibenti armati la capacità d' una bottiglia di Leida, nella quale l' una e l' altra superficie armata è d' un decimetro quadrato, ed il vetro ha un millimetro di grossezza. Perciò il numero col quale indico la capacità d' una boccia esprime il rapporto della capacità di essa con quella assunta per unità.

questo acquistò tale forza magnetica che teneva l' ago del magnetometro deviato di gradi 5.

Distrutto nel ferro il magnetismo, indi rimesso nell'elica, e poi fatta circolare in essa una scarica eguale alla precedente, ma obbligata a traversare uno strato prismatico d' acqua di pozzo di nove centimetri quadrati di base, e due centimetri di lunghezza, il magnetismo acquistato fu tale che l'ago dello stromento stavasi deviato di gradi 9.

2ª. Un cilindro di ferro ricotto lungo centimetri otto e mezzo, e pesante grammi 18, assoggettato come quello dell' esperimento precedente all' azione magnetizzante della boccia di Leida quando la scarica non traversava il detto strato d' acqua, esso deviava l' ago di 8.

E quando l' attraversava deviavalo di 13.

3ª. Feci altrettanto sopra un cilindro d' acciajo lungo centimetri 8, pesante grammi 2, 4. Ed il risultato fu che, senza l' acqua acquistò tanto magnetismo da deviar l' ago di 7°. 30'.

E coll' acqua di 15.

4ª. Un fascio di dieci fili di ferro dolce lunghi come i precedenti e pesanti tra tutti grammi 8, 6, magnetizzati colla detta scarica, se l' elettrico non traversava acqua, il fascio teneva l' ago a gradi 25.

E se traversava il solito strato liquido, tenevalo a 78.

5ª. Un altro fascio di fili di ferro in numero 110, e pesante grammi 4, 5, magnetizzato senza lo strato acqueo deviava l' ago di 6.

Collo strato d' acqua 64.

6ª. Ho messo nell' elica del magnetometro una lastra rettangolare di ferro lunga otto centimetri, larga uno e pesante grammi 4, 2; ed avendola magnetizzata colla solita scarica senza lo strato d' acqua, teneva l' ago deviato di 13.

Ed obbligando la scarica a traversare uno strato d' acqua di 24 centimetri quadrati di base, e 4 centimetri di grossezza, la deviazione fu 28.

7.ª Cimentato, come la lastra dell'esperimento precedente, un tubo di ferro lungo otto centimetri, del diametro di uno, e pesante grammi 6,4; senza lo strato d'acqua la deviazione fu 39.

Collo strato d'acqua 53.

8.ª Trattati allo stesso modo due semicilindri uniti mediante due anelli d'ottone in guisa da formare un tubo; senza lo strato acqueo 10.

E col detto strato 25.

9.ª Una lamina di niccolo lunga quattro centimetri e pesante otto decigrammi trattata come i ferri delle sperienze già descritte, senza lo strato d'acqua si magnetizzò solo abbastanza per deviar l'ago di 3.

E collo strato d'acqua lo deviò di 10.

III. Fin qui il ferro adoperato era privo di magnetismo. Il fenomeno per altro non manca anche quando si opera sopra ferro già dotato delle proprietà magnetiche; e ciò non solamente quando la scarica elettrica tende a rinforzare le dette proprietà, come ancora quando è diretta in modo da affievolirle o invertirle. Infatti

1°. Un fascio di 400 fili di ferro dolce e ricotto lunghi otto centimetri e pesanti tra tutti grammi 13, 2 era magnetizzato al segno che teneva deviato l'ago dello stromento 7.

Scaricata nell'elica che conteneva il detto fascio la solita boccia colla tensione di tre gradi senz'acqua interposta, e dirigendo la scarica in modo da avvalorare la magnetizzazione già esistente, la forza magnetica conseguita dal ferro fece sì che la deviazione del sottoposto ago divenne 12.

Ma, distrutto tale magnetismo, indi calamitato di nuovo lo stesso fascio di fili di ferro al segno che teneva l'ago deviato di sette gradi, poscia assoggettato all'azione d'una scarica eguale alla precedente, diretta nel medesimo senso, ma obbligata a traversare un prisma d'acqua di pozzo avente due centimetri quadrati di base e tre di lunghezza, la magnetizzazione acquistata dal ferro fece passar l'ago dal grado 7 al 32.

2°. Un altro fascio di 110 fili di ferro non ricotto lunghi sette centimetri e pesanti tra tutti grammi 4, 5 venne magnetizzato al segno che teneva deviato l' ago del magnetometro a 70.

Scaricata sull' elica la solita boccia colla tensione di sei gradi, e in guisa da produrre nel ferro (se non fosse stato magnetizzato) polarità contraria a quella che aveva, il detto fascio ha perduto tantò di forza che non teneva deviato l'ago se non se di 8.

Restituita poi al fascio di fili la forza espressa dalla deviazione magnetometrica di 70, indi scaricata sull'elica la stessa boccia, carica com' era nella prova antecedente, e dirigendo la corrente nel medesimo verso, ma di più facendole traversare un prisma d'acqua di quattro centimetri quadrati di base e tre centimetri di lunghezza, non solamente il ferro ha perduto la polarità che aveva, ma acquistò polarità opposta, e tale da tener l' ago a — 30.

IV. Anche il ferro alterato nella suscettibilità relativa di magnetizzarsi, cioè reso più suscettibile di acquistare un dato polo da una data parte, che non di acquistarlo dalla parte opposta, presenta il fenomeno di cui parliamo.

Un fascio di trenta fili di ferro dolce e ricotto lunghi otto centimetri e pesanti tra tutti 3, 4 grammi, magnetizzato colla solita boccia carica a 6 gradi deviava l' ago di 7.

Magnetizzato poscia fortemente e ripetutamente nel medesimo senso, e ridotta quindi nulla la sua polarità mediante scariche dirette al contrario, si trovò cresciuta la suscettibilità relativa di quel ferro in modo che, operando su di esso con una scarica eguale alla prima ed egualmente diretta, teneva l' ago deviato di 11.

Ridotta di nuovo nulla la sua polarità, e quindi operando colla solita scarica, ma al contrario, la deviazione che ne seguiva era — 4. 30'.

Veduti questi effetti dell' alterata suscettibilità relativa, magnetizzai di nuovo fortemente nel primo senso quel ferro, e di nuovo ridussi a zero la polarità, indi scaricata la boccia

colla tensione di sei gradi in modo da magnetizzare quel ferro nel primo senso, ma obbligando la corrente ad attraversare un prisma d'acqua di due centimetri quadrati di base, e tre di lunghezza, la deviazione ottenuta fu di 23°. 30′.

E ridotta finalmente ancora a zero la polarità, indi fatta agir di nuovo sul ferro la detta corrente momentanea in senso opposto, e traversante il detto strato d'acqua, l'ago deviò, non di — 4. 30′, come quando mancava lo strato acqueo, ma bensì di — 17.

V. Fin qui le correnti adoperate per magnetizzare il ferro furono sempre eccitate dalla stessa boccia di Leida e carica a sei gradi di tensione. Ma la capacità della boccia può essere anche tutt'altra, ed il fenomeno non manca di palesarsi. In prova di che riunisco nella seguente tabella i risultati di sei esperienze, ciascuna delle quali venne eseguita con bocce di differente capacità.

Numeri esprimenti le capacità delle bocce di Leida. Si ritiene per unità di capacità quella d'una boccia, le due armature della quale sono di un decimetro quadrato di superficie, e la grossezza del vetro è un millimetro. La tensione è sempre di sei gradi.	Numeri esprimenti le deviazioni stabili dell'ago calamitato prodotte da un fascio di 400 fili di ferro dolce e ricotto lunghi otto centimetri e pesanti tra tutti dodici grammi e mezzo.	
	Quando la scarica non iscorre che per l'elica circondante il ferro, e le appendici metalliche di essa.	Quando la scarica traversa anche un prisma d'acqua di pozzo avente per base un centimetro quadrato, e per altezza centimetri tre e mezzo.
1, 3.	9°.	23°.
2.	8. 15′.	27. 15′.
2, 4.	8.	31.
5.	5.	66. 30.
9.	16.	73.
25.	13.	60.

VI. Anche la tensione a cui viene caricata la boccia può essere tutt'altra di quella di sei gradi sin qui ritenuta, come può scorgersi dalla tabella che segue:

Numeri che esprimono, in gradi dell' elettrometro a doppio quadrante del Volta, le tensioni a cui vien caricata la boccia di Leida, la capacità della quale è espressa dal numero 5 (V. la Nota al § II.)	Numeri indicanti le deviazioni del magnetometro prodotte da un fascio di otto fili di ferro lunghi otto centimetri, e pesanti tra tutti grammi 25, 8.	
	Quando la scarica non iscorre che per l'elica circondante il ferro e le solite appendici metalliche della medesima.	Quando la scarica attraversa anche un prisma d'acqua di pozzo avente per base due centimetri quadrati, e per altezza tre centimetri e mezzo.
3.	3°. 30'.	11°.
6.	5.	12.
9.	5. 30.	18. 30'.
12.	6. 20.	21.
18.	9. 30.	23.
24.	12.	25. 30.

VII. Le scariche eccitate da congegni di grandissima, o di piccolissima capacità, purchè la tensione a cui sono caricati sia sufficiente a produrre sensibile magnetizzazione nel ferro, questo acquista maggiore forza magnetica, quando la scarica passa anche per un dato strato di conduttore liquido.

1ª. Una batteria elettrica, la cui capacità è espressa dal numero 100, venne caricata solo ad un grado del solito elettrometro. E scaricata poi sull' elica contenente un fascio di 400 fili di ferro lunghi otto centimetri e del peso complessivo di dodici grammi e mezzo, questo fascio acquistò forza magnetica sufficiente a deviar l'ago di 26.

Ma ripetuto l'esperimento, ed obbligata la scarica a traversare anche un prisma d'acqua di dodici centimetri quadrati di base, e quattro centimetri di lunghezza, la deviazione prodotta da quel fascio di fili di ferro fu di 71.

2ª. Feci scoccare una scintilla dal conduttore della macchina elettrica sopra un capo dell'appendice dell'elica terminata in isfera metallica di due centimetri di diametro messa alla distanza di due e mezzo dalla sfera (del diametro di otto centimetri), in cui terminava il conduttore stesso della macchina. Ed affinchè l'elettricità scorresse rapidamente per l'elica, feci che l'altro capo di questa comunicasse coi cuscinetti isolati della macchina. Il ferro contenuto nell'elica, il quale era il fascio dell'esperienza precedente, e non aveva magnetismo, ne acquistò abbastanza per deviar il magnetometro di gradi 11.

Ma avendo obbligato l'elettricità di quel conduttore a traversare un prisma d'acqua di pozzo di quattro centimetri quadrati di base, e cinque centimetri di lunghezza, la magnetizzazione operata nel detto fascio fu più forte, poichè fece deviar l'ago di gradi 23.

VIII. Anco le bocce di Leida di mediocre capacità, e cariche a debole tensione, presentano il fenomeno; deve però il liquido essere dotato di maggiore conducibilità che ne' casi fin qui contemplati.

1ª. Una boccia di Leida di capacità cinque, carica alla tensione di mezzo grado, scaricata sull'elica contenente il fascio di fil di ferro delle precedenti esperienze, se non passava per verun liquido, il detto ferro calamitavasi al segno che deviava l'ago di . . . . 14°.

Obbligando la detta scarica a traversar un prisma d'acqua di pozzo di due centimetri quadrati di base, e quattro centimetri di lunghezza . . . . 9.

Ma se il detto prisma d'acqua non aveva che la lunghezza d'un centimetro . . . . 19.

E se il detto prisma liquido era pur lungo un centimetro, ma la base era di sette centimetri quadrati . 25.

2ª. La stessa boccia colla tensione d'un sol quarto di grado, scaricata sull'elica senza strato d'acqua, il magnetismo ottenuto deviava l'ago di . . . . 6.

Aveasi presso a poco lo stesso effetto, se tale scarica traversava il prisma d' acqua ultimamente accennato. Ma se la base del detto prisma liquido estendevasi a quindici centimetri quadrati, l'ago deviava di . . . 12°.

IX. Se la scarica della boccia di Leida viene divisa in due parti, ed in guisa che una sola di esse circoli attorno al ferro, non manca di mostrarsi l' influenza dello strato liquido nella magnetizzazione, come può vedersi nella seguente sperienza.

Ho allungate le due appendici metalliche dell' elica, e congiunsi fra loro i due estremi. Scaricai quindi la boccia ponendo le armature in comunicazione con due punti del circuito tali che l' elettrico avesse a percorrere un egual conduttore e dalla parte dov' era l' elica circondante il ferro, e dall' altra; e senza veruno strato liquido. La magnetizzazione fu tale che l' ago magnetometrico deviò di 7.

Ma avendo poi obbligata e l' una e l' altra porzione di scarica a traversare un prisma d' acqua di pozzo di otto centimetri quadrati di base, e due centimetri di lunghezza, il fascio de' fili di ferro magnetizzavasi molto più fortemente; esso deviava l' ago di 46.

X. Volli anco far agire sul ferro da magnetizzarsi una corrente elettrica derivata. A tale oggetto ho congiunte le due striscie di piombo che formano le appendici dell' elica mediante una terza striscia plumbea larga un centimetro e lunga un metro, congiungendo le estremità di questa con due punti delle dette striscie distanti sì l' uno che l' altro di quattro decimetri dall' estremità. Ciò fatto, scaricai la boccia ponendo l' armatura esterna a contatto coll' estremità di una delle dette appendici di piombo, e l' armatura esterna coll' estremità dell' altra: e la magnetizzazione conseguita fu tale che l' ago deviava di . . . . 3.

Ma facendo passare la scarica anco per un prisma d' acqua di pozzo di 24 centimetri quadrati di base, e quattro centimetri di lunghezza . . . . 6. 30'.

E se il detto prisma liquido non aveva che un centimetro di lunghezza . . . . 11.

La boccia adoperata nelle sperienze di questo paragrafo e del precedente aveva cinque di capacità, ed era caricata a sei gradi di tensione. Il ferro era un fascio di 400 fili sottili e ricotti eguali ai già menzionati.

XI. Anche la corrente leida-elettrica indebolita da un' elica metallica chiusa circondante il ferro posto nell' elica, sulla quale viene scaricata la boccia, sente l'influenza del conduttore liquido che deve attraversare.

Un fascio di centotrenta fili di ferro lunghi otto centimetri, e pesanti in complesso grammi 5, 4 lo misi in un'elica, la quale collocai nella solita, e poi congiunsi metallicamente i capi della prima. Scaricai quindi sulla solita elica la boccia suddetta, e senza che la scarica avesse ad attraversar acqua; e la deviazione fu . . . . 8°.

Ma avendo poi obbligata la scarica ad attraversare un prisma d'acqua di 24 centimetri quadrati di base, e tre centimetri di lunghezza, la deviazione fu . . 19.

E fatta la lunghezza del detto strato acquoso di centimetri sei, la deviazione fu . . . . 15.

Per far conoscere quanto l' elica chiusa circondante il ferro affievolisse l'azione magnetizzante della scarica (e ciò per la corrente di induzione che nasce nell'elica stessa) dirò che avendo ripetuta quest' ultima esperienza dopo aver disgiunti i capi dell' elica, il fascio di fil di ferro si magnetizzò al segno che deviava l'ago di gradi 37.

E ripetuta la penultima esperienza parimente coll' elica aperta, la deviazione fu di 30.

XII. Le esperienze istituite con eliche più ampie o più ristrette, di maggiore o minor numero di giri, più lunghe del ferro in esse collocato, o più corte, ed in quest' ultimo caso o ricoprissero la parte media, o un'altra qualunque del ferro stesso, dimostrarono pure che le magnetizzazioni prodotte da una data scarica erano più forti quando l'elettricità percorreva uno strato umido di mediocre conducibilità assoluta.

Il far girare l'elettricità attorno al ferro mediante eliche metalliche giova a conseguire magnetizzazione più forte a parità di circostanze; ma ad ottenere qualche indizio di magnetizzazione basta, come è noto, che il ferro sia collocato vicino e non parallelo al filo per cui si fa passare la corrente. Ebbene anche in questo caso, se la scarica traversa uno strato d'acqua di mediocre conducibilità assoluta, la magnetizzazione riesce più forte. Ecco una delle sperienze che di ciò mi assicurarono.

Il fascio di 400 fili di ferro accennato al §. X venne messo in un tubo di vetro il quale stava su d' un filo di piombo di circa tre millimetri di grossezza in modo che faceva angolo retto con esso, e la verticale passante pel punto di mezzo del ferro incontrava il sottoposto filo. Venne quindi scaricata sul ferro stesso la boccia mezzana carica alla tensione di sei gradi, ed il fascio di fili di ferro magnetizzossi al segno che teneva l'ago dello stromento deviato di un grado e mezzo.

Distrutta poscia questa piccola forza magnetica dal ferro acquistata, e rimesso nella precedente posizione, indi rinnovata la scarica sul detto filo di piombo, ma obbligandola a traversare un prisma d'acqua di pozzo di sei centimetri quadrati di base, ed un centimetro d'altezza, la magnetizzazione acquistata dal ferro fu più forte; sicchè teneva l'ago deviato di cinque gradi.

XIII. Dopo che colle sperienze fin quì registrate, e con molte altre somiglianti ad esse, mi assicurai che qualunque fosse il corpo magnetizzabile sottoposto all'azione della scarica elettrica, e comunque fosse preparato o foggiato, il fenomeno aveva luogo; e riusciva pure qualunque fosse la capacità del coibente armato e la tensione del medesimo, e l' elica metallica circondante il ferro, mi accinsi ad osservare se anche con altri conduttori di seconda classe ottenevasi il fenomeno stesso.

1°. Un fascio di 400 fili di ferro dolce e ricotto, lunghi otto centimetri, e pesanti tra tutti tredici grammi e mezzo, il qual fascio, messo nell' elica dello stromento, non deviava menomamente l'ago calamitato, venne magnetizzato colla boccia di capacità cinque e carica alla solita tensione di sei gradi, e obbligando la scarica a non traversare che l' elica e le sue appendici metalliche. Il magnetismo acquistato fu tale che deviava l' ago dello stromento di cinque gradi.

Distrutte quindi nel fascio le proprietà magnetiche, rimesso nell' elica, e scaricata su questo la boccia colla solita tensione, ma facendo che la corrente attraversasse anche un prisma d' acqua distillata avente nove centimetri di base e due di lunghezza, la forza magnetica acquistata dal fascio di fili teneva deviato l' ago di 40 gradi.

2°. Rinnovato l'esperimento dopo aver sostituito al prisma d'acqua distillata un prisma di alcoole a 36 gradi dell' areometro di Baumé, avente pure per base nove centimetri quadrati, e lungo un centimetro; la deviazione fu di 25°.

3.° In un altro simile sperimento si fece che la scarica traversasse un prisma d' acqua tenente in soluzione la centesima parte del suo peso di sal comune raffinato, avente mezzo centimetro quadrato di base, e dieci centimetri di lunghezza, e la deviazione fu di 40.

4°. All' acqua salata venne sostituito l' acido nitrico allungato da 120 parti d' acqua, e si obbligò la scarica a traversare un prisma di un quarto di centimetro quadrato di base, e lungo otto centimetri; e la deviazione fu 27.

5. Al liquido precedente venne sostituita l' ammoniaca liquida mista a venti volte il suo peso d' acqua distillata, e si obbligò la solita scarica a traversarne un prisma di due centimetri quadrati di base, e tre centimetri di lunghezza; e l' effetto fu una deviazione di 22.

XIV. Non è neppure necessario che il conduttore di seconda classe aggiunto al metallico sia sotto forma di liquido perchè esso accresca l' azione magnetizzante della corrente leida-elettrica.

il solito fascio di 400 fili di ferro magnetizzato colla boccia di capacità cinque, e carica alla tensione di quattro gradi, la scarica della quale non traversava che l'elica e le appendici metalliche, acquistava una forza magnetica indicata da . . . . 6°.

Aggiunte al circolo due persone la magnetizzazione conseguita fu . . . . 16.

E se una sola era la persona aggiunta . . . . . 26.

XV. Le esperienze de' due paragrafi precedenti dimostrano che nè le diverse proprietà chimiche dei conduttori di seconda classe, nè la differente loro conducibilità specifica, impediscono il fenomeno di cui si tratta. Ma che avverrà se varieremo la conducibilità assoluta del liquido che la scarica elettrica deve attraversare? La conducibilità assoluta del liquido è la circostanza che più d' ogn' altra merita di essere considerata, poichè da essa appunto dipende che il fenomeno accada con maggiore o minore intensità, o non accada punto. La serie di esperienze che passo a registrare porrà in chiaro quanto qui asserisco. In esse la scarica elettrica magnetizzante è sempre tratta dalla boccia di capacità cinque, carica alla tensione di sei gradi; ed il ferro sottoposto alla magnetizzazione è un fascio di 400 fili eguali a quelli descritti al §. X.

Se la scarica della boccia di Leida non traversava conduttore liquido nel circolare attorno al ferro, questo magnetizzavasi al segno da deviare l'ago dello stromento di gradi 5°.

Obbligata la scarica a traversare un prisma d'acqua satura di sal comune, la cui base era 27 centimetri quadrati, e la lunghezza un centimetro, la magnetizzazione del ferro non fu differente da quella ottenuta senza il detto prisma d' acqua: l'ago deviò ancora di 5.

Variata la lunghezza del detto prisma d'acqua salata in altre quattro esperienze da due fino ad undici centimetri, l'effetto fu sempre 5

Fatto attraversare dalla scarica elettrica un prisma della stessa acqua salata avente sei centimetri quadrati

di base, e per lunghezza uno, due o tre centimetri e mezzo, la deviazione fu ancora . . . 5°.

Anche un prisma d' acqua di pozzo avente per base 143 centimetri quadrati, e per lunghezza tre millimetri, fece lo stesso . . . . 5.

Aumentata la lunghezza del detto prisma d' acqua fino a sei millimetri . . . . 8.

Portata la detta lunghezza a centimetri 1, 7 . 11.

Un prisma di detta acqua avente per base 43 centimetri quadrati e mezzo, e lungo centimetri 0, 5 (1) . . . . . '. . . . . 11.

Portata la lunghezza a centimetri 1, 5 . . 17.
. . . . 2 . . . 25.
. . . . 3, 6 . . 35.

Ridotta la base del detto prisma liquido a sei centimetri quadrati, e la lunghezza a centimetri 0, 5 (2) . . . . 35.
. . 2, 5 . . . . 44.
. . 3 . . . . 46.
. . 3, 5 . . . . 47.
. . 4, 5 . . . . 42.
. . 7 . . . . 35.
. . 8 . . . . 32.
. . 11, 5 . . . . 27.
. . 15 . . . . 18.
. . 23 . . . . 11.
. . 34, 5 . . . . 7, 30'.
. . 46 . . . . 6, 15.
. . 52 . . . . 5, circa.
. . 57, 5 . . . . 4, 30.
. . 69 . . . . 3, 15.
. . 80, 5 . . . . 2, 30.
. . 92 . . . . 1, 45 circa.

---

(1) Il conduttore liquido di questa sperienza ha presso a poco la stessa conducibilità assoluta del liquido della precedente, e produce perciò lo stesso effetto.

(2) Vedi la Nota qui sopra.

Un' altra serie di esperienze simile alla precedente ho istituito valendomi sempre dello stesso liquido, il quale era acqua distillata tenente in soluzione la cinquantesima parte del suo peso di sal comune. Ed osservai che se il liquido fatto attraversare dalla scarica elettrica era un prisma avente per base sei centimetri quadrati, e solo tre o quattro millimetri di lunghezza, la magnetizzazione operata nel ferro non differiva da quella che conseguivasi quando il liquido non faceva parte del circuito; che accrescendo di mano in mano la lunghezza del detto strato liquido, l'effetto magnetico cresceva, ed era al massimo quando la detta lunghezza era fra i settanta e gli ottanta centimetri. Allungato ulteriormente il prisma liquido scemava l'effetto, ma non fu eguale a quello che ottenevasi senza liquido, se non quando la lunghezza del detto prisma fu di nove in dieci metri.

Si deduce pertanto dalle premesse esperienze:

1°. Che se lo strato liquido che la scarica elettrica deve attraversare è dotato di forte conducibilità assoluta, quale sarebbe quella eguale o superiore alla conducibilità assoluta d'uno strato d'acqua di pozzo avente 143 centimetri quadrati di base e tre millimetri di lunghezza, esso liquido non altera sensibilmente l'azione magnetizzante della corrente momentanea adoperata nelle dette sperienze.

2°. Che diminuendo la conducibilità assoluta del prisma liquido cresce rapidamente l'azione magnetizzante fino ad un certo punto, al quale si ottiene il massimo effetto.

3°. Che proseguendo ancora a scemare la conducibilità assoluta dello strato liquido, scema l'azione magnetizzante e molto men presto di quel che crescesse prima di giungere al massimo, e si perviene ad un altro strato liquido *indifferente*, cioè tale che l'effetto magnetico è eguale a quello che si ottiene quando la scarica non attraversa che l'elica e le sue appendici metalliche.

4°. Che al di là di quest'ultimo punto, scemando ancora la conducibilità del liquido, l'effetto diviene sempre più debole.

XVI. E qui venne naturalmente il pensiero di osservare se la conducibilità assoluta dello strato liquido che porta un dato effetto, per esempio il massimo, o quello *indifferente* al di là del massimo, variasse al variare l'energia della scarica, o la qualità del ferro sottoposto alla magnetizzazione. E le sperienze mi mostrarono:

1°. Che la conducibilità assoluta del liquido, la quale dà il massimo effetto, non variava sensibilmente al variare la capacità della boccia quando veniva caricata alla stessa tensione. Ma la conducibilità assoluta che dà un effetto eguale a quello che si ottiene quando non v'è acqua nel circuito è minore quando la capacità è più grande. E ciò fino ad una capacità espressa dal numero 10. Con una batteria di capacità espressa da 25 vidi che ottenevasi il sovraccennato effetto con uno strato liquido dotato di più grande conducibilità assoluta.

2°. Lo strato liquido che dà il massimo effetto è meno conduttore quando la tensione a cui è caricata la boccia è più grande.

Caricata la boccia di capacità cinque alla tensione di un grado, il massimo effetto ch'essa produceva sul ferro, attorno al quale facevasi circolare, si otteneva quando il prisma d'acqua di pozzo di sei centimetri quadrati di base, che era obbligato ad attraversare, era lungo quattro centimetri.

Se la tensione della carica era di due gradi, il massimo effetto si aveva quando il detto prisma liquido era lungo sei centimetri.

Se la tensione era di cinque gradi, la lunghezza del detto prisma liquido portante il massimo effetto era di otto centimetri. E quando la tensione della boccia era di 12 gradi la detta lunghezza era di 11 centimetri.

3°. Anche la conducibilità assoluta de' prismi liquidi *indifferenti*, cioè tali che, fatti attraversare dalla scarica elettrica rendono un effetto eguale a quello che si ottiene quando nessun conduttore di seconda classe entra nel circolo, è più piccola, se la tensione della carica è più grande.

Infatti ingrandendo la lunghezza del prisma liquido al di là di quella che dava il massimo effetto, se la boccia era carica a due gradi, si perveniva al prisma liquido *indifferente* quando la lunghezza era di circa 34 centimetri; se la tensione era di cinque gradi, la lunghezza del detto prisma liquido era di 46; e quando la tensione era di dieci gradi, la detta lunghezza era di centimetri 65.

4°. Quanto alla qualità del ferro sottoposto alla magnetizzazione si è osservato, che quando il ferro è più facile a conseguire le proprietà magnetiche, minore è la conducibilità assoluta del liquido che, messo nel circuito rende, o il massimo effetto, o l'effetto eguale a quello che la scarica produce senza liquido quando la tensione è più forte.

XVII. Il fenomeno fin qui discorso mi sembra difficile a spiegarsi. Lo strato liquido che, messo nel circuito della scarica elettrica, tanto ingrandisce la forza magnetizzante di essa, non fa, per quanto noi possiam giudicare, che rendere alquanto men celere il trascorrimento della medesima. Ma come attribuire il fenomeno a questa sola circostanza mentre, messo in luogo dello strato liquido un lungo filo metallico il quale deve pur produrre un rallentamento nella scarica, esso non fa che diminuire l'azione magnetizzante della medesima? Questo fatto io l'accennai al principio di questa Memoria: ora aggiungerò che con esperienze apposite mi assicurai che un filo metallico ed uno strato liquido dotati l' uno e l' altro di eguale conducibilità assoluta, si comportavano ben diversamente, secondo che io aggiungeva o l'uno o l'altro alle appendici dell' elica la quale faceva invadere dalla scarica d' una boccia di Leida per magnetizzare il ferro nell' elica stessa contenuto. Giovi il descrivere una di siffatte sperienze.

Mediante il mio apparecchio per determinare la conducibilità de' liquidi (1), io divisi la corrente d' un elettromotore

(1) Trovasi descritto alla pagina 17 degli Atti della Seconda Riunione degli Scienziati italiani tenuta in Torino nel Settembre del 1840.

voltaico così esattamente fra due strati d'acqua, che uno squisito galvanometro non ne indicava alcun eccesso nè dall' una nè dall'altra parte. Poscia ad uno de' due strati d'acqua, fra quali era divisa la corrente, aggiunsi un filo di rame inargentato e diligentemente isolato lungo due mila metri, e con ciò il galvanometro indicava più conduttore l'altro strato, al quale non era stato aggiunto quel filo metallico. Allora aggiunsi a quest' ultimo strato un prisma d'acqua tale che il galvanometro indicava essere la corrente voltaica divisa ancora egualmente fra i due conduttori. Il che indicava essere la conducibilità assoluta del prisma d'acqua aggiunto eguale a quella del fil di rame lungo due mila metri.

Ciò fatto scaricai la boccia di Leida di capacità cinque, e colla tensione di cinque gradi sull'elica del magnetometro non ritenendo nel circuito che le appendici metalliche dell' elica stessa, e la forza magnetica acquistata dal ferro in essa contenuto fece deviar l'ago di . . . . 9°.

Avendo poi ripetuta la scarica, ed obbligata a percorrere i due mila metri di filo, la deviazione fu . . 4.

Ma tolto il lungo filo metallico, ed obbligata la scarica a traversare il prisma d'acqua dotato di egual conducibilità assoluta di esso filo, la magnetizzazione conseguita fu tale che deviò l'ago di . . . . . . 48.

Giovi il notare altresì che avendo obbligata la scarica a percorrere successivamente l'uno e l'altro de' detti conduttori, la deviazione fu soltanto di . . . 3.

Dunque non sembra essere per la sua poca conducibilità che lo strato d'acqua facendo circolare meno rapidamente attorno al ferro la scarica elettrica, accresca di tanto l'azione magnetizzante della scarica stessa; perchè, se così fosse, non vediamo come il conduttore metallico reso per la sua lunghezza tanto imperfetto quanto lo strato d'acqua, abbia a cagionare un indebolimento in cambio d'un rinforzo nell'azione magnetizzante della scarica.

XVIII. Dobbiamo per altro notare a questo proposito che tra un prisma d'acqua, ed un filo metallico dotato di eguale conducibilità assoluta avvi una insigne differenza; in quanto che questo per la sua grande estensione in lunghezza ha una capacità per l' elettrico sommamente più grande di quello. E questa capacità del filo metallico fa sì che nello scaricare la boccia non è tutto il fluido elettrico dell' armatura interna che passa all' esterna, ma in gran parte è il fluido stesso del filo metallico che va a circolare nell' elica per portarsi all' esterna armatura. Io per altro, dopo l'esperienza che son per descrivere, non saprei ammettere che la grande capacità del filo metallico, o almeno la circostanza or ricordata proveniente dalla capacità stessa, come causa della insigne differenza fra esso e lo strato liquido circa la magnetizzazione.

Posi l'armatura esterna d'una boccia di Leida non carica in comunicazione con un' appendice metallica dell' elica contenente il ferro da magnetizzarsi, e posi l'armatura esterna d'una seconda boccia eguale in capacità alla prima, e carica, in comunicazione coll' altra appendice dell' elica, poscia portai a contatto reciproco le sfere comunicanti colle armature esterne delle due bocce. Qui non fu certamente l'elettricità della boccia carica che andò a circolare nell' elica, ma bensì l' elettricità naturale dell' armatura esterna della boccia non carica. Tuttavia io ebbi nel ferro contenuto nell' elica una magnetizzazione non minore, ma eguale a quella che otteneva scaricando su di essa la seconda boccia carica alla tensione a cui la portava la prima dividendo con essa la sua carica.

Essendo per esempio ambe le bocce della capacità espressa dal numero 5, ed una di esse carica alla tensione di sei gradi, la deviazione che ottenevasi era 6°, come quella che avevasi, quando, tolta la seconda, io scaricava nell' elica la prima colla tensione di tre gradi. Bensì se vi era uno strato d'acqua otteneva nell' uno e nell'altro caso una deviazione di circa cinquanta gradi.

XIX. Un'altra circostanza, per cui differiscono i due conduttori, il metallico cioè e l'acqueo, si è che il primo per la sua grande lunghezza può dar luogo ad una dispersione di elettricità, che non può accadere nello strato liquido di eguale conducibilità. Ho per altro osservato, e con esperienze istituite sopra me stesso, e con altre istituite sopra persone nelle quali non poteva essere alcuna prevenzione, che l'uno e l'altro dei detti conduttori affievoliva egualmente la contrazione muscolare prodotta da una data scarica elettrica. Onde conchiuderei che; o la dispersione a cui dà luogo il lungo filo metallico è trascurabile; o il fluido elettrico che si disperde è quello che influisce particolarmente nella magnetizzazione, e non ha influenza sensibile sulle contrazioni (1).

XX. Quando la corrente elettrica trascorre un lungo filo metallico, avvi ancora una terza circostanza, la quale merita forse di essere considerata. E questa è che tale corrente può dar luogo ad una corrente contraria di induzione nei corpi circostanti al filo, e qualora ciò sia, verranne scemata l'azione magnetizzante della primitiva. Di qui pur verrebbe che l'aggiungere al lungo filo metallico anche uno strato liquido, questo accresce l'azione inducente, la quale come sappiamo

---

(1) Il supporre che le molecole del fluido elettrico non sieno tutte quante fra loro omogenee, e che alcune sieno più suscettibili d'essere deviate o disperse, ed altre lo sieno meno, non è per me un'ipotesi troppo ardita dopo l'osservazione registrata al §. XVI della mia Memoria di alcune paralisi curate coll'elettricità voltaica pubblicata nel 1833. Giovi ricordarla brevemente.

Un paraplegiaco elettrizzato con piccole e numerose scosse mediante la corona di tazze del Volta, dopo un certo numero di scosse, maggiore o minore secondo che s'impiegavano poche o molte coppie, provava nel momento della scossa una particolare sensazione molesta. Si osservò pertanto costantemente che, se l'elettromotore era sufficientemente isolato, la scossa molesta capitava e impiegando sessanta coppie, e impiegandone anco sol tre: ma quando l'apparecchio non era ben isolato, non capitava mai quella sensazione, nè impiegando poche coppie, nè impiegandone molte, sebbene le scosse a parità di numero di coppie riuscissero forti come quando l'elettromotore era ben isolato.

è analoga alla magnetizzante (1), e quindi riuscir debba non più forte, ma più debole la magnetizzazione; come appunto si vide nell'esperienza ultima del §. XVI.

Intanto egli è vero, che quando il ferro messo nell'elica è circondato da un tubo metallico, l'aggiungere un prisma d'acqua nel circuito, in luogo di far crescere, fa scemare la magnetizzazione che può produrre la scarica della bottiglia di Leida.

In un picciol tubo di rame posi il solito fascio di fili di ferro, e misi poi il tubo stesso nell'elica. Scaricata su questa la boccia colla tensione di sei gradi, e senza liquido nel circuito, ebbesi la deviazione . . . . 10°, 30'.

Aggiunto al circuito un prisma d'acqua di sei centimetri quadrati di base, e tre centimetri di lunghezza; una scarica eguale alla precedente produsse soltanto la deviazione di . . . . 4, 40.

E si noti che se il ferro non era circondato dal tubo metallico, nel primo caso, cioè quando la scarica non traversava acqua, la deviazione era . . 17.

E nel secondo caso . . . . 70.

Nella quarta Memoria, dove trattai dell'influenza degli involucri metallici nel diminuire la magnetizzazione operata dalle scariche elettriche nei ferri in essi contenuti, ho dimostrato che tale effetto proviene da ciò, che, nel momento che la corrente circola nell'elica, nasce nel tubo in essa contenuto una corrente contraria (2).

---

(1) Nella prima delle citate Memorie sull'azione magnetizzante delle correnti Leida-elettriche trattasi appunto di alcune Analogie tra l'azione inducente e la magnetizzante delle correnti elettriche momentanee.

(2) A chi non avesse presente la serie de' ragionamenti e di esperienze con cui è dimostrata la qui citata proposizione basti rammentare che, messi nello stesso involucro metallico due ferri, uno de' quali sia circondato da un'elica di filo metallico, e l'altro no; scaricata la boccia sull'elica stessa, il ferro in essa contenuto trovasi magnetizzato in un senso, e l'altro in senso contrario.

Egli è adunque a siffatta corrente che, almeno in questo caso, noi dobbiamo attribuire la mancanza del solito effetto del prisma d'acqua.

Dobbiamo per altro notare che quando siffatta corrente indotta che ha luogo attorno al ferro è più debole, come avviene quando al tubo si sostituisce un' elica metallica chiusa, allora lo strato d'acqua spiega ancora la sua azione, come già vedemmo nell' esperienza registrata al §. XI. E lo stesso dicasi quando il tubo metallico circonda l' elica stessa, sulla quale si scarica la boccia, sebbene l' aumento di magnetizzazione prodotto in questo caso dallo strato liquido sia molto minore che non quando manca il tubo attorno all' elica.

In oltre ho osservato che se invece di collocare il tubo metallico in guisa che circondi il ferro, viene collocato in un' altra elica aggiunta alle appendici di quella contenente il ferro, allora lo strato acqueo spiega la sua influenza non diversamente da quando il detto tubo non esiste nell'elica aggiunta.

Dopo tutto ciò, io non saprei indurmi ad ammettere neppure la terza delle notate circostanze che differenziano il lungo filo metallico dallo strato liquido ad esso eguale per conducibilità, come causa dell'essere non accresciuta, ma diminuita l'azione magnetizzante della boccia dallo stesso lungo filo metallico che gli si fa percorrere.

XXI. Ma se anco si volesse ammettere che la circostanza considerata nel paragrafo precedente fosse cagione del non crescere l'azione magnetizzante per l' aggiunta del lungo filo metallico, quantunque esso rallenti la corrente al pari del conduttore liquido, resterebbe poi sempre ad intendersi come lo strato liquido aumenti l'azione magnetizzante della corrente, ove altro non faccia che renderla meno rapida. Tanto più che avendo io fatto circolare attorno al ferro la stessa dose d'elettricità, ma messa in movimento da boccie di capacità differente, non si osservò punto che la magnetizzazione riuscisse molto più grande quando la capacità della boccia era maggiore, e per conseguenza più piccola la tensione a cui era caricata. Ecco nella tabella che segue i risultati di sei esperienze.

NUMERI RAPPRESENTANTI		DEVIAZIONI MAGNETO - METRICHE	
le capacità delle bocce di Leida.	le tensioni a cui vengono caricate colla stessa quantità di elettricità	quando la scarica non traversa acqua.	quando la scarica traversa un prisma d' acqua di pozzo di 6 centimetri quadrati di base, e due centimetri di lunghezza.
1, 3	23	10°.	70°.
2	15	9.	69.
2, 4	12, 5	6.	67.
5	6	7. 40'.	47. 50'.
9	3, 5	10.	41.
25	1, 2	8. 40.	21. 45.

Ora siccome sappiamo che la velocità della corrente elettrica è più grande quando, a parità di circostanze, è più grande la tensione (1); così la serie de' risultati ottenuti senza lo strato d'acqua fa vedere che quando una data quantità di fluido elettrico scorre più lentamente non produce sempre maggior effetto di quando scorre più veloce; e dimostra pure che quando attraversa lo strato d'acqua, la maggiore velocità della corrente giova ad avere effetto magnetico più grande. Ed ecco che anco queste deduzioni stanno contro la supposizione che l'acqua operi quell' ingagliardimento di forza magnetizzante della corrente in virtù del rallentamento da essa prodotto nella corrente medesima (2).

(1) Ho dimostrata questa proposizione nel §. X della terza Memoria sulla teoria degli elettromotori pubblicata l' anno 1836 negli Annali delle Scienze del Regno Lombardo - Veneto.

(2) Noterò eziandio di aver osservato che una boccia di Leida piccola e ristretta, nella quale l' armatura interna consisteva in frastagli di stagnuolo, e la capacità era presso a poco quella che soglio indicare coll' unità, non presentava il fenomeno, cioè la sua azione magnetizzante scemava quando la scarica traversava un conduttore liquido, qualunque volta la tensione a cui veniva caricata era inferiore ai dodici o quindici gradi. Nè ciò potrei attribuire alla tenue capacità di quel congegno,

Io lascierò adunque a più felici osservatori l' indagare la cagione del singolare fenomeno che offre la corrente Leida-elettrica, qual è quello di acquistare notabilmente in forza magnetizzante quando attraversa uno strato liquido di mediocre conducibilità. Mi limiterò a far conoscere in altra occasione il partito che parmi da esso potersi trarre nel determinare la conducibilità assoluta e relativa de' corpi per l'elettrico, e per migliorare i re-elettrometri. E porrò fine a questa Memoria raccogliendone qui le principali proposizioni.

1ª. L' azione magnetizzante della scarica elettrica è più energica quando, oltre l' elica contenente il ferro, essa deve attraversare uno strato liquido di mediocre conducibilità assoluta. E ciò ha luogo comunque sia preparato o foggiato il ferro sottoposto alla magnetizzazione; sia esso o non sia alterato nella suscettibilità di magnetizzarsi; ed in quest'ultimo caso tanto quando la scarica tende ad accrescere, come quando tende a scemare la forza magnetica che già possiede.

2ª. Questo fenomeno ha pur luogo, quand' anco la scarica sia in parte deviata, o divisa fra più conduttori, o dimezzata da un altro coibente armato, e qualunque sia la capacità della boccia che s'adopera per magnetizzare, qualunque la tensione, e qualunque sieno le proprietà chimiche e la conducibilità relativa o specifica del conduttore di seconda classe che la scarica deve percorrere.

3ª. L' intensità del fenomeno ha relazione specialmente col grado di conducibilità assoluta del conduttore di seconda classe che deve percorrersi dalla scarica. Infatti se esso conduttore ha una conducibilità assoluta eguale o superiore a quella d' un prisma d'acqua satura di sal comune avente per base sei centimetri quadrati e la lunghezza di circa tre centimetri, la magnetizzazione non è differente da quella che si

---

perchè due altre bocce più piccole, le cui capacità erano in una 0,6 e nell' altra 0,3, armate internamente al solito con foglia di stagno aderente al vetro, si comportavano come le altre.

ottiene quando la scarica non percorre verun liquido. Ma diminuendo la conducibilità del detto strato, cresce rapidamente l'azione magnetizzante, e presto si giunge ad avere il massimo effetto. E, proseguendo a scemare la conducibilità del liquido, scema pure l'azione magnetizzante, ma molto meno rapidamente di quel che crescesse prima di giungere al massimo; e si perviene ad un altro strato liquido *indifferente*, cioè tale che rende lo stesso effetto che si ha quando la scarica non trascorre che l'elica e le solite appendici metalliche. E se continuasi a rendere il prisma liquido men conduttore, l'effetto della scarica elettrica sul ferro diviene sempre più debole.

4ª. La conducibilità assoluta del liquido, la quale dà il massimo effetto non varia al variare la capacità della boccia carica alla stessa tensione. Ma la conducibilità che rende lo strato *indifferente* è minore quando la capacità è più grande.

5ª. Gli strati liquidi *indifferenti*, e quelli che danno il massimo effetto sono meno conduttori quando la tensione della boccia è più grande, e il ferro è più facile a conseguire le proprietà magnetiche.

6ª. Se all' elica contenente il ferro si aggiunge un filo metallico lungo, l' azione della scarica scema notabilmente, quantunque la conducibilità assoluta del filo sia eguale a quella dello strato liquido che dà il massimo effetto.

7ª. Se il ferro posto nell' elica è circondato da un tubo metallico, lo strato liquido aggiunto non fa crescere ma fa diminuire l' effetto della scarica elettrica sul ferro stesso. E ciò perchè in questo caso il liquido rinforza la contraria corrente di induzione che la scarica genera nel tubo. Che, se la corrente contraria indotta è più debole, perchè al tubo circondante il ferro è sostituita un' elica chiusa, allora l' aggiunta del liquido accresce pure l'azione magnetizzante della corrente leida-elettrica, ma meno che quando la seconda elica che circonda il ferro è aperta, o tolta. (1)

---

(1) I fatti principali di cui si parla in questa Memoria fornirono l' argomento ad una mia pubblica Lezione il giorno 13 Giugno del corrente anno 1846.

DISCUSSIONE ANALITICA

SULL' INFLUENZA CHE L' AZIONE DI UN MEZZO DIELETTRICO HA SULLA DISTRIBUZIONE DELL' ELETTRICITÀ ALLA SUPERFICIE DI PIÙ CORPI ELETTRICI DISSEMINATI IN ESSO

DEL SOCIO ATTUALE

CAV. PROF. O. F. MOSSOTTI.

Ricevuta adì 15 Agosto 1846.

§. I.

PRELIMINARE.

1. Fra i varj risultati che il Sig. Faraday ha ottenuto, per mezzo delle ingegnose ricerche colle quali va discoprendo le relazioni mutue fra le azioni degli imponderabili, per verificare l' identità della loro essenza, uno assai notevole è il ritrovamento del modo con cui s' inducono i corpi dielettrici. Questi corpi, chiamati isolanti, o non conduttori, erano considerati anteriormente dai Fisici come indifferenti alle induzioni elettriche, ed il loro intervento si faceva consistere soltanto nell' opporre una resistenza passiva alla dispersione dell' elettricità. Il Sig. Faraday ha riconosciuto che i corpi dielettrici sotto l' influenza di un corpo elettrizzato ricevono un' induzione molecolare, od in altri termini che le loro molecole acquistano una polarità elettrica (*). Da questo stato di po-

(*) *Philosophical Transactions* 1838. *Experimental Researches on electricity.* Serie undecima e duodecima. Il Signor Cav. Avogadro ha a questo proposito ricordato che egli, guidato da altre considerazioni, aveva emesso idee analoghe sino da 40 anni fa nei Tomi 63 e 65 del *Journal de Physique de la Métherie.* Vedasi un Saggio recente di questo dotto Fisico nel Volume XXIII, Parte Fisica, delle Memorie della Società Italiana delle Scienze.

larizzazione delle molecole del corpo dielettrico provengono due sistemi di forze opposte, che si alternano rapidamente e si dissimulano vicendevolmente nell' interno del corpo, ma che manifestano due effetti speciali alle sue estremità. Da un lato, per l'azione simultanea di questi due sistemi, risulta sullo strato elettrico che copre la superficie del corpo eccitato, una forza eguale e contraria a quella, colla quale lo strato stesso tende ad espellere i suoi atomi, e dal contrasto di queste due forze il fluido componente lo strato viene ritenuto sulla superficie del corpo. Dal lato opposto, dove il corpo dielettrico va a toccare o ad avvolgere le superficie degli altri corpi elettrici circostanti, si spiega una forza, di specie analoga a quella del corpo eccitato, dalla quale quelle superficie vengono messe nello stato elettrico contrario. Con queste deduzioni sperimentali il Sig. Faraday è venuto a porre in chiaro il modo con cui i corpi dielettrici entrano in azione, ed a mostrare il nesso loro cogli altri corpi elettrici nella produzione dei fenomeni d' induzione.

2. Provato l' intervento dell'azione dei corpi isolanti, è chiaro che non basta nello stabilire le equazioni dell' equilibrio elettrico, di considerare, come hanno fatto fin qui i Geometri, l'azione reciproca dei diversi strati elettrici sulle superficie dei corpi conduttori, ma che bisogna anche introdurre l'azione proveniente dall' induzione molecolare del corpo ambiente, il quale comunemente è l'aria. In conseguenza di ciò il problema di determinare la distribuzione dell' elettricità sulla superficie di più corpi conduttori in presenza gli uni degli altri, richiede due nuove ricerche: 1° Tradurre in un' espressione analitica l'azione del corpo dielettrico, onde introdurla nell' equazione dell' equilibrio. 2° Trattare l'equazione risultante in modo da far emergere l'influenza che la nuova azione potrebbe avere sulla distribuzione dell'elettricità. L'esposizione dell'analisi che conduce alla meta di queste due ricerche forma il soggetto del presente scritto.

La prima di tali indagini dipende da una analisi sottile ed astrusa, che però non abbiamo bisogno di creare al proposito, potendoci servire quella che il celebre Poisson ha dato in altra occasione, trattando la teoria del magnetismo secondo l'ipotesi di Coulomb. La più semplice riflessione basta infatti a farci vedere, che l'ipotesi di una polarizzazione elettrica delle molecole dell'aria, o d'altro corpo dielettrico, deve condurre a dei risultati analoghi a quelli spettanti alla polarizzazione di cui Coulomb ha supposto dotati gli elementi magnetici per ispiegare i fenomeni di questa sorte. In amendue le ipotesi si suppone che il fluido elettrico o magnetico sia decomposto in due fluidi vitreo o resinoso, boreale od australe: che questi due fluidi componenti si trasportino per le azioni esteriori, l'uno ad una delle estremità della molecola, o dell'elemento magnetico, l'altro all' estremità opposta, costituendo così la polarità della molecola o dell'elemento magnetico. Lo spostamento dei due fluidi si fa senza che niuno dei due esca dallo spazio proprio di ciascuna molecola o di ciascun elemento, ma la separazione è tanto più grande quanto l' azione esteriore è maggiore, e nei corpi dielettrici cresce sino al grado che l'elettricità troppo accumulata negli estremi irrompe per salto e con scintilla dalle une molecole alle altre.

Nell' ipotesi che noi abbiamo proposto sulla costituzione dei corpi (*), nella quale, assunto ad imitazione di Franklin un etere di una sola specie, ogni molecola è circondata da una atmosfera del medesimo, la polarizzazione consiste nel condensarsi l' atmosfera da una parte e nel rarefarsi dall'altra, dando origine nella parte condensata ad una repulsione sul fluido elettrico esteriore, e lasciando scoperta nella parte rarefatta un' attrazione della molecola per lo stesso fluido. Gli effetti d' attrazione e repulsione nell' una e nell' altra ipotesi devono succedere nello stesso modo. L' irruzione od il trapasso

---

(*) Sur les forces qui régissent la constitution intérieure des corps, Aperçu ec. Turin 1836. *Taylor' s Scientific Memoirs.* Vol. I, pag. 448.

avviene quando le azioni esteriori alterano e trasformano le atmosfere delle molecole di tanto che queste divengono incapaci di più ritenerle interamente sotto il loro dominio. Secondo che le molecole del corpo dielettrico formano colle loro atmosfere dei sistemi più o meno atti a reggersi sotto un' azione perturbatrice senza che vi sia irruzione o passaggio lento d' elettricità dalle une alle altre, il corpo è più o meno isolante o coibente. I corpi conduttori sono quelli in cui quest' attitudine è minima, i migliori coibenti quelli in cui è massima.

3. Premesse queste nozioni che fanno presentire l' analogia che vi è fra l' azione degli elementi magnetici e quella delle molecole polarizzate dei corpi dielettrici, passeremo a confermarla coll' esempio, traendo dai processi analitici impiegati pel calcolo della prima quelli che convengono al calcolo della seconda. Per tale scopo ci siamo fatto lecito di riprodurre, quasi testualmente, una piccola parte della Memoria, che Poisson ha pubblicato nel Tomo VII dell' Accademia di Parigi, sulla teoria del Magnetismo in movimento. Con questa citazione, mentre verremo mettendo sott' occhio i passi della suddetta Memoria dei quali ci occorrerà di far uso, avremo l'opportunità d' introdurre quelle modificazioni che ci saranno necessarie per trasportare alla teoria dell' induzione molecolare elettrica i ragionamenti relativi alla teoria del magnetismo. Stabilite colla scorta dell' analisi di Poisson le equazioni fondamentali, tratteremo in seguito queste equazioni in modo da farne scaturire i teoremi principali, che da esse possono dedursi rispetto alle condizioni d' equilibrio dell' elettricità alla superficie di più corpi elettrici sotto l' influenza dell' induzione molecolare d' un corpo dielettrico ambiente.

Per acquistare un' idea del tenore di questi teoremi, s' immagini un' ampio recinto chiuso tutt' all' intorno da pareti di materia conduttrice comunicanti col suolo, nel cui interno siano distribuiti in un modo qualunque dei corpi conduttori elettrizzati. In questa disposizione di cose il volume dell' aria ambiente si polarizza elettricamente, e si dimostra

che l'effetto risultante di questo stato di polarizzazione è tale quale sarebbe, se venissero a crearsi intorno alle superficie dei corpi conduttori degli strati elettrici che godessero delle seguenti proprietà. 1°. La somma delle elettricità libere colle quali questi strati avrebbero ad essere composti sarebbe nulla, cioè quella da darsi agli strati in eccesso verrebbe ad essere esattamente eguale a quella da sottrarsi per formare gli strati in difetto. 2°. Questi strati, che rappresentano ai limiti del corpo dielettrico gli effetti residui di due sistemi di forze reciproche interne, esercitano sulla superficie dei corpi conduttori delle azioni equivalenti a quelle che i medesimi eserciterebbero, se isolati operassero direttamente in distanza fra loro senza l'intervento del corpo dielettrico. 3°. La quantità di elettricità respinta nel suolo, o chiamata dal suolo sulla superficie interna delle pareti del recinto, è eguale alla quantità di elettricità libera in eccesso od in difetto esistente sulle superficie dei corpi elettrici in esso compresi. Gli esposti teoremi evidentemente si riferiscono al caso in cui l' intensità d' induzione del corpo dielettrico non eccede il limite entro cui esso può opporre una coibenza perfetta.

4. Ci siamo tanto più volontieri accinti a fare quest' applicazione dell' analisi all' induzione molecolare elettrica concepita dal Sig. Faraday, in quanto che le vedute di quest' illustre Fisico concordano con quelle che abbiamo emesse nella Memoria già citata sulla costituzione dei corpi. Dopo aver mostrato come, dotando l' etere e le molecole ponderabili delle stesse forze che suppone la teoria elettrica di Æpinus, le molecole vengono ad armarsi di atmosfere d' etere in congiunzione colle quali possedono le forze molecolari necessarie alla produzione dei fenomeni di coesione, d' aggregazione e di capillarità (*); restava a provare che le dette atmosfere esistono realmente. I fenomeni della luce in cui il modo di

(*) Vedansi la Lezione XV del mio corso di Lezioni elementari ec., ed un recente articolo nel Giornale il *Cimento* del mese di Maggio e Giugno 1846.

distribuzione dell'etere nell'interno dei corpi è particolarmente implicato, ci parvero i più atti a questa verificazione; e le spiegazioni dirette della dispersione e della doppia rifrazione, che dalla supposizione di queste atmosfere abbiamo dedotto, vennero in conferma della loro esistenza (*). La maniera semplice colla quale le medesime si prestano in questo scritto a rappresentare l'induzione elettrica del Sig. Faraday, e la concordanza dei risultamenti con quelli già sperimentalmente conosciuti nell'elettricità statica, forniscono un nuovo argomento in loro favore, che ho stimato opportuno di rendere pubblico in questa breve Memoria.

§. II.

Espressione generale dell' azione del corpo dielettrico.

4. Le atmosfere delle molecole di un corpo dielettrico essendo tutte polarizzate tanto presso la superficie che nell' interno del corpo con una legge variabile, proponiamoci prima di determinare l' azione di un' atmosfera isolata su di un punto dato di posizione, per passare poi a quella totale che esercita il corpo di dimensioni qualunque.

(*) Vedansi gli Atti della III e VI Riunione dei Scienziati Italiani, il Tomo I, n°. 5 del Giornale Toscano, e le Lezioni XXVII e XXX del mio corso ove queste spiegazioni sono motivate. Le Memorie contenenti le analisi matematiche che confermano e pongono in evidenza queste spiegazioni saranno pubblicate quanto prima. Le analogie delle spiegazioni date fanno nascere l' idea che anche i movimenti del piano di polarizzazione di un raggio di luce, recentemente ottenuti dal Sig. Faraday per mezzo dell' azione di calamite artificiali temporarie, siano dovuti ad un' alterazione di forma nelle atmosfere eteree delle molecole del corpo diafano. In questo caso sarebbe l' etere stesso vibrante che sotto l' azione delle calamite acquisterebbe, durante il fenomeno, una distribuzione atta a dar luogo alla polarizzazione circolare, e non parrebbe improprio il dire che il magnetismo può alterare direttamente un raggio luminoso, benchè ciò non possa succedere se non quando l' etere che costituisce questo raggio sia tenuto aggruppato intorno alle molecole materiali, come lo è generalmente nei corpi, e benchè, per l' equilibrio mutuo fra le molecole e l' etere, un' alterazione delle atmosfere sia seguita da qualche minimo disturbo nella situazione delle molecole.

(*) « Sia M questo punto; x, y, z le sue tre coordinate;
« x', y', z' le coordinate riferite agli stessi assi di un altro
« punto C appartenente all'atmosfera delle molecole del corpo
« dielettrico, della quale si vuole considerare l'azione sul
« punto M. Rappresentiamo con h il lato del cubo equiva-
« lente in volume a questa atmosfera, e sia M' un secondo
« punto di essa determinato dalle coordinate $h\psi$, $h\xi$, $h\zeta$ rife-
« rite al punto C, e condotte parallelamente a quelle x, y, z.
« Chiamiamo ρ la distanza del punto M al punto C, di modo
« che si abbia

$$\rho^2 = (x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2\,;$$

« e $\rho_{,}$ la distanza da M ad M', la quale si dedurrà da ρ,
« aumentando x', y', z' di $h\psi$, $h\xi$, $h\zeta$ rispettivamente.

« L'elemento differenziale di volume corrispondente al
« punto M', avrà $h^3 d\psi\, d\xi\, d\zeta$ per espressione: indicheremo con
« $\mu' h^3 d\psi\, d\xi\, d\zeta$ » l'eccesso od il difetto di fluido elettrico sul
fluido naturale, che esiste in questo punto, « μ' essendo po-
« sitivo o negativo secondo il caso. Questo coefficiente sarà
« una funzione di ψ, ξ, ζ dipendente dalla distribuzione del
« fluido » nell'interno dell'atmosfera della molecola che si
considera. La quantità di fluido elettrico dovendo rimanere
costante nell'atmosfera d'ogni molecola, si dovrà avere

$$\int\int\int \mu'\, d\psi\, d\xi\, d\zeta = 0 \qquad (1)$$

il che fornirà una prima equazione di condizione, alla quale
la distribuzione del fluido deve soddisfare.

L'azione repulsiva od attrativa proveniente dal conden-
samento o diradamento del fluido elettrico nel punto M', se-
condo che $\mu' h^3 d\psi\, d\xi\, d\zeta$ sarà positivo o negativo, sopra un ele-
mento di etere situato in M, avrà per espressione

$$\frac{h^3 \mu'\, d\psi\, d\xi\, d\zeta}{\rho_{,}^2}$$

(*) Poisson. Sur la Theorie du Magnetisme en mouvement. Mémoires de l'Academie des Sciences. Vol. VI, pag. 441.

prendendo per unità di forza l'intensità della repulsione elettrica all'unità di distanza, e corrispondente all'unità di quantità di fluido. « Le sue componenti parallele ai tre assi delle « x, y, z saranno espresse dalle differenziali parziali

$$\frac{d\frac{1}{\rho_1}}{dx}, \qquad \frac{d\frac{1}{\rho_1}}{dy}, \qquad \frac{d\frac{1}{\rho_1}}{dz},$$

« prese con segno contrario e moltiplicate per $h^3 \mu' d\psi\, d\xi\, d\zeta$.
« Secondo che i loro valori saranno positivi o negativi queste « forze tenderanno ad aumentare od a diminuire le coordi-« nate delle particelle di fluido situate nel punto M; per au-« mentare o diminuire le coordinate del punto M s' intende « allontanare od avvicinare questo punto alla loro origine « quando sono positive, e viceversa quando sono negative.

« Queste tre componenti delle forze dirette da M' ad M « devono essere integrate in tutta l' estensione » dell' atmosfera della molecola, per conchiudere l'azione che l'atmosfera in cui M' è situato esercita sopra il punto M.

4. « Per quest' oggetto sviluppiamo la quantità $\frac{1}{\rho'}$ secon-« do le potenze di h, ciò che darà una serie convergentissima, « eccettuato il caso particolare che la distanza del punto M « dall' atmosfera della molecola fosse dello stesso ordine di « piccolezza delle sue dimensioni. Questo caso essendo escluso, « potremo senza error sensibile trascurare le potenze di h « superiori alla prima, ed avremo semplicemente

$$\frac{1}{\rho_1} = \frac{1}{\rho} + \frac{d\frac{1}{\rho}}{dx'} h d\psi + \frac{d\frac{1}{\rho}}{dy'} h d\xi + \frac{d\frac{1}{\rho}}{dz'} h d\zeta .$$

« In virtù dell' equazione (1) il primo termine corrispondente « a questo valore di $\frac{1}{\rho_1}$ svanirà negli integrali triplicati che « si tratta di ottenere, e se si pone per abbreviare

$$h \int\int\int \mu' \psi\, d\psi\, d\xi\, d\zeta = \alpha'$$
$$h \int\int\int \mu' \xi\, d\psi\, d\xi\, d\zeta = \beta'$$
$$h \int\int\int \mu' \zeta\, d\psi\, d\xi\, d\zeta = \gamma'$$

« ed in seguito

$$\frac{d\frac{1}{\rho}}{dx'}\alpha' + \frac{d\frac{1}{\rho}}{dy'}\beta' + \frac{d\frac{1}{\rho}}{dz'}\gamma' = q$$

« e che infine si dinotino con λ, λ', λ'' le tre componenti
« dimandate rispettivamente parallele agli assi delle x, y, z,
« si avrà

$$(2) \qquad \lambda = -h^3 \frac{dq}{dx}, \qquad \lambda' = -h^3 \frac{dq}{dy}, \qquad \lambda'' = -h^3 \frac{dq}{dz}.$$

« Da ciò si vede che l'azione » dell'atmosfera di una molecola del corpo dielettrico « sopra un punto che non sia troppo
« prossimo, non dipende dalla sua forma e dalla distribuzione
« del suo fluido, se non in quanto che esse influiscono sui
« valori delle tre variabili α', β', γ'. Queste quantità cambiano
« di valore colla direzione degli assi ortogonali, ma le varia-
« zioni dei loro valori seguono le stesse leggi delle componenti
« di una forza data v, il che non è difficile a dimostrarsi (*).

5. « Chiamiamo A il corpo dielettrico di cui si tratta di
« calcolare l'azione sul punto M che corrisponde alle coor-
« dinate x, y, z, e che supporremo situato al di fuori di A
« ad una distanza sensibile dalla sua superficie. Dividiamo A
« in un grandissimo numero di parti, le cui dimensioni estre-
« mamente piccole rispetto al volume del corpo siano tuttavia
« assai grandi rispetto alle dimensioni » delle atmosfere di
ciascuna molecola. « Sia v il volume di una di queste parti
« che comprenda » l'atmosfera « che abbiamo considerato
« precedentemente, il luogo della quale è determinato dal
« punto C, che corrisponde alle coordinate x', y' z'. Indiche-
« remo con k' la somma dei volumi » di tutte le atmosfere
molecolari « contenute in v divisa per questo volume. Questa
« quantità k' dovrà essere data per ogni sostanza » dielettrica
in particolare: essa sarà costante se il corpo dielettrico sarà

(*) Vedasi la Memoria di Poisson sul Magnetismo nel Tomo X dell'Istituto Nazionale.

omogeneo e sarebbe una funzione di x', y', z' quando il corpo fosse eterogeneo variando nelle sue parti secondo date leggi (*).

« Quantunque il volume v sia molto piccolo, le quantità « α', β' γ' non avrebbero gli stessi valori in tutta la sua esten- « sione » se le atmosfere elettriche delle molecole comprese in esso, per esser queste eterogenee o per qualch'altra causa, avessero originariamente una forma e disposizione diversa fra loro. « Ma il punto M essendo esteriore e sensibilmente lon- « tano dalla superficie di A, la sua distanza dal volume v sarà « assai grande rispetto alle dimensioni di questa minima parte « di A; dal che si può conchiudere che le componenti dell' « azione di v sopra M saranno sempre esprimibili dai valori « precedenti di $\lambda, \lambda', \lambda''$ sostituendo al volume h^3 » dell'atmosfera elettrica di una molecola, la somma kv di tutte le atmosfere elettriche contenute in v, « e prendendo per le « quantità α', β', γ' le medie dei valori relativi a queste stesse « atmosfere. Queste medie dovranno essere sommesse alla « legge di continuità, e potersi esprimere in funzione delle « coordinate x', y', z' del punto C, che determina il luogo di « v, senza di che l' analisi matematica non potrebbe appli- « carsi alla questione di cui ci occupiamo. »

« Ciò posto, non resterà più che a prendersi la somma « delle azioni di tutti i volumi v sopra il punto M, decom- « poste secondo uno stesso asse, per avere l' azione totale di « A secondo questa retta; ora questa somma di quantità fi- « nite potrà essere rimpiazzata da un integrale definito. In- « fatti se $f(x', y', z')$ è il termine generale delle quantità che « si vogliono sommare, x', y', z' essendo le coordinate di uno « dei punti del volume v, supposto piccolissimo, e se la somma « dimandata deve estendersi a tutte le parti di v, nelle quali

---

(*) Abbiamo conservato questo coefficiente k' impiegato da Poisson per comprendere il caso della eterogeneità del corpo, e per l' uso che se ne può fare nelle ricerche più complicate, ma esso non avrebbe il significato del testo nel nostro caso, ove l' etere, più condensato intorno alle molecole, è però diffuso in tutto lo spazio.

« il volume V è stato diviso, si sa dai principj del calcolo « integrale, che questa somma è prossimamente eguale all'in- « tegrale triplicato $\int\int\int f(x', y', z')\, dx'\, dy'\, dz'$ preso in tutta « l'estensione del volume V. La differenza fra la somma e « l'integrale è tanto più piccola quanto minori sono i volumi « parziali rispetto al volume totale, e nel caso presente si « può trascurare senza tema che ne risulti alcun errore ap- « prezzabile ». Ciò non ostante la sostituzione di un integrale ad una somma non sarebbe permessa in generale se $f(x', y', z')$ fosse composta di due parti di segno contrario (*).

« Denotando dunque con X, Y, Z le tre componenti se- « condo gli assi delle x, y, z dell'azione di A sopra questo « punto esteriore M, avremo i loro valori, sostituendo prima « $k'\, dx'\, dy'\, dz'$ in luogo di h^3 nei secondi membri delle equa- « zioni (2), ed integrando in seguito in tutta l'estensione di « A. In questo modo si ha

$$X = -\int\int\int \frac{dq}{dx}\, k'\, dx'\, dy'\, dz'$$

$$Y = -\int\int\int \frac{dq}{dy}\, k'\, dx'\, dy'\, dz'$$

$$Z = -\int\int\int \frac{dq}{dz}\, k'\, dx'\, dy'\, dz'\ ;$$

« ovvero facendo passare le differenze relative ad x, y, z fuori « degli integrali, i cui limiti sono in generale indipendenti « da queste tre coordinate: rimettendo per q ciò che questa « lettera rappresenta, e ponendo per brevità

$$Q = \int\int\int \left(\frac{d\frac{1}{\rho}}{dx'}\, \alpha' + \frac{d\frac{1}{\rho}}{dy'}\, \beta' + \frac{d\frac{1}{\rho}}{dz'}\, \gamma' \right) k'\, dx'\, dy'\, dz'\ .$$

« si avrà più semplicemente

$$X = -\frac{dQ}{dx}\ , \quad Y = -\frac{dQ}{dy}\ , \quad Z = -\frac{dQ}{dz}\ . \qquad (3)$$

(*) Poisson. Sur les équations générales de l'équilibre et du mouvement des corps solides elastiques et des fluides. Journal de l'École Polytechnique. Tom. XIII, pag. 14. Nouvelle Théorie de l'action capillaire, pag. 281.

6. « Quando il punto M fa parte del corpo A » e si trova compreso in un elemento v del medesimo, non avremmo dati sufficienti per determinare le componenti delle azioni particolari sul detto punto: ma d' altra parte non si potrebbero riconoscere queste azioni separatamente, e verificarle coll' esperienza. Quello che possiamo fare, e di cui solo abbiamo bisogno, conformemente alla legge di continuità ed agli effetti che possiamo apprezzare, si è di assegnare l' azione media che risulta su ciascun punto dell' elemento v, nel quale il punto M si trova compreso. Per ciò divideremo l' azione del corpo A in due parti: quella esterna all' elemento v dovuta a tutto il corpo A, escludendo v, e quella interna dovuta a questo elemento. Per valutare la prima potremo ancora impiegare il valore di Q corrispondente all'azione totale del corpo, ma dovremo sottrarre la parte che compete all' elemento v escluso. Quantunque questa parte sia limitata ad un solo elemento e possa parere trascurabile, pure, siccome nel denominatore dell' espressione di Q, si trova il valore di ρ che diviene evanescente per questo elemento, esso può acquistare ed acquista realmente un valore finito.

Per ritrovare questo valore assumiamo l' espressione di $\frac{dQ}{dx}$ data dalla prima delle equazioni (3), e che può scriversi come segue

$$\frac{dQ}{dx}=\int\!\!\int\!\!\int\left\{\frac{d\left(\frac{x'-x}{\rho^3}\right)}{dx'}\,\alpha'+\frac{d\left(\frac{x'-x}{\rho^3}\right)}{dy'}\,\beta'+\frac{d\left(\frac{x'-x}{\rho^3}\right)}{dz'}\,\gamma'\right\}k'\,dx'\,dy'\,dz'.$$

Avendo noi a prendere il valore di $\frac{dQ}{dx}$ esteso al solo elemento v, potremo considerare i valori di α', β', γ', k' come costanti ed eguali a quelli corrispondenti al punto M, rappresentate da α, β, γ e k. Eseguendo allora un' integrazione su ciascun termine, otterremo

$$\frac{dQ}{dx}=\int\!\!\int(\alpha\cos l+\beta\cos m+\gamma\cos n)\,\frac{x'-x}{\rho^3}\,k\,d\omega\;;$$

indicando con l, m, n gli angoli che la parte esterna della normale alla superficie di v nel punto $(x\,y\,z)$ fa coi tre assi, e con $d\omega$ l' elemento della stessa superficie.

La forma dell' elemento v essendo arbitraria, consideriamolo sferico col centro in M, allora si avrà

$$x'-x=\rho\cos l\,,\quad y'-y=\rho\cos m\,,\quad z'-z=\rho\cos n\,.$$

Di più chiamando ϖ l' angolo che la projezione del raggio ρ sul piano delle y, z fa coll' asse delle z, si avrà

$$\cos m=\sin l\sin\varpi\,,\quad \cos n=\sin l\sin\varpi\,,$$
$$d\omega=\rho^2\sin l\,d l\,d\omega\,,$$

quindi l' integrale esteso a tutta la superficie della sfera sarà dato da

$$\frac{dQ}{dx}=k\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\left(\alpha\cos l+\beta\sin l\sin\varpi+\gamma\sin l\cos\varpi\right)\cos l\sin l\,dl\,d\varpi\,;$$

ed integrando, da

$$\frac{dQ_{\prime}}{dx}=\frac{4\pi}{3}\,k\alpha\,,$$

indicando coll' indice $'$, posto in basso alla Q, il valore di Q esteso al solo elemento v.

Nello stesso modo si troverebbe

$$\frac{dQ_{\prime}}{dy}=\frac{4\pi}{3}\,k\beta\,,\quad \frac{dQ_{\prime}}{dz}=\frac{4\pi}{3}\,k\gamma\,.$$

Dunque per escludere i termini corrispondenti all' azione di v, dalle espressioni di $\frac{dQ}{dx}$, $\frac{dQ}{dy}$, $\frac{dQ}{dz}$ le quali, prese con segno contrario, rappresentano l'azione del corpo A sopra il punto M nell' elemento v, dovremo prendere

$$(4)\quad \frac{dQ'}{dx}=\frac{dQ}{dx}-\frac{4\pi}{3}k\alpha\,;\quad \frac{dQ'}{dy}=\frac{dQ}{dy}-\frac{4\pi}{3}k\beta\,;\quad \frac{dQ'}{dz}=\frac{dQ}{dz}-\frac{4\pi}{3}k\gamma\,;$$

continuando a rappresentare con $\frac{dQ}{dx}$, $\frac{dQ}{dy}$, $\frac{dQ}{dz}$ le quantità che essi dinotano nelle equazioni (3).

Chiamiamo V la somma dei potenziali di tutti gli strati elettrici sulle superficie dei corpi conduttori distribuiti nell' in-

terno del corpo dielettrico A, si avranno per le azioni di tutti questi strati sul punto M, le tre componenti

$$-\frac{dV}{dx}, \quad -\frac{dV}{dy}, \quad -\frac{dV}{dz}.$$

Aggiungendo a queste rispettivamente le forze

$$-\frac{dQ'}{dx}, \quad -\frac{dQ'}{dy}, \quad -\frac{dQ'}{dz}$$

che il corpo stesso dielettrico A, meno l'elemento v, esercita sul punto M, avremo per la totalità delle azioni esterne al detto elemento le tre forze

$$(5) \quad -\left(\frac{dV}{dx}+\frac{dQ'}{dx}\right); \quad -\left(\frac{dV}{dy}+\frac{dQ'}{dy}\right); \quad -\left(\frac{dV}{dz}+\frac{dQ'}{dz}\right).$$

Se il fluido elettrico situato nel punto M di questo elemento non cede all'azione di queste forze, ciò succede perchè prova un' azione opposta dalle atmosfere interne dell' elemento medesimo, e dalle attrazioni di tutte le molecole esistenti nei centri delle stesse atmosfere. Calcoliamo queste azioni.

Abbiamo visto che in ogni punto dell' elemento v provengono dalle azioni interne del medesimo tre forze medie acceleratrici, espresse da

$$(6) \qquad -\frac{4\pi}{3}k\alpha, \qquad -\frac{4\pi}{3}k\beta, \qquad -\frac{4\pi}{3}k\gamma.$$

L' elemento v non è tutto composto di fluido elettrico. La massa dell' elemento si compone di un numero grandissimo di atmosfere ciascuna delle quali ha una molecola ponderabile nel centro. Dinotiamo con f la forza d' attrazione dell' elettrico per la sostanza ponderabile di cui è formato il corpo A, riferita alla forza di repulsione dell' etere per se stesso, che abbiamo assunta per unità: queste forze essendo corrispondenti alle unità di massa e di distanza. Indicando con μ la massa di ciascuna delle molecole di v, i prodotti

$$+\frac{4\pi}{3}f\mu k\alpha, \qquad +\frac{4\pi}{3}f\mu k\beta, \qquad +\frac{4\pi}{3}f\mu k\gamma$$

rappresenteranno le forze motrici medie secondo i tre assi che provengono dall' azione interna dell' elemento su d' ogni sua molecola. Abbiamo dato a queste forze il segno $+$, perchè l' azione repulsiva fra l' elettrico si cambia in attrattiva fra la materia e l' elettrico, o sia cambia di segno.

Ora i centri di gravità o di masse di ciascuna molecola colla rispettiva atmosfera dovendo rimanere immobili, ed il corpo dielettrico non cambiando sensibilmente di forma e d' estensione, possiamo supporre, senza errore sensibile, le molecole rimaste rispettivamente al loro posto, e che le atmosfere abbiano risentito un' azione eguale e contraria proporzionalmente espressa dalle tre componenti

$$-\tfrac{4\pi}{3} f\mu k\alpha\ , \qquad -\tfrac{4\pi}{3} f\mu k\beta\ , \qquad -\tfrac{4\pi}{3} f\mu k\gamma\ .$$

Dividendo queste forze motrici per la massa dell' elettrico componente ciascuna atmosfera che indicheremo con ε, si avranno le forze acceleratrici medie provenienti da queste reazioni sopra l' atomo in M rappresentate da

$$-\tfrac{4\pi}{3} f\tfrac{\mu}{\varepsilon} k\alpha\ , \qquad -\tfrac{4\pi}{3} f\tfrac{\mu}{\varepsilon} k\beta\ , \qquad -\tfrac{4\pi}{3} f\tfrac{\mu}{\varepsilon} k\gamma\ ;$$

ed aggiungendo a queste forze acceleratrici quelle segnate (6), date sopra, che agiscono direttamente sullo stesso atomo elettrico, si avranno le somme delle forze acceleratrici medie dovute alle azioni dell' elemento v sopra il punto M, date da

$$-\left(\tfrac{4\pi}{3} f\tfrac{\mu}{\varepsilon} k\alpha + \tfrac{4\pi}{3} k\alpha\right);\ -\left(\tfrac{4\pi}{3} f\tfrac{\mu}{\varepsilon} k\beta + \tfrac{4\pi}{3} k\beta\right);\ -\left(\tfrac{4\pi}{3} f\tfrac{\mu}{\varepsilon} k\gamma + \tfrac{4\pi}{3} k\gamma\right):$$

e queste forze saranno quelle che dovranno opporsi e distruggere l' effetto di quelle, segnate (5), esercitate da tutti gli strati elettrici dei corpi conduttori, e da tutta la parte del corpo A esterna a v, onde l' atomo nel punto M rimanga in equilibrio. Si avranno quindi le equazioni

$$\frac{4\pi}{3} f \frac{\mu}{\varepsilon} k\alpha + \frac{4\pi}{3} k\alpha + \left(\frac{dV}{dx} + \frac{dQ'}{dx}\right) = 0$$

$$\frac{4\pi}{3} f \frac{\mu}{\varepsilon} k\beta + \frac{4\pi}{3} k\beta + \left(\frac{dV}{dy} + \frac{dQ'}{dy}\right) = 0$$

$$\frac{4\pi}{3} f \frac{\mu}{\varepsilon} k\gamma + \frac{4\pi}{3} k\gamma + \left(\frac{dV}{dz} + \frac{dQ'}{dz}\right) = 0\,;$$

o vero, sostituendo per $\frac{dQ'}{dx}$, $\frac{dQ'}{dy}$, $\frac{dQ'}{dz}$ i rispettivi valori segnati (4), ponendo per brevità

$$g = \frac{3\varepsilon}{4\pi f\mu}\,,$$

e riducendo,

$$k\alpha + g\left(\frac{dV}{dx} + \frac{dQ}{dx}\right) = 0$$

$$k\beta + g\left(\frac{dV}{dy} + \frac{dQ}{dy}\right) = 0$$

$$k\gamma + g\left(\frac{dV}{dz} + \frac{dQ}{dz}\right) = 0\,.$$

Prendasi una funzione φ di x, y, z data dall' equazione

$$(7) \qquad \varphi + V + Q = 0$$

avremo

$$k\alpha = g\frac{d\varphi}{dx}\,, \quad k\beta = g\frac{d\varphi}{dy}\,, \quad k\gamma = g\frac{d\varphi}{dz}$$

e colla sostituzione di queste espressioni il valore, superiormente dato, di Q diverrà

$$(8) \quad Q = \iiint g'\left(\frac{d\varphi'}{dx'}\frac{d\frac{1}{\rho}}{dx'} + \frac{d\varphi'}{dy'}\frac{d\frac{1}{\rho}}{dy'} + \frac{d\varphi'}{dz'}\frac{d\frac{1}{\rho}}{dz'}\right) dx'\, dy'\, dz'$$

nella quale espressione abbiamo dinotato con g' e φ' ciò che divengono g e φ pel cambiamento delle coordinate x, y, z in x', y', z'. Eliminando il valore di Q fra questa formola e la precedente (7), si otterrà un' equazione risultante che non conterrà altra funzione incognita che φ, e sarà atta a determinarla.

7. Per quest' oggetto consideriamo l' equilibrio dei punti interni ad A, così che le coordinate x, y, z appartengano ad un punto interno del corpo dielettrico; e dopo aver preso le

derivate parziali seconde dell' equazione (7) rispetto ad x, ad y e a z, sommiamole, ed esaminiamo l' equazione risultante

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2}+\frac{d^2\varphi}{dy^2}+\frac{d^2\varphi}{dz^2}+\frac{d^2V}{dx^2}+\frac{d^2V}{dy^2}+\frac{d^2V}{dz^2}+\frac{d^2Q}{dx^2}+\frac{d^2Q}{dy^2}+\frac{d^2Q}{dz^2}=0. \tag{9}$$

Gli strati elettrici, sulle superficie dei corpi conduttori, dai cui punti come centri emanano le forze corrispondenti al potenziale V, essendo esterni al corpo A, entro il quale si suppone situato il punto x, y, z, si avrà per le note proprietà della funzione V

$$\frac{d^2V}{dx^2}+\frac{d^2V}{dy^2}+\frac{d^2V}{dz^2}=0.$$

Vediamo anche a che si riduce la somma delle tre derivate seconde della funzione Q. Coll'integrazione per parti potremo primieramente dare al valore di Q, espresso dalla formola (8), la forma

$$Q=\int\int\left(\frac{d\varphi'}{dx'}\cos l+\frac{d\varphi'}{dy'}\cos m+\frac{d\varphi'}{dz'}\cos n\right)g'\frac{d\omega}{\rho}-R,$$

essendo

$$R=\int\int\int\left(\frac{dg'\frac{d\varphi'}{dx'}}{dx'}+\frac{dg'\frac{d\varphi'}{dy'}}{dy'}+\frac{dg'\frac{d\varphi'}{dz'}}{dz'}\right)\frac{dx'\,dy'\,dz'}{\rho};$$

le lettere l, m, n indicano, come precedentemente, gli angoli che la normale all' elemento $d\omega$ della superficie del corpo dielettrico fa coi tre assi.

Prendendo ora le derivate seconde della nuova espressione di Q successivamente rispetto alle tre coordinate x, y, z e sommandole, si vedrà che rimane semplicemente

$$\frac{d^2Q}{dx^2}+\frac{d^2Q}{dy^2}+\frac{d^2Q}{dz^2}=-\left(\frac{d^2R}{dx^2}+\frac{d^2R}{dy^2}+\frac{d^2R}{dz^2}\right),$$

pel motivo che il punto x, y, z non facendo parte della superficie di A si ha costantemente

$$\frac{d^2\frac{1}{\rho}}{dx^2}+\frac{d^2\frac{1}{\rho}}{dy^2}+\frac{d^2\frac{1}{\rho}}{dz^2}=0.$$

Il secondo membro della precedente equazione non si riduce eguale a zero, perchè il punto x, y, z essendo interno, il valore di ρ passa per zero; ma secondo è stato dimostrato più volte da parecchi autori (*), si ha

$$\frac{d^2 R}{dx^2} + \frac{d^2 R}{dy^2} + \frac{d^2 R}{dz^2} = -4\pi \left(\frac{dg \frac{d\varphi}{dx}}{dx} + \frac{dg \frac{d\varphi}{dy}}{dy} + \frac{dg \frac{d\varphi}{dz}}{dz} \right).$$

L' equazione (9) potrà dunque essere ridotta a

$$\frac{d^2 \varphi}{dx^2} + \frac{d^2 \varphi}{dy^2} + \frac{d^2 \varphi}{dz^2} + 4\pi \left(\frac{dg \frac{d\varphi}{dx}}{dx} + \frac{dg \frac{d\varphi}{dy}}{dy} + \frac{dg \frac{d\varphi}{dz}}{dz} \right) = 0$$

che dovrà sussistere per tutti i punti interni del corpo dielettrico.

Se questo corpo è omogeneo, talchè il rapporto $\frac{f\mu}{\varepsilon}$, e quindi anche g' rimanga costante in tutta la sua estensione, la precedente equazione si ridurrà a

$$(10) \qquad \frac{d^2 \varphi}{dx^2} + \frac{d^2 \varphi}{dy^2} + \frac{d^2 \varphi}{dz^2} = 0,$$

che sarà l' equazione alla quale dovrà soddisfare la funzione φ, affinchè sussista l' equilibrio elettrico di tutte le parti interne di A.

In questo caso il valore di R si ridurrà pure a zero, e si avrà semplicemente

$$(11) \qquad Q = g \iint \left(\frac{d\varphi'}{dx'} \cos l + \frac{d\varphi'}{dy'} \cos m + \frac{d\varphi'}{dz'} \cos n \right) \frac{d\omega}{\rho}.$$

Chiamando ϖ l' angolo che la parte esterna della normale fa col raggio r' prolungato esternamente, è dimostrato che si ha

$$\cos \varpi \, d\omega = r'^2 \sin \theta' \, d\theta' \, d\psi',$$

r', θ' e ψ' dinotando le coordinate polari del punto M. Se quindi si pone

$$(12) \qquad E' \cos \varpi = g \left(\frac{d\varphi'}{dx'} \cos l + \frac{d\varphi'}{dy'} \cos m + \frac{d\varphi'}{dz'} \cos n \right),$$

(*) Vedasi l' elegante dimostrazione di questa proposizione all' art. 7 della Memoria di Poisson, colla quale abbiamo dato le mosse per quest' analisi.

il valore di Q potrà mettersi sotto la forma

$$(13) \qquad Q = \iint \frac{E' r'^2 \sin\theta' \, d\theta' \, d\psi'}{\rho} .$$

Se si confronta questa formola con quella nota che dà il valore del potenziale di uno strato elettrico della grossezza y', la quale è

$$\iint \frac{y' r'^2 \sin\theta' \, d\theta' \, d\psi'}{\rho'} ,$$

si vede che l'azione del corpo dielettrico, somministrata dal potenziale Q, equivale a quella di uno strato di fluido, in eccesso od in difetto rispetto al fluido naturale, la cui grossezza nella direzione del raggio r' sia data dal valore di E, che si deduce dall'equazione (12). « Questo non implica già « la necessità che questo strato elettrico positivo o negativo « esista di fatto sulla superficie » del corpo dielettrico, come esiste realmente nel caso dei corpi conduttori » : soltanto ci dice che « la polarizzazione elettrica delle atmosfere moleco- « lari, in tutta l'estensione del corpo A, si conforma in modo « che » le azioni che emanano da tutte queste atmosfere « sono equivalenti a quella dello strato suddetto. »

§. III.

Teoremi principali sull' influenza che l' induzione molecolare dell' ambiente dielettrico ha nella distribuzione dell' elettricità alla superficie di più corpi conduttori in presenza gli uni degli altri.

8. Passiamo a considerare l' equilibrio dell' elettrico nell' interno od alla superficie dei corpi conduttori immersi nel corpo dielettrico A, od in contatto con esso. I punti compresi in questi corpi essendo tutti esterni al corpo dielettrico ne segue che, ritenute le denominazioni precedenti, l' equazione per la sussistenza dell' equilibrio del fluido elettrico situato in essi, sarà, come è noto, semplicemente

$$\mathrm{V} + \mathrm{Q} = \text{costante}.$$

Per fissare le idee supponiamo che più corpi conduttori siano sparsi in un ampio recinto ripieno d' aria e terminato tutt' all' intorno da pareti di materia conduttrice in comunicazione col suolo. In questo caso dinotando con $y'_1, y'_2 \ldots y'_n$ le grossezze variabili in un punto qualunque (*) dei rispettivi strati di fluido elettrico esistenti sulle superficie dei corpi conduttori, y_i essendo quella corrispondente alla superficie interna delle pareti del recinto, il valore di V sarà dato dalla formola

$$\mathrm{V} = \iint \frac{1}{\rho_1} y'_1 \, r'^2_1 \sin\theta' \, d\theta' \, d\psi' + \iint \frac{1}{\rho_2} y'_2 \, r'_2 \sin\theta' \, d\theta' \, d\psi'$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots + \iint \frac{1}{\rho_i} y'_i \, r'_i \sin\theta' \, d\theta' \, d\psi' .$$

Il valore di Q dovrà dedursi dalla formola (8), supponendo che, nell' eseguire le prime integrazioni de' suoi tre termini rispetto alle corrispondenti coordinate, l' integrale sia esteso a tutte le superficie che limitano il corpo dielettrico. Per ciò fare converrà, ogni volta che si viene ad incontrare sulle direzioni delle coordinate un corpo conduttore, interrompere l' integrale, sospendendolo col porre il suo valore al primo limite, per poi riprenderlo di segno contrario col valore che gli compete all' altro limite, dove l' ordinata sorte dal corpo al punto opposto. Da ciò si vede che il valore di Q verrà a comporsi di tante parti quante sono le superficie dei corpi nell' interno dell' ambiente, oltre quella dovuta ai limiti più lontani delle pareti del recinto. Se dunque facciamo uso delle riduzioni e denominazioni impiegate nelle formole (11), (12), (13), e distinguiamo con $E'_1, E'_2 \ldots E'_i$, i valori di E' corrispondenti ad un punto qualunque delle successive superficie limiti, il valore di Q si troverà rappresentato da

(*) Noi impieghiamo qui il termine di grossezza secondo l' uso dei Fisici, ma è chiaro che si deve intendere il prodotto della profondità dello strato nella direzione del raggio r' per la densità, o sia una quantità proporzionale alla massa dello strato nello stesso punto divisa pel coseno dell' angolo che la verticale ed il raggio r' prolungati esteriormente fanno fra loro.

$$Q = \iint \frac{1}{\rho_1} E'_1\, r'^2_1 \sin\theta' d\theta' d\psi' + \iint \frac{1}{\rho_2} E'_2\, r'^2_2 \sin\theta'\, d\theta'\, d\psi' \quad (14)$$
$$\ldots\ldots\ldots + \iint \frac{1}{\rho_n} E'_i\, r'^2_i \sin\theta'\, d\theta'\, d\psi' :$$

gli integrali essendo presi rispettivamente in tutta l'estensione di ciascuna delle superficie del corpo dielettrico contigue ai corpi conduttori.

Rigorosamente parlando la dimostrazione che abbiamo dato dell'espressione di Q non appartiene che ai punti situati nell' interno del corpo dielettrico, nè apparisce evidente se sia estensibile anche ai punti contigui alle superficie del medesimo. Ma si può osservare che il valore di Q dato dalla formola (13) non differirebbe di una quantità sensibile ancorchè si prescindesse dall'estendere l' integrale (11) sino a comprendere anche l' ultimo strato in cui termina la superficie del corpo dielettrico; perchè il valore di φ', come potrà riconoscersi in seguito, varia pure in un modo continuo presso le superficie dei corpi conduttori nei casi che contempliamo, che sono quelli nei quali queste non presentino degli spigoli vivi.

L'equazione per l'equilibrio del fluido elettrico nei punti interni dei corpi conduttori prenderà dunque la forma

$$\iint \frac{1}{\rho_1} y'_1\, r'^2_1 \sin\theta'\, d\theta'\, d\psi' + \iint \frac{1}{\rho_2} y'_2\, r'^2_2 \sin\theta'\, d\theta'\, d\psi'$$
$$\ldots\ldots\ldots + \iint \frac{1}{\rho_i} y'_i\, r'^2_i \sin\theta'\, d\theta'\, d\psi'$$
$$+ \iint \frac{1}{\rho_1} E_1'\, r'^2_1 \sin\theta'\, d\theta'\, d\psi' + \iint \frac{1}{\rho_2} E'_2\, r'^2_2 \sin\theta'\, d\theta'\, d\psi' \quad (15)$$
$$\ldots\ldots\ldots + \iint \frac{1}{\rho_i} E'_i\, r'^2_i \sin\theta'\, d\theta'\, d\psi' = \text{costante}:$$

la quale differisce da quella che hanno usato finora i Geometri per l' aggiunta di tutti i termini dipendenti da $E'_1, E'_2, \ldots E'_i$, dovuti all' azione del corpo dielettrico.

9. Esaminiamo le proprietà di queste quantità $E'_1, E'_2, \ldots E'_i$, e dei termini che esse introducono nell'equazione precedente.

Per quest' oggetto riassumiamo l' equazione (10)

$$\frac{d^2\phi}{dx'^2}+\frac{d^2\phi}{dy'^2}+\frac{d^2\phi}{dz'^2}=0,$$

e dopo averle dato il fattore $dx'\,dy'\,dz'$ prendiamone l' integrale esteso a tutto il corpo dielettrico. Sarà facile di verificare colle riduzioni colle quali abbiamo ottenuto la formola (11), che quest' integrale prenderà la forma

$$\iint\left(\frac{d\phi'_1}{dx'}\cos l_1+\frac{d\phi'_1}{dy'}\cos m_1+\frac{d\phi'_1}{dz'}\cos n_1\right)d\omega_1$$

$$+\iint\left(\frac{d\phi'_2}{dx'}\cos l_2+\frac{d\phi'_2}{dy'}\cos m_2+\frac{d\phi'_2}{dz'}\cos n_2\right)d\omega_2$$

$$\vdots$$

$$+\iint\left(\frac{d\phi'_n}{dx'}\cos l_i+\frac{d\phi'_n}{dy'}\cos m_i+\frac{d\phi'_n}{dz'}\cos n_i\right)d\omega_i=0;$$

o vero, facendo uso delle espressioni di E'_1, E'_2, ... E'_i,

$$\iint E'_1 r'^2_1\sin\theta' d\theta' d\psi'+\iint E'_2 r'^2_2\sin\theta' d\theta' d\psi'\ldots+\iint E'_i r'^2_i\sin\theta' d\theta' d\psi'=0.$$

Ora si riconosce subito che questa somma equivale a quella dell'elettricità libere che bisognerebbe impiegare per formare gli strati fittizj intorno alle superficie dei corpi elettrici, onde l' effetto di essi fosse equivalente a quella del corpo dielettrico in complesso. Dovremo dunque conchiudere che il corpo dielettrico ambiente opera come se si sviluppassero intorno alle dette superficie degli strati d' elettricità libera positivi e negativi, tali che la somma di tutte le loro elettricità fosse nulla, cioè che le elettricità positive eguagliassero le negative.

10. Consideriamo ora l'effetto operato dalle forze del corpo dielettrico. Moltiplichiamo l' equazione (15) per $\frac{1}{\rho}\,dx'\,dy'\,dz'$, e prendiamone ancora l' integrale esteso a tutto il corpo dielettrico. È facile il vedere che l' integrale

$$(16)\qquad \iiint\frac{1}{\rho}\left(\frac{d^2\phi'}{dx'^2}+\frac{d^2\phi'}{dy'^2}+\frac{d^2\phi'}{dz'^2}\right)dx'\,dy'\,dz'$$

si manterrà nullo anche quando fosse $\rho=0$, cioè anche quando il punto x', y', z' coincidesse col punto x, y, z. Infatti situiamo

il polo delle coordinate polari sul raggio r diretto a quest'ultimo punto, e dinotiamo con p il coseno dell'angolo che il raggio r' fa col raggio r, sarà

$$\rho = (r^2 - 2rr'p + r'^2)^{\frac{1}{2}}, \quad dx'\,dy'\,dz' = r'^2\,dr'\,d\psi'\,dp:$$

e l'integrale precedente ponendo per brevità

$$\Omega = \frac{d^2\varphi'}{dx'^2} + \frac{d^2\varphi'}{dy'^2} + \frac{d^2\varphi'}{dz'^2}$$

diverrà

$$\int\int\int \Omega\,(r^2 - 2rr'p + r'^2)^{-\frac{1}{2}}\,r'^2\,dr'\,d\psi'\,dp\,;$$

che con una integrazione per parti rispetto a p si trasforma nei due seguenti

$$\int\int \Omega\,(r^2-2rr'p+r'^2)^{\frac{1}{2}}\,\frac{r'}{r}\,dr'\,d\psi' - \int\int\int \frac{d\Omega}{dp}\,(r^2-2rr'p+r'^2)^{\frac{1}{2}}\,\frac{r'}{r}\,dr'\,d\psi'\,dp:$$

Quantità che non contiene più alcun fattore al denominatore che possa diventare infinito, e che perciò si conserverà costantemente eguale a zero, perchè Ω è una funzione identicamente nulla.

Poniamo dunque eguale a zero l'espressione (16), e con due integrazioni successive per parti, diamole la forma

$$\begin{aligned}
0 = &\int\int \frac{1}{\rho_1}\left(\frac{d\varphi'_1}{dx'}\cos l_1 + \frac{d\varphi'_1}{dy'}\cos m_1 + \frac{d\varphi'_1}{dz'}\cos n_1\right) d\omega_1 \\
&+ \int\int \frac{1}{\rho_2}\left(\frac{d\varphi'_2}{dx'}\cos l_2 + \frac{d\varphi'_2}{dy'}\cos m_2 + \frac{d\varphi'_2}{dz'}\cos n_2\right) d\omega_2 \\
&\vdots \\
&+ \int\int \frac{1}{\rho_n}\left(\frac{d\varphi'_n}{dx'}\cos l_i + \frac{d\varphi'_n}{dy'}\cos m_i + \frac{d\varphi'_n}{dz'}\cos n_i\right) d\omega_i \\
&- \int\int \varphi'_1\left(\frac{d\frac{1}{\rho_1}}{dx'}\cos l_1 + \frac{d\frac{1}{\rho_1}}{dy'}\cos m_1 + \frac{d\frac{1}{\rho_1}}{dz'}\cos n_1\right) d\omega_1 \\
&- \int\int \varphi'_2\left(\frac{d\frac{1}{\rho_2}}{dx'}\cos l_2 + \frac{d\frac{1}{\rho_2}}{dy'}\cos m_2 + \frac{d\frac{1}{\rho_2}}{dz'}\cos n_2\right) d\omega_2 \\
&\vdots \\
&- \int\int \varphi'_n\left(\frac{d\frac{1}{\rho_n}}{dx'}\cos l_i + \frac{d\frac{1}{\rho_n}}{dy'}\cos m_i + \frac{d\frac{1}{\rho_n}}{dz'}\cos n_i\right) d\omega_i \\
&+ \int\int\int \varphi'\left(\frac{d^2\frac{1}{\rho}}{dx'^2} + \frac{d^2\frac{1}{\rho}}{dy'^2} + \frac{d^2\frac{1}{\rho}}{dz'^2}\right) dx'\,dy'\,dz'\,.
\end{aligned}$$

Ora è noto che gli integrali duplicati preceduti dal segno negativo, come pure l'integrale triplicato di questa formola hanno un valor nullo tutte le volte che il valore di ρ non passa per zero, o che il punto M è esteriore al corpo dielettrico; che se il punto M si trova nell'interno del corpo dielettrico tanto gli uni che l'altro non ricevono altro valore che quello che proviene dall'elemento cui corrispondono le coordinate $x'=x$, $y'=y$, $z'=z$. Questa circostanza ci permette di considerare da per tutto $\bar{\varphi}$ costante: quindi eseguendo un' integrazione su ciascun termine dell' integrale triplicato rispettivamente ad x', y', z', e sostituendo agli elementi superficiali $dy'\,dz'$, $dz'\,dx'$, $dx'\,dy'$ i corrispondenti valori $\cos l\, d\omega$, $\cos m\, d\omega$, $\cos n\, d\omega$, si vede che si producono con segno positivo gli stessi integrali duplicati negativi che lo precedono, per cui rimarrà

$$\begin{aligned}
0 = &\iint \frac{1}{\rho_1}\left(\frac{d\bar{\varphi}'_1}{dx'}\cos l_1 + \frac{d\bar{\varphi}'_1}{dy'}\cos m_1 + \frac{d\bar{\varphi}'_1}{dz'}\cos n_1\right) d\omega_1 \\
&+\iint \frac{1}{\rho_2}\left(\frac{d\bar{\varphi}'_2}{dx'}\cos l_2 + \frac{d\bar{\varphi}'_2}{dy'}\cos m_2 + \frac{d\bar{\varphi}'_2}{dz'}\cos n_2\right) d\omega_2 \\
&\vdots \\
&+\iint \frac{1}{\rho_i}\left(\frac{d\bar{\varphi}'_i}{dx'}\cos l_i + \frac{d\bar{\varphi}'_i}{dy'}\cos m_i + \frac{d\bar{\varphi}'_i}{dz'}\cos n_i\right) d\omega_i :
\end{aligned}$$

o vero, introducendo per semplicità le quantità E_1, E_2 ... E_i, e trasformando le differenziali relative alle coordinate rettilinee nelle corrispondenti alle coordinate polari

$$\begin{aligned}
0 = \iint \frac{1}{\rho_1} E_1\, r'^2_1 \sin\theta'\, d\theta'\, d\psi' + \iint \frac{1}{\rho_2} E_2\, r'^2_2 \sin\theta'\, d\theta'\, d\psi' \\
\ldots\ldots\ldots + \iint \frac{1}{\rho_i} E_i\, r'^2_i \sin\theta'\, d\theta'\, d\psi' .
\end{aligned}$$

Questa formola confrontata colla (14) ci fa vedere che il potenziale Q, dal quale si deve dedurre l' azione del corpo dielettrico, è nullo, quando sia preso in tutta l'estensione del detto corpo, e che l' equazione (15) si riduce alla

$$\begin{aligned}
(17)\qquad \iint \frac{1}{\rho_1} y'_1\, r'^2_1 \sin\theta'\, d\theta'\, d\psi' + \iint \frac{1}{\rho_2} y'_2\, r'^2_2 \sin\theta'\, d\theta'\, d\psi' \\
\ldots\ldots\ldots + \iint \frac{1}{\rho_i} y'_i\, r'^2_i \sin\theta'\, d\theta'\, d\psi' = \text{cost.},
\end{aligned}$$

la quale è la medesima di quella di cui si fa uso quando si considera l'azione elettrica in distanza prescindendo dalla polarizzazione elettrica del corpo intermedio dielettrico, ciò che ci dà la conclusione principale della questione che ci eravamo proposti. Il corpo dielettrico per mezzo della polarizzazione delle atmosfere delle sue molecole, non fa altro che trasmettere dall'uno all'altro l'azione fra i corpi conduttori, neutralizzando l'azione sull'uno e trasportando sull'altro un' azione eguale a quella che avrebbe esercitato, in distanza, direttamente il primo. Abbiamo nell'equilibrio elettrico per l'interposizione dei corpi dielettrici un' imagine degli effetti delle forze passive esercitate dai corpi intermedj negli equilibrj meccanici, le quali introducono nell' equazione generale del principio delle velocità virtuali una somma di momenti che si annulla da se stessa, e lascia sussistere per l'equilibrio del sistema la sola somma dei momenti delle forze attive. Forse un calcolo analogo al precedente instituito colla considerazione delle forze molecolari di coesione e d'aggregazione fornirebbe un modo più diretto e più conforme alla vera natura dei corpi, per stabilire la celebre equazione del principio delle velocità virtuali.

11. Supponiamo che, colla risoluzione dell'equazione (17), si siano dedotti i valori delle grossezze $y_1, y_2 \ldots y_i$ degli strati elettrici in equilibrio sulla superficie dei corpi conduttori, queste grossezze essendo misurate nelle direzioni dei rispettivi raggi vettori. Ciascuno di questi strati sarà tale da neutralizzare l'azione elettrica degli altri strati sul fluido di un suo punto interno, ma eserciterà, come è noto, sugli atomi elettrici della sua superficie esterna una repulsione perpendicolare alla sua superficie, e proporzionale a $y_j \cos \varpi_j$. Onde sussista l'equilibrio per gli atomi di tutte le superficie esterne dei detti strati elettrici, converrà che nell' equazione (14) si verifichino separatamente le eguaglianze

$$(18)\qquad y_1 = -E_1\,,\quad y_2 = -E_2 \ldots\ldots y_i = -E_i\,;$$

il che ci dice che la polarizzazione delle atmosfere delle molecole del corpo dielettrico viene a farsi in modo, che si produce sulla superficie di ciascun corpo conduttore una forza eguale e contraria a quella, colla quale lo strato elettrico di questo corpo tende ad espellere gli atomi dalla sua superficie.

Se si introducono i valori particolari $y_1 \cos \varpi_1$, $y_2 \cos \varpi_2$, ... $y_i \cos \varpi_i$ delle grossezze degli strati, contate perpendicolarmente alle rispettive superficie dei corpi elettrici, nell' equazione generale (12) si avranno le seguenti

$$\frac{d\varphi_1}{dx'} \cos l_1 + \frac{d\varphi_1}{dy'} \cos m_1 + \frac{d\varphi_1}{dz'} \cos n_1 = - y_1 \cos \varpi_1$$

$$\frac{d\varphi_2}{dx'} \cos l_2 + \frac{d\varphi_2}{dy'} \cos m_2 + \frac{d\varphi_2}{dz'} \cos n_2 = - y_2 \cos \varpi_2$$

$$\vdots$$

$$\frac{d\varphi_i}{dx'} \cos l_i + \frac{d\varphi_i}{dy'} \cos m_i + \frac{d\varphi_i}{dz'} \cos n_i = - y_i \cos \varpi_i :$$

le quali equazioni serviranno a determinare le funzioni arbitrarie che l' integrazione dell' equazione (15) naturalmente introduce nell' espressione di φ.

12. Abbiamo dimostrato sopra che sussiste l' equazione

$$\int\int E_1 r'^2_1 \sin\theta' d\theta' d\psi' + \int\int E_2 r'^2_2 \sin\theta' d\theta' d\psi' \ldots + \int\int E_i r'^2_i \sin\theta' d\theta' d\psi' = 0,$$

si avrà dunque parimenti, in virtù delle eguaglianze (18),

$$\int\int y_1 r'^2_1 \sin\theta' d\theta' d\psi' + \int\int y_2 r'^2_2 \sin\theta' d\theta' d\psi' \ldots + \int\int y_i r'^2_i \sin\theta' d\theta' d\psi' = 0$$

l' ultimo termine essendo quello corrispondente alla superficie interna delle pareti del recinto in comunicazione col suolo.

Quest' equazione ci mostra che la somma delle elettricità libere, positive o negative esistenti sulle superficie conduttrici dei corpi del sistema, è nulla; e quindi che l' equilibrio si costituisce sempre in modo che se i corpi interni isolati contengono una certa quantità d' elettricità libera, positiva o negativa, un' eguale quantità d' elettricità è scacciata nel suolo dalle pareti del recinto o richiamata dal suolo sulle medesime. Questo principio è stato avvertito la prima volta dal Professore Cav. Amedeo Avogadro.

SULLA STABILITÀ
E L'EQUILIBRIO DI UN TERRAPIENO.

MEMORIA

DEL CAVALIER PROFESSORE

ANTONIO BORDONI

SOCIO ATTUALE

Ricevuta il 26 *Dicembre* 1846.

Sebbene sulla stabilità ed equilibrio dei terrapieni vi siano pubblicati lavori dei Coulomb, Prony, Français, Navier, Coriolis, Mayniel e d'altri, non ostante io mi sono determinato a pubblicare questa Memoria, essendovi in essa trattate nuove quistioni interessanti e le già note generalizzate, siccome convengono talvolta nella pratica.

In essa io chiamerò, generalmente: *terrapieno* un corpo di terra, che abbia almeno due faccie piane voltate l'una in alto e l'altra da una banda e la retta comune ad esse orizzontale, e due altre faccie piane e perpendicolari a questa retta e distanti l'una dall'altra di *una unità*: *porzione ordinaria* o semplicemente *porzione* di esso medesimo una di quelle separate dalla rimanente con un piano segante le prime due sue faccie secondo rette anch' esse orizzontali, per cui sarà dessa un prisma triangolare retto: ed anco chiamerò, *faccia superiore* del terrapieno la prima delle quattro anzidette, *scarpa* di esso la seconda, *ciglio* la retta ad esse comune; *base* di una sua porzione ordinaria quella faccia di essa medesima, che sarà comune colla rimanente parte del terrapieno: *inclinazione* della scarpa del terrapieno e in generale di una superficie piana qualunque, l'angolo dietro da esso fatto coll'

orizzonte; e *larghezza* di una scarpa sia del terrapieno intero sia di una sua porzione la distanza degli estremi orizzontali di essa medesima. Ed avrò di mira la stabilità e l' equilibrio di una qualunque porzione ordinaria a seconda della base di essa, cioè le proprietà necessarie affinchè non isdruccioli nè in giù nè in su lungo la base stessa, avendo riguardo al *peso*, all' *attrito*, ed alla *tenacità* delle terre, a seconda della stessa sua base, ed anco ad una estranea *pressione*, che può essere esercitata contro la scarpa del terrapieno; dimodochè, dichiarando stabile ovvero in equilibrio una porzione del terrapieno, sottintenderò sempre sulla base di essa, cioè che per farla scorrere o sdrucciolare al basso od in alto lungo la base stessa, secondo che contemplerò la stabilità o l'equilibrio per un verso o per l' altro, occorrerà nel caso della stabilità una causa *finita* e nel caso dell'equilibrio basterà anco una causa *tenuissima*. E per evitare la confusione contemplerò in paragrafi successivi; *primo* la stabilità e l' equilibrio di una porzione del terrapieno avente la inclinazione della scarpa *data*; *secondo* le inclinazioni sì della scarpa del terrapieno che della base di una sua porzione necessarie per la stabilità e l' equilibrio di essa; *terzo* la grandezza della pressione o spinta esercitata da un piano appoggiato alla scarpa del terrapieno, contro del terrapieno medesimo, onde impedire alle sue porzioni di sdrucciolare in basso sulle rispettive basi; *quarto* la grandezza della spinta del piano stesso, affinchè nessuna porzione del terrapieno sdruccioli in su sulla sua base; *quinto* finalmente contemplerò le spinte analoghe a queste ultime due per terrapieni a circostanze non ordinarie: in maniera che si potrà essa ritenere una estensione alla seconda parte del mio trattato degli Argini di terra.

I.

Accade più volte, che si debba scavare della terra ovvero ammonticchiarla in modo, che le sponde dello scavo o

le parti laterali del mucchio debbano essere altrettanti terrapieni colle scarpe di inclinazioni *date*; in queste circostanze riesciranno utili le proprietà, che si espongono in questo paragrafo, potendosi prevedere con esse, se le porzioni di tali terrapieni saranno per riescire stabili tutte, ovvero alcune stabili ed altre in equilibrio, o in pericolo di sdrucciolare in basso sulle rispettive basi.

Le rette BA.., BC.., AC (fig. 1) rappresentino ordinatamente i profili della scarpa del terrapieno, della sua faccia superiore, e di una sezione fatta ad esso con un piano parallelo al suo spigolo o ciglio in B: la ADE... una verticale, e la BD il prolungamento della CB. E si chiamino: m, n, u, x, $x_1 = n - x$ gli angoli BAD, CBF, BDE, BAC, ACB: f il così detto coefficiente d'attrito della terra, r l'angolo di cotangente f; t la tenacità per una unità superficiale di essa, e p il peso di una unità di volume di essa medesima: y la retta AB larghezza della scarpa, ed F la forza ad applicarsi a questa porzione del terrapieno parallelamente alla AC base di essa e diretta da C verso A, per ridurre la medesima porzione nello stato prossimo al moto ossia in equilibrio, pel verso CA, cioè la così detta stabilità ordinaria di essa medesima.

Essendo

$$F = AC \,.\, t + f P \operatorname{sen}.(m+x) - P \cos.(m+x),$$

e però

$$F = AC \,.\, t - \frac{P}{\operatorname{sen}.y} \operatorname{sen}.(a-x),$$

dove $a = r - m$, $AC = y \frac{\operatorname{sen}.n}{\operatorname{sen}.x_1}$, e $P = \frac{1}{2} p \,.\, AC \,.\, AB \operatorname{sen}.x$,

sarà

$$F = \frac{p \operatorname{sen}.n}{2 \operatorname{sen}.r \operatorname{sen}.x_1} \left(\frac{2 t \operatorname{sen}.r}{p} y - y^2 \operatorname{sen}.x \operatorname{sen}.(a-x) \right).$$

Visibilmente, per essere $r - m = 90^\circ - m - (90^\circ - r)$, a esprime la differenza tra la inclinazione della scarpa del terrapieno e quella della scarpa naturale della terra avuto riguardo solamente al peso ed all'attrito di essa.

Con questa espressione della F si potranno determinare le stabilità delle varie porzioni del terrapieno col solo attribuire all' x ed alla y, che sono variabili ed indipendenti, i valori corrispondenti alle porzioni stesse; ed anco manifestare proprietà relative alla stabilità ed all' equilibrio di alcune di esse medesime: per esempio, fra le porzioni aventi le basi *egualmente* inclinate e però parallele l' una all' altra, quella per cui la y soddisfa la equazione $F'_x = 0$ cioè la

$$(1) \qquad \frac{b}{2} - 2y \operatorname{sen}.x \operatorname{sen}.(\alpha - x) = 0 ,$$

dove $b = \frac{4t}{p} \operatorname{sen}.r$, avrà la massima stabilità; giacchè la F''_x, eguagliando

$$-\frac{p \operatorname{sen}.n \operatorname{sen}.x}{\operatorname{sen}.r \operatorname{sen}.x_1} \operatorname{sen}.(\alpha - x) ,$$

è *negativa*; e la stessa massima stabilità sarà

$$t^2 \operatorname{sen}.n \operatorname{sen}.r : 2p \operatorname{sen}.x_1 \operatorname{sen}.x \operatorname{sen}.(\alpha - x) .$$

Ma le proprietà più interessanti, che si possono desumere dalla esposta espressione della F, sono quelle relative ai valori della y e dell' x, che rendono la medesima F *positiva*, o *nulla*, o *negativa*, le quali dipendono visibilmente dal segno del suo fattore

$$\frac{2b}{y} - \operatorname{sen}.x \operatorname{sen}.(\alpha - x) ,$$

ovvero del

$$\frac{b}{y} + \cos.\alpha - \cos.\mu ,$$

dove $\mu = \alpha - 2x$; o dall' essere

$$(2) \qquad \frac{b}{y} + \cos.\alpha = \cos.\mu .$$

Siccome queste condizioni sono visibilmente indipendenti dall' angolo n, così le proprietà, che si desumeranno da esse, sussisteranno qualunque sia quest' angolo.

Parlerò di queste proprietà, cominciando colle relative alla F *nulla*, cioè ammettendo la equazione (2), la quale

stabilisce una relazione tra le variabili x, y, che dà in generale per ogni valore della y due valori pell' x; giacchè, se

$$\frac{b}{y} + \cos . \alpha$$

sia il coseno di un angolo μ, lo sarà anco del $-\mu$, per cui alla stessa y corrisponderà

$$\text{tanto } \alpha - 2x = \mu \text{ quanto } \alpha - 2x = -\mu$$

cioè $x = \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2}\mu$ ovvero $x = \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\mu$.

Visibilmente, i lati non comuni di questi due angoli valori dell' x comprenderanno un angolo, che sarà diviso pel mezzo dalla retta facente colla AB l'angolo eguale all' $\frac{\alpha}{2}$, qualunque sia la y.

Siccome all' $x = \frac{\alpha}{2}$ ossia al $\mu = 0$ corrisponde il massimo valore di $\cos . \mu$, secondo membro della equazione (2), e però anco il massimo del binomio

$$\frac{b}{y} + \cos . \alpha$$

primo membro di essa, e conseguentemente il minimo della variabile y; così per questo valore della y, che si chiamerà y_1, si avrà la equazione

$$\frac{b}{y_1} + \cos . \alpha = 1 ,$$

la quale somministra

$$y_1 = \frac{b}{1 - \cos . \alpha} \quad \text{ossia} \quad y_1 = \frac{b}{2\text{sen}^2 . \frac{\alpha}{2}} ,$$

vale a dire il minimo valore della y fra i soddisfacenti la equazione (2).

Per ogni altro valore dell' x, essendo $\cos . \mu < 1$, si avrà

$$\frac{b}{y_1} + \cos . \alpha > \cos \mu ,$$

e conseguentemente la F *positiva*.

Così, per la y *minore* della y_1, essendo

$$\frac{b}{y} + \cos . \alpha > 1 ,$$

molto più sarà

$$\frac{b}{y} + \cos.\alpha > \cos.\mu;$$

e però la F corrispondente sarà pure *positiva*, qualunque sia l'angolo x.

E per la y *maggiore* della y_1, essendo

$$\frac{b}{y} + \cos.\alpha < 1,$$

vi saranno due angoli μ_1, valori del μ, eguali in grandezza, che soddisfaranno la equazione (2); per cui le F corrispondenti ad uno qualunque di questi valori della y e all' x *eguale* all' $\frac{\alpha}{2} - \frac{\mu_1}{2}$ ovvero all' $x = \frac{\alpha}{2} + \frac{\mu_1}{2}$ saranno *nulli*.

Si chiamino x_1, x_2, x_3 tre qualsivogliono valori dell' x, il primo fra i minori dell' $\frac{\alpha}{2} - \frac{\mu_1}{2}$, il secondo fra i maggiori di questo e minori dell' $\frac{\alpha}{2} - \frac{\mu_1}{2}$, ed il terzo fra i maggiori di quest' ultimo.

Essendo

$$x_1 < \frac{\alpha}{2} - \frac{\mu_1}{2} \quad \text{ed} \quad x_3 > \frac{\alpha}{2} + \frac{\mu_1}{2},$$

ossia μ_1 minore sì di $\alpha - 2x_1$ che di $2x_3 - \alpha$, il $\cos.\mu_1$ sarà maggiore

tanto del $\cos.(\alpha - 2x_1)$ quanto del $\cos.(2x_3 - \alpha)$;

e conseguentemente i valori della F corrispondenti all' $x - x_1$ ed all' $x = x_3$ saranno *positivi*.

In ultimo, per x_2 maggiore di $\frac{\alpha}{2} - \frac{\mu_1}{2}$ e minore di $\frac{\alpha}{2} + \frac{\mu_1}{2}$, ossia di μ maggiore sì dell' $\alpha - 2x_2$ che del $2x_2 - \alpha$, epperò del $\cos.\mu_1$ minore

tanto del $\cos.(\alpha - 2x_2)$ quanto del $\cos.(2x_2 - \alpha)$

sarà

$$\frac{b}{y} + \cos.\alpha < \cos.(\alpha - 2x_2),$$

cioè la F *negativa*.

Applicando tutte queste conclusioni alla quistione concreta di cui si parla risultano che: tutte le porzioni del

terrapieno corrispondenti ai valori della y *minori* della y_1 sono *stabili*: tutte quelle corrispondenti alla stessa y_1 sono anch' esse stabili, eccettuata quella la cui base fa colla scarpa l'angolo $\frac{\alpha}{2}$ cioè una metà di quello, che sarebbe fatto dalla scarpa naturale della terra senza tenacità: e quelle corrispondenti alle y *maggiori* della medesima y_1 sono *stabili*, se gli angoli x ad esse corrispondenti siano o minori dell' $\frac{\alpha}{2} - \frac{\mu_1}{2}$, ovvero maggiori dell' $\frac{\alpha}{2} + \frac{\mu_1}{2}$; in equilibrio, se i corrispondenti angoli x siano questi ultimi due; e sdruccioleranno in basso lungo le basi rispettive, se queste basi cadranno fra quelle delle due porzioni in equilibrio; ed il numero di queste porzioni crescerà coll' allungarsi della y. In ultimo dai valori della y, che soddisfanno le equazioni (1), (2) risulta, che fra le moltiplici porzioni di un terrapieno aventi le basi loro egualmente inclinate, come lo è quella di una porzione di esso appena in equilibrio, la più stabile ha la larghezza della scarpa eguale ad una metà di quella di quest' ultima medesima.

Nel caso della y differente dal suo valore y_1 sopra trovato possono interessare quelle due porzioni del terrapieno, che sono l'una meno stabile e l'altra soggetta a sdrucciolare sulle rispettive basi più di ogni altra; e perciò osservisi, che la F eguagliando la quantità

$$\frac{1}{4}\,\frac{\text{sen}\,.\,n}{\text{sen}\,.\,r}\,py^2,$$

positiva e costante per tutte le porzioni, moltiplicata per la

$$\left(\frac{b}{y} + \cos.\alpha - \cos.(\alpha - 2x)\right) : \text{sen}\,.\,(n-x),$$

la porzione interessante corrisponderà all' x, che renderà minima quest' ultima quantità cioè all' x, che soddisfa la equazione seguente

$$2\,\text{sen}\,.\,c\,\text{tang}^3.(n-x) + \left(2\cos.c - \frac{b}{y}\right)\text{tang}^2.(n-x) + \frac{b}{y} = 0,$$

dove $c = 2n - \alpha$, la quale si ottiene eguagliando a *zero* la derivata presa rispetto all' x di questa medesima quantità.

Le basi di quelle porzioni del terrapieno, che sono appena in equilibrio, sono tutte in rette tangenti di quella parabola conica, che ha il fuoco in B, l' asse nella retta GBH facente l'angolo GBA$=\alpha$ ovvero il DBG$=n+m-r$, cioè *parallelo* alla scarpa naturale per la terra prescindendo dalla tenacità di essa, ed il vertice nel punto H distante dal B di $\frac{1}{2}b$, e però per parametro ordinario $2b$; e siccome questa proprietà può facilitare la conoscenza delle basi stesse, così passo a dimostrarla.

La retta AC rappresenti la direzione di una qualunque di queste basi cioè di una delle due passanti per A e che soddisfanno la equazione (2); e riferita agli assi BA, BC, siano q, s le coordinate di un suo punto qualunque.

Siccome è BA$=y$, e BC$=\frac{\text{sen}.x}{\text{sen}.(n-x)}y$;

così la equazione della retta AC sarà

$$q\,\text{sen}.x+s\,\text{sen}.(n-x)=y\,\text{sen}.x,$$

la quale per la (2) si riduce

$$q\,\text{sen}.x\,\text{sen}.(\alpha-x)+s\,\text{sen}.(n-x)\,\text{sen}.(\alpha-x)=\frac{b}{2},$$

e però alla seguente

$$(3)\qquad q\cos.\mu-s\,\text{sen}.(n+\mu)=q\cos.\alpha-s\cos.(n-\alpha)+b:$$

e questa rappresenterà la famiglia delle rette, nelle quali vi saranno le basi di cui si parla, purchè l'x esprima il parametro *arbitrario*.

E pertanto la equazione tra le q, s coordinate della curva toccata da queste rette si otterrà, eliminando l' x dalla (3) mediante la

$$(4)\qquad q\,\text{sen}.\mu-s\,\text{sen}.(n+\mu)=0$$

data dalla sua derivata rispetto all'x medesimo.

Quadrando i membri di queste due equazioni, e sommando i corrispondenti delle due risultanti, se ne ottiene una senza l' x, ed è visibilmente la seguente

$$q^2-2sq\cos.n+s^2=q^2\cos.^2\alpha-2sq\cos.\alpha\cos.(n-\alpha)+s^2\cos.^2(n-\alpha)$$
$$+2[q\cos.\alpha-s\cos.(n-\alpha)]\,b+b^2,$$

ossia

$$(5)\qquad [q\,\mathrm{sen}.\alpha+s\,\mathrm{sen}.(n-\alpha)]^2=2b[q\cos.\alpha-s\cos.(n-\alpha)]+b^2,$$

la quale rappresenta manifestamente una parabola conica.

Siano, M un punto qualunque di questa parabola, la Mq retta parallela alla BC, e le MP, aq perpendicolari alla BG: sarà $Bq=q$, ed $Mq=s$.

E per essere

$$BP=Ba-Pa=Bq\cos.ABG-Mq\cos.DBG,$$

$$\text{ed}\ MP=q\,\mathrm{sen}.ABG+Mq\,\mathrm{sen}.DBG,$$

e però

$$BP=q\cos.\alpha-s\cos.(n-\alpha),$$

$$\text{ed}\ MP=q\,\mathrm{sen}.\alpha+s\,\mathrm{sen}.(n-\alpha),$$

la equazione (5) equivarrà alla

$$(6)\qquad \overline{MP}^2=2b\left(BP+\frac{b}{2}\right),$$

la quale significa, che la parabola trovata ha tutte le proprietà superiormente enunciate.

Evidentemente questa parabola rimane la stessa per tutti quei terrapieni, che hanno il ciglio B ed i medesimi coefficienti f, t, p; e però se da un punto della retta AB scarpa di uno qualunque di essi, si condurranno le due rette tangenti a questa parabola, in esse vi saranno le basi di quelle due corrispondenti porzioni del terrapieno, che saranno in equilibrio.

La equazione (6) o la sua equivalente

$$\overline{MP}^2+\overline{BP}^2=(BP+b)^2$$

$$\text{dà}\ BM=BP+b,\ \text{e però}$$

$$BM(1-\cos.GBM)=b,$$

ossia la

$$BM=b:2\,\mathrm{sen}^2.\tfrac{1}{2}GBM,$$

la quale insegna, che il raggio vettore della parabola e corrispondente all' angolo $GBM = \alpha$ ossia all' ABG, è eguale alla larghezza y_1 trovata superiormente. E pertanto, nei terrapieni anzidetti, comunque inclinate siano le loro scarpe, le porzioni aventi le larghezze delle scarpe minori od eguali ai corrispondenti raggi vettori ordinarj della parabola, sopra contemplata, saranno *stabili* od almeno in equilibrio.

Queste proprietà si possono manifestare anco in quest'altra maniera. Si chiamino, φ la retta BN, che unisce B all' N punto qualunque della retta AC, e ϖ l'angolo NBD.

Essendo

$$\varphi : \text{sen}\,.\,x = y : \text{sen}\,.\,(x+\varpi-n),$$

$$\text{ossia}\ \ \varphi\ \text{sen}\,.\,(x+\varpi-n) = y\ \text{sen}\,.\,x,\ \ \text{e}$$

$$2y\,\text{sen}\,.\,x\ \text{sen}\,.\,(\alpha-x) = b,$$

sarà

$$2\varphi\ \text{sen}\,.\,(\alpha-x)\ \text{sen}\,.\,(x+\varpi-n) = b$$

la equazione fra le coordinate φ, ϖ della famiglia di quelle rette AC, che sono le basi delle porzioni in equilibrio, purchè l' x esprima qui pure il parametro arbitrario. Ma la derivata presa rispetto all' x di questa medesima equazione è

$$\text{sen}\,.\,(\alpha+n-\varpi-2x) = 0,\ \ \text{ossia}\ \ x = \tfrac{1}{2}(\alpha+n-\varpi);$$

adunque la equazione fra le coordinate φ, ϖ della curva toccata da queste rette sarà la seguente

$$2\varphi\ \text{sen}^2.\ \tfrac{1}{2}(\alpha+\varpi-n) = b,\ \ \text{ossia}$$

$$\varphi = b : \ 2\,\text{sen}^2.\ \tfrac{1}{2}\,GBM :$$

come si è trovato sopra.

Si conduca la orizzontale BO; e si chiamino, z la AO altezza di B ciglio del terrapieno sul piano orizzontale corrispondente al punto A, e v la AD distanza verticale dell' A infimo punto della scarpa del terrapieno dal piano della faccia superiore di esso.

Essendo $v = y\,\frac{\text{sen}\,.\,(u-m)}{\text{sen}\,.\,u}$, $z = y\cos.\,m$.

si avranno

$$v = \frac{b \operatorname{sen}.(u-m)}{2 \operatorname{sen}.u \operatorname{sen}^2.\frac{a}{2}}, \quad z = \frac{b \cos.m}{2 \operatorname{sen}^2.\frac{a}{2}},$$

per le altezze v, z del terrapieno avente la inclinazione della scarpa complemento dell'm, e le porzioni di esso stabili tutte, eccettuata una, che sarà appena in equilibrio.

Evidentemente i valori delle y_1, v, z crescono col crescere dell'angolo m, e quello della v corrispondente all'$m=0$ si riduce $\frac{4t}{p}$ cot. $\frac{r}{2}$, qualunque sia l'angolo u.

Descritta la parabola conica HML (fig. 2.), che abbia per asse HG e per parametro $2b$, e determinata $HB=\frac{1}{2}b$ e gli angoli GBP, RBP complementi degli r, u, con facilità si potranno scoprire graficamente le proprietà del terrapieno relative alla stabilità ed all'equilibrio delle porzioni ordinarie di esso.

Evidentemente questa parabola è eguale alla trovata superiormente; e se il suo asse fosse parallelo al profilo della scarpa naturale per la terra senza tenacità, e B il ciglio del terrapieno, sarebbe BP orizzontale, e BR il prolungamento del profilo della faccia superiore del terrapieno medesimo. E per tanto, volendo le y_1, v, z corrispondenti ad un dato angolo m, si farà l'angolo MBP complemento del medesimo m, si condurranno le MP, MR perpendicolari alle BP, BR, e nelle rette MB, MP, MR si avranno ordinatamente le y_1, v, z: e reciprocamente, se sarà data l'una o l'altra delle rette y_1, v, z, e si vorranno gli angoli m, x, determinerassi la MB eguale alla y_1, ovvero la MP perpendicolare alla BP ed eguale alla z, oppure la MR perpendicolare alla BR ed eguale alla v, ed anco la MK tangente la parabola; e negli angoli BMP, KMP si avranno gli m, x.

Così, se la inclinazione della scarpa fosse l'angolo MBP, e la sua larghezza fosse maggiore della BM; condotte da un punto I del prolungamento della BM le rette IN, LIK tangenti la parabola, le porzioni del terrapieno corrispondenti

alla scarpa di larghezza BI saranno stabili, in equilibrio, o sdruccioleranno in basso lungo le rispettive basi, se queste faranno colla scarpa angoli minori del BIN o maggiori del BIQ, ovvero eguali a questi due, oppure compresi fra questi medesimi. E la retta dividente pel mezzo l'angolo NIQ sarà parallela alla dividente pel mezzo l'IBG.

Terminerò questo paragrafo col far osservare, che dalle considerazioni occorse per la parabola qui contemplata risulta, che le porzioni del terrapieno corrispondenti alla larghezza y ed all' angolo x soddisfacenti la equazione (1), hanno anch' esse le basi in rette tangenti di una parabola conica, la quale ha l'asse ed il fuoco comune colla contemplata medesima ed il parametro b in vece di $2b$; e che, supposto, quest' altra parabola rappresentata colla stessa traccia HML, la retta PBQ orizzontale, l'angolo PBI eguale alla inclinazione della scarpa di un terrapieno, e la MK tangente di questa parabola, fra le porzioni del terrapieno aventi le inclinazioni delle basi tutte eguali all'angolo MKB, la più stabile avrà la larghezza della scarpa eguale al raggio vettore BM.

II.

In questo paragrafo esporrò le regole per iscoprire la inclinazione della scarpa di un terrapieno, che debba avere la larghezza o l' altezza della scarpa od altra linea *data*, affinchè le porzioni ordinarie di esso non franino, ed anco le regole per conoscere quella porzione di esso medesimo, che sarà sulla rispettiva base appena in equilibrio.

Se nella relazione

$$\frac{b}{y} + \cos.(r-m) > \text{ od } = 1$$

necessaria affinchè le porzioni del terrapieno, avente la scarpa di larghezza y ed inclinata alle verticale dell'angolo m, siano stabili od almeno in equilibrio, come risulta dal paragrafo antecedente, si pongano i valori della y formati colle v, z, si hanno le seguenti

$$\frac{b}{y}\,\frac{\text{sen}\,.\,(u-m)}{\text{sen}\,.\,u}+\cos.\,(r-m)>\text{od}=1\,,$$

$$\frac{b}{z}\cos.\,m+\cos.\,(r-m)>\text{od}=1\,.$$

Con queste tre relazioni si potranno determinare i limiti minori degli angoli m ossia i massimi dei loro complementi, i quali saranno le più grandi inclinazioni, che si potranno dare alle scarpe dei terrapieni corrispondenti alle y, v, z, affinchè le loro porzioni siano stabili od almeno in equilibrio.

Siccome $\cos.\,(r-m)$ cresce coll' m, così il minimo valore dell' m per la prima delle tre relazioni soddisferà la equazione

$$\frac{b}{y}+\cos.\,(r-m)=1 \quad \text{ossia} \quad \cos.\,(r-m)=\frac{d}{y}\,,$$

dove $d=y-b$, la quale, per essere

$$\text{sen}\,.\,m=\text{sen}\,.\,r\cos.\,(r-m)-\cos.\,r\,\text{sen}\,.\,(r-m)\,,$$

$$\cos.\,m=\cos.\,r\cos.\,(r-m)+\text{sen}\,.\,r\,\text{sen}\,.\,(r-m)\,,$$

somministra

$$\text{sen}\,.\,m=\frac{d}{y}\,\text{sen}\,.\,r-\frac{h}{y}\cos.\,r\,,$$

$$\cos.\,m=\frac{d}{y}\cos.\,r+\frac{h}{y}\,\text{sen}\,.\,r$$

ed anco

$$\text{tang}\,.\,m=\frac{d\,\text{tang}\,.\,r-h}{d+h\,\text{tang}\,.\,r}=\frac{d-fh}{df+h}$$

ove h esprime $\sqrt{(y^2-d^2)}$ ossia $\sqrt{b(2y-b)}$.

Essendo $x=\frac{1}{2}(r-m)$, ed $x+m=\frac{1}{2}(r+m)$ e però

$$\text{tang}\,.\,x=[\,1-\cos.\,(r-m)\,]:\text{sen}\,.\,(r-m)\,,$$

$$\text{tang}\,.\,(x+m)=[\,1-\cos.\,(r+m)\,]:\text{sen}\,.\,(r+m)\,,$$

sviluppando questi seni e coseni degli angoli $r-m$, $r+m$, e sostituendo per $\text{sen}\,.\,m$, $\cos.\,m$ i loro valori, si hanno immediatamente

$$\text{tang}\,.\,x=\frac{b}{h}\,,\quad \text{tang}\,.\,(x+m)=\frac{h\,\text{tang}\,.\,r-b}{h+b\,\text{tang}\,.\,r}$$

ovvero

$$\text{tang}.x=\sqrt{\frac{b}{2y-b}}, \text{ e tang}.(x+m)=\frac{y\,\text{sen}.2r-h}{y\cos.r+d}.$$

Posto $b=a.v\,\text{sen}.u$, la seconda delle tre relazioni esposte equivale alla

$$d\,\text{sen}.m+e\cos.m>\text{od}=1,$$

dove $d=\text{sen}.r-a\cos.u$, ed $e=\cos.r+a\,\text{sen}.u$;
e se in questa si pone $m=s-\beta$, dove l' s esprima l' angolo, che ha per tangente $\frac{d}{e}$, e il β un altro angolo qualunque, essa si riduce alla

$$\sqrt{(d^2+e^2)}.\cos.\beta>\text{od}=1,$$

la quale manifesta, che i valori del binomio $d\,\text{sen}.m+e\cos.m$ saranno minori, eguali, o maggiori della *unità*, se sarà correlativamente l' angolo β maggiore, eguale, o minore di quello, che soddisfa la equazione

$$\sqrt{(d^2+e^2)}.\cos.\beta=1,$$

la quale dà immediatamente $\text{tang}.\beta=\sqrt{(d^2+e^2-1)}$.

E per tanto, essendo

$$\text{tang}.m=\frac{\text{tang}.s-\text{tang}.\beta}{1+\text{tang}.s\,\text{tang}.\beta}$$

pel minimo valore dell' angolo m soddisfacente la relazione seconda, si avrà

$$\text{tang}.m=\frac{d-e\text{R}}{e+d\text{R}} \text{ ovvero tang}.m=\frac{de-\text{R}}{1-d^2},$$

dove

$$\text{R}=\sqrt{(d^2+e^2-1)}=\sqrt{a[a+2\,\text{sen}.(u-r)]}.$$

Trovo la tangente dell'angolo $x+m=\frac{1}{2}(r+m)$ corrispondente a questa dell' m, cioè l' angolo compreso da una verticale e dalla base di quella porzione dell' attuale terrapieno, che è sulla base stessa appena in equilibrio, mentre le altre tutte sono stabili.

Essendo

$$\text{tang}.(x+m)=\text{tang}.\tfrac{1}{2}(r+m) \text{ e però}$$
$$\text{tang}.(r+m)=[1-\cos.(r+m)]:\text{sen}.(r+m),$$

sarà tang. $(x+m)$ *eguale* ad

$$1-\frac{e+d\mathrm{R}}{d^2+e^2}\cos.r+\frac{d-e\mathrm{R}}{d^2+e^2}\operatorname{sen}.r$$

diviso per

$$\frac{e+d\mathrm{R}}{d^2+e^2}\operatorname{sen}.r+\frac{d-e\mathrm{R}}{d^2+e^2}\cos.r,$$

cioè

$$\operatorname{tang}.(x+m)=\frac{d^2+e^2+e_1-d_1\mathrm{R}}{d_1+e_1\mathrm{R}},$$

dove

$$d_1=d\cos.r+e\operatorname{sen}.r,\ \text{ed}\ e_1=d\operatorname{sen}.r-e\cos.r.$$

E siccome il binomio d^2+e^2 è eguale al $d^2_1+e^2_1$, ed i due prodotti

$$(d^2_1+e^2_1+e_1-d_1\mathrm{R})(d_1-e_1\mathrm{R}),\ (d_1+e_1\mathrm{R})(d_1-e_1\mathrm{R})$$

sono rispettivamente eguali ai due seguenti

$$(d^2+e^2)(e_1+1)(d_1-\mathrm{R}),\ (d^2+e^2)(e_1+1)(1-e_1);$$

così sarà anco

$$\operatorname{tang}.(x+m)=\frac{d_1-\mathrm{R}}{1-e_1}=\frac{d\cos.r+e\operatorname{sen}.r-\mathrm{R}}{e\cos.r-d\operatorname{sen}.r+1},$$

e però

$$\operatorname{tang}.(x+m)=\frac{\operatorname{sen}.2r-a\cos.(u+r)-\sqrt{a[a+2\operatorname{sen}.(u-r)]}}{1+\cos.2r+a\operatorname{sen}.(u+r)}.$$

Dimodochè, se la scarpa del terrapieno farà colla verticale l'angolo m trovato dianzi, le sue porzioni saranno stabili tutte, eccettuata quella la cui base farà colla verticale l'angolo $x+m$ quì trovato, la quale sarà appena in equilibrio.

L'angolo x, compreso da quest'ultima base e dalla scarpa del terrapieno, essendo eguale ad $\frac{1}{2}(r-m)$, dà

$$\operatorname{tang}.x=[1-\cos.(r-m)]:\operatorname{sen}.(r-m);$$

e però sarà

$$\operatorname{tang}.x=\frac{a\cos.(u-r)+\mathrm{R}}{a\operatorname{sen}.(u-r)+2}.$$

Pel caso comune di u angolo *retto*, e però di

$d=\operatorname{sen}.r$, $e=\cos.r+c\operatorname{sen}.r$, ed $\mathrm{R}=\operatorname{sen}.r\sqrt{c(c+2\cot.r)}$

dove c esprime $\frac{4t}{p} \cdot \frac{1}{v}$, si hanno

$$\text{tang}\,.\,m = \left[\,1 + c\,\text{tang}\,.\,r - \frac{1}{\cos.\,r}\sqrt{c\,(c+2\cot.\,r)}\,\right]\text{tang}\,.\,r\,,$$

$$\text{tang}\,.\,(x+m) = \text{tang}\,.\,r - \frac{1}{\cos.\,r}\sqrt{\frac{c}{c+2\cot.\,r}}\,,$$

$$\text{tang}\,.\,x = \frac{c\,\text{sen}\,.\,r + \sqrt{c\,(c+2\cot.\,r)}}{c\,\text{sen}\,.\,r\cos.\,r+2}\,\text{sen}\,.\,r,$$

e però

$$\text{tang}\,.\,m = \frac{1}{f} + \frac{c}{f^2} - \frac{1}{f^2}\sqrt{(1+f^2)\,c\,(c+2f)}\,,$$

$$\text{tang}\,.\,(x+m) = \frac{1}{f} - \sqrt{\frac{1+f^2}{c+2f}}\,c\,,$$

e

$$\text{tang}\,.\,x = \frac{c+\sqrt{(1+f^2)\,c\,(c+2f)}}{2+(c+2f)\,f}\,.$$

Siccome la terza delle medesime relazioni esposte è visibilmente un caso particolare della seconda di esse, e propriamente quel caso che corrisponde all'angolo u *retto* ed alla v eguale alla z; così le tangenti degli angoli m, $x+m$, x per la terza saranno quei risultamenti, che si otterranno, colle ultime espressioni delle tangenti di questi angoli, col porre $\frac{4t}{p} \cdot \frac{1}{z}$ in luogo della c visibile in esse.

Le così dette basi delle scarpe dei terrapieni quì contemplati, cioè le parti delle orizzontali aventi i termini negli inferiori delle scarpe stesse e nelle verticali passanti pei cigli saranno evidentemente i prodotti

$$y\,\text{sen}\,.\,m\,,\quad v\,\frac{\text{sen}\,.\,u\,\text{sen}\,.\,m}{\text{sen}\,.\,(u-m)}\,,\quad z\,\text{tang}\,.\,m\,,$$

e però all' uopo determinabili facilmente le loro espressioni formate colle y, v, z.

III.

Allorchè la scarpa di un dato terrapieno sia o debba essere appoggiata ad un piano *stabile*, come sarebbe una parete

di un muro o di un tavolato fisso, possono interessare le grandezze delle pressioni ossiano spinte, che saranno esercitate contro il piano stesso dalle varie porzioni del terrapieno, e particolarmente la massima di esse e da quale porzione sarà dessa medesima prodotta. Queste spinte e segnatamente la massima di esse, e la porzione corrispondente ad essa medesima costituiscono il principale soggetto di questo paragrafo, ove sono determinate qualunque siano le inclinazioni della scarpa e *della faccia superiore* del terrapieno, coll' ammettere la grandezza di una qualunque spinta eguale ed opposta a quella forza, che diretta perpendicolarmente contro la scarpa della corrispondente porzione del terrapieno, insieme al peso di questa ed alla tenacità ed attriti aventi luogo lungo la base di essa, riduca questa porzione istessa allo stato prossimo alla discesa ossia all' equilibrio per questo verso sulla base di essa medesima.

Si rappresentino: colla retta BC (fig. 3) il profilo ed in un la faccia superiore del terrapieno: colla AB il profilo del piano sul quale esso esercita la spinta: colla AC il profilo di una qualunque sua sezione longitudinale e la sezione stessa: colla ADE una verticale, e colla BF il prolungamento della AB. E si chiamino: u, m, n, x ordinatamente gli angoli CDE, BAE, CBF, BAC; P il peso di quella porzione del terrapieno, la quale ha il triangolo ABC per profilo: Q la pressione del piano AB contro la porzione ABC del terrapieno nello stato di equilibrio pel verso della discesa di essa, e però anco la grandezza della spinta di questa porzione del terrapieno contro lo stesso piano AB; in ultimo, si chiami a la lunghezza della retta AB, e si pongano

$$\tfrac{1}{2}pa^2 \operatorname{sen}.n = \text{A}, \quad 2\,ta \operatorname{sen}.r \operatorname{sen}.n = b;$$

ed osservisi, che, se la retta AB cadrà a destra della verticale AE, l' angolo m sarà *negativo*.

Siccome le forze P, Q insieme agli attriti da esse prodotti sul piano AC ed alla tenacità della terra a seconda di questo

medesimo piano, debbono ridurre la porzione ABC del terrapieno pel verso CA allo stato di equilibrio; così annulleranno la somma di tutte quelle cause, che avranno influenza nel moto virtuale di questa porzione da C verso A secondo la base di essa; cioè soddisferanno la equazione

$$Q\,\text{sen}.x + fQ\cos.x + fP\,\text{sen}.(x-m) - P\cos.(x-m) + t.AC = 0,$$

ossia la seguente

$$Q\cos.(r-x) - P\,\text{sen}.(\omega-x) + t.AC.\text{sen}.r = 0,$$

dove $\omega = r + m$.

Essendo $AC = a\,\text{sen}.n : \text{sen}.(n-x)$,

e $P = \frac{1}{2}pa^2\,\text{sen}.n\,\text{sen}.x : \text{sen}.(n-x)$,

quest' ultima equazione si riduce alla

(7) $$Q\cos.(r-x)\,\text{sen}.(n-x) - A\,\text{sen}.x\,\text{sen}.(\omega-x) + \tfrac{1}{2}b = 0,$$

colla quale si potrà determinare la Q spinta del piano contro il terrapieno, qualunque sia AC; ed anco trovare i suoi valori singolari.

Per esempio, se in essa si pone per l' x il valore $\frac{\omega}{2}$, e l' angolo u sia *retto*, si ha la

$$Q\cos.^2\frac{\alpha}{2} - A\,\text{sen}.^2\frac{\omega}{2} + \frac{1}{2}b = 0,$$

la quale dà

$$Q = A\left(\frac{\text{sen}.\frac{\omega}{2}}{\cos.\frac{\alpha}{2}}\right)^2 - \frac{b}{2\cos.^2\frac{\alpha}{2}},$$

dove α esprime $r-m$, come nei paragrafi antecedenti, ed A, b i prodotti $\frac{1}{2}pa^2\cos.m$, $2\,ta\,\text{sen}.r\cos.m$.

Per essere

$$2\cos.(r-x)\,\text{sen}.(n-x) = \text{sen}.(r+n-x) + \text{sen}.(n-r),$$

$$2\,\text{sen}.x\,\text{sen}.(\omega-x) = \cos.(\omega-2x) - \cos.\omega,$$

la equazione (7) equivale alla

(8) $\quad Q\,\text{sen.}(n+z) - A\cos.(m+z) + Q\,\text{sen.}(n-r) + A\cos.\omega + b = 0$,

dove $z = r - 2x$.

Fra i valori singolari della Q il più interessante senza eccezione è il massimo; giacchè è desso la minima resistenza, che dev' essere esercitata dal piano AB contro il terrapieno, affinchè nessuna porzione di esso frani o sdruccioli in basso lungo la base di essa medesima; e per questo passo a determinarlo insieme al corrispondente angolo x, il quale sarà uno degli x_2 contemplati nel paragrafo primo, e farà conoscere quel piano analogo all'AC, che pel terrapieno sarà la sezione della sua rottura più probabile.

Si pongano $b = Av$, $\text{sen}.(n-r) = e$, $v + \cos.\omega = c$,

$$Q = A\psi,\ \text{ed}\ e + \text{sen}.(n+z) = H\,;$$

e la equazione (8) equivarrà alla

$$H\psi - \cos.(m+z) + c = 0\,, \tag{9}$$

le cui prime due derivate rispetto alla z, variabile principale surrogata all' x, e corrispondente alla $\psi'_z = 0$, sono

$$\psi\cos.(n+z) + \text{sen}.(m+z) = 0\,, \tag{10}$$

$$H\psi'' - \psi\,\text{sen}.(n+z) + \cos.(m+z) = 0\,.$$

Ponendo in queste ultime due equazioni in luogo della ψ il suo valore cavato dalla (9), si hanno le

$$H\,\text{sen}.(m+z) + (\cos.(m+z) - c)\cos.(n+z) = 0,$$

$$H\psi'' + H\cos.(m+z) - (\cos.(m+z) - c)\,\text{sen}.(n+z) = 0\,,$$

ossia

$$\cos.u + e\,\text{sen}.(m+z) - \cos.(n+z) = 0\,,$$

$$H^2\psi'' + e\,\text{sen}.(n+z) + e\cos.(m+z) = 0,$$

cioè le due seguenti

$$\cos.u - d\cos.z + k\,\text{sen}.z = 0\,, \tag{11}$$

$$H^2\psi'' + k\cos.z + d\,\text{sen}.z = 0\,, \tag{12}$$

dove $d = c\cos.n - e\,\text{sen}.m$, $e\,k = c\,\text{sen}.n + e\cos.m$.

Sciogliendo la equazione (11) successivamente rispetto al sen. z ed al cos. z, e ponendo

$$\sqrt{(d^2 + k^2 - \cos.^2 u)} = R,$$

e rammentandosi che dev'essere $\text{sen}.^2 z + \cos.^2 z = 1$, si hanno

$$(13) \qquad \text{sen}.z = \frac{dR - k\cos.u}{d^2 + k^2} \quad \text{e} \quad \cos.z = \frac{kR + d\cos.u}{d^2 + k^2},$$

ovvero

$$(14) \qquad \text{sen}.z = -\frac{dR + k\cos.u}{d^2 + k^2} \quad \text{e} \quad \cos.z = \frac{d\cos.u - kR}{d^2 + k^2}:$$

e per tanto sarà anco

$$(15) \qquad \text{tang}.z = \frac{dR - k\cos.u}{kR + d\cos.u},$$

ovvero

$$(16) \qquad \text{tang}.z = \frac{dR + k\cos.u}{kR - d\cos.u}.$$

Siccome i valori (13) di sen. z, cos. z riducano la equazione (12) alla

$$H^2\psi'' + R = 0,$$

ed i (14) la riducano alla seguente

$$H^2\psi'' - R = 0;$$

così i primi, cioè la z determinata colla (15) corrisponderà ad un massimo della ψ, ed i secondi ossia la z data dalla (16) corrisponderà ad un minimo della ψ stessa.

Essendo quest'ultimo valore della ψ, cioè il minimo della Q, affatto incoerente ed inutile per la quistione attuale, continueremo avendo di mira il solo primo cioè il massimo; e lo determineremo mediante la equazione (10) ossia la

$$(\cos.n\cos.z - \text{sen}.n\,\text{sen}.z)\,\psi + \text{sen}.m\cos.z + \cos.m\,\text{sen}.z = 0.$$

Sostituendo in essa per sen.z, cos.z i loro valori (13), si ha la

$$(c\,R + c + e\,\text{sen}.u)\,\psi + c\,R - e - c\,\text{sen}.u = 0,$$

la quale somministra immediatamente

$$(17) \qquad Q = A\,\frac{e+c\,\text{sen}\,.\,u - c\,R}{c+e\,\text{sen}\,.\,u + e\,R}\,.$$

Tanto questa espressione della Q quanto quella della tang . z si possono trasformare in equivalenti ad esse medesime, ove il radicale R vi sia in un solo luogo.

Di fatto, moltiplicando i due termini della frazione (15) per $k\,R - d\cos.\,u$, ed osservando, che i prodotti

$$(d\,R - k\cos.\,u)\,(k\,R - d\cos.\,u)\,,\ (k\,R - d\cos.\,u)\,(k\,R + d\cos.\,u)$$

sono identici ai due

$$(d^2+k^2)\,(d\,k - R\cos.\,u)\,,\ (d^2+k^2)\,(k^2 - \cos.^2 u)\,,$$

si ha

$$(18) \qquad \text{tang}\,.\,z = \frac{d\,k - R\cos.\,u}{k^2 - \cos.^2 u}\,.$$

Così, moltiplicando i termini della frazione (17) per $c+e\,\text{sen}\,.\,u - e\,R$, ed osservando, che il prodotto

$$(c+e\,\text{sen}\,.\,u + e\,R)\,(c+e\,\text{sen}\,.\,u - e\,R)$$

ossia

$c^2 + 2\,c\,e\,\text{sen}\,.\,u + e^2 - e^2(d^2+k^2)$ è *eguale* al $(d^2+k^2)\,(1-e^2)$ e però al

$$(d^2+k^2)\cos.^2(n-r)\,,$$

e l' $(e+c\,\text{sen}\,.\,u - c\,R)\,(c+e\,\text{sen}\,.\,u - e\,R)$ è *eguale* ad

$e\,c\,(d^2+k^2+2\,\text{sen}\,.^2 u) + (d^2+k^2-2\,c\,e\,\text{sen}\,.\,u)\,\text{sen}\,.\,u - (d^2+k^2)\,R$

e però al

$$(d^2+k^2)\,(c\,e + \text{sen}\,.\,u - R)\,,$$

si avrà

$$(19) \qquad Q = A\,(c\,e + \text{sen}\,.\,u - R) : \cos.^2(n-R)\,.$$

Per semplicità si chiami M il binomio $c\,e + \text{sen}\,.\,u$. Essendo

$$M = \text{sen}\,.\,u + \cos.\,\omega\,\text{sen}\,.\,(n-r) + v\,\text{sen}\,.\,(n-r)\,,\ \text{e}$$

$$\cos.\,\omega\,\text{sen}\,.\,(n-r) = \tfrac{1}{2}\,\text{sen}\,.\,(n+m) + \tfrac{1}{2}\,\text{sen}\,.\,(u-2r)\,,$$

e però

$$\text{sen}.\,u + \cos.\,\omega\,\text{sen}.\,(n-r) = \text{sen}.\,n\cos.\,m + \cos.\,r\,\text{sen}.\,(u-r),$$

si ha

$$M = \text{sen}.\,n\cos.\,m + \cos.\,r\,\text{sen}.\,(u-r) + v\,\text{sen}.\,(n-r).$$

Così, per essere R^2 *eguale* al quattrinomio

$$v^2 + 2[\cos.\,\omega + \text{sen}.\,u\,\text{sen}.\,(u-r)]\,v$$

$$+ [\text{sen}.\,u + \cos.\,\omega\,\text{sen}.\,(n-r)]^2 - \text{sen}.^2\omega\cos.^2(n-r),$$

e quest' ultimo binomio eguale al prodotto dei due trinomj

$$\text{sen}.\,u + \cos.\,\omega\,\text{sen}.\,(n-r) + \text{sen}.\,\omega\cos.\,(n-r),$$

$$\text{sen}.\,u + \cos.\,\omega\,\text{sen}.\,(n-r) - \text{sen}.\,\omega\cos.\,(n-r),$$

ossia dei binomj $\text{sen}.\,u + \text{sen}.\,(n+m)$, $\text{sen}.\,u + \text{sen}.\,(u-r)$ e però dei due monomj

$$2\,\text{sen}.\,n\cos.\,m,\quad 2\cos.\,r\,\text{sen}.\,(u-r),$$

sarà R^2 *eguale* al trinomio

$$4\,\text{sen}.\,n\cos.\,m\cos.\,r\,\text{sen}.\,(u-r) + v^2$$

$$+ 2[\cos.\,\omega + \text{sen}.\,u\,\text{sen}.\,(u-r)]\,v.$$

Quindi il valore richiesto della Q sarà il prodotto di

$$\frac{A}{\cos.^2(n-r)}$$

per l' *eccesso* di $\text{sen}.\,n\cos.\,m + \cos.\,r\,\text{sen}.(u-r) + v\,\text{sen}.(n-r)$ sul radicale

$$\sqrt{(4\text{sen}.n\cos.m\cos.r\text{sen}.(u-r) + 2[\cos.\omega + \text{sen}.u\text{sen}.(u-r)v + v^2]}.$$

Prima di abbandonare l' attuale quistione esporrò alcuni casi particolari di essa, limitandomi però a quelli, che sono frequenti nella pratica, e pei quali le espressioni trovate pelle Q, tang.z almeno quello della Q si possono semplificare in parte.

In *primo* luogo sia *retto* l'angolo u ovvero sia $u = 90^0 + m$. e però

$$\text{sen}\,.\,n = \cos.\,m\,,\quad \cos.\,n = -\,\text{sen}\,.\,m\,,$$

$$d = -(c+e)\,\text{sen}\,.\,m\,,\quad k = (c+e)\cos.\,m\,,\quad \text{ed}\ \ R = c+e\,;$$

e si avrà

$$\text{tang}\,.\,z = \frac{d}{k} = -\,\text{tang}\,.\,m \quad \text{ossia}\quad z+m=0\,,$$

$$\text{e}\ \ Q = A\,(1-c)(1-e) : \cos.^2(n-r)\,.$$

Ma per essere

$$\text{sen}\,.\,(n-r) = \cos.\,\alpha\,,\quad \cos.\,(n-r) = \text{sen}\,.\,\alpha = 2\,\text{sen}\,.\,\frac{\alpha}{2}\cos.\frac{\alpha}{2}\,,$$

si hanno

$$1-c = 1-\cos.\,\omega - v = 2\,\text{sen}.^2\,\frac{\omega}{2} - v\,,$$

$$1-e = 1-\cos.\,\alpha = 2\,\text{sen}\,.^2\,\frac{\alpha}{2}\,;$$

adunque sarà

$$Q = A\left(2\,\text{sen}.^2\frac{\omega}{2} - v\right) : 2\cos.^2\,\frac{\alpha}{2}\,,$$

cioè $x = \frac{1}{2}(r+m)$, e

$$Q = \frac{\alpha^2}{2}\left(\frac{\text{sen}\,.\,\frac{\omega}{2}}{\cos.\,\frac{\alpha}{2}}\right)^2 p\cos.\,m - a\,t\,\frac{\text{sen}\,.\,r\cos.\,m}{\cos.^2\,\frac{\alpha}{2}}\,.$$

Questi medesimi risultamenti si possono desumere immediatamente anco dalla equazione (8).

Di fatto, per n angolo retto, essa si riduce alla

$$Q\cos.\,(m+z) + Q\cos.\,\alpha - A\cos.\,(m+z) + A\cos.\,\omega + b = 0$$

ossia

$$Q = (A\cos.\,(m+z) - A\cos.\,\omega - b) : (\cos.\,(m+z) + \cos.\,\alpha)\,,$$

e però alla seguente

$$Q = A - \frac{2A\cos.\,r\cos.\,m + b}{\cos.\,(m+z) + \cos.\,\alpha}\,,$$

la quale manifesta il massimo valore della Q corrispondente a $\cos.\,(m+z) = 1$, cioè all' $x = \frac{\omega}{2}$, *eguale* ad

$$(A - A\cos.\,\omega - b) : (1 + \cos.\,\alpha)$$

e però ad

$$A\left(\frac{\text{sen}.\frac{\omega}{2}}{\cos.\frac{\mu}{2}}\right)^2-\frac{b}{2\cos.^2\frac{\mu}{2}},$$

come si è trovato superiormente.

Visibilmente, i valori di quest' ultima spinta corrispondenti ad $m+z=\pm\mu$, qualunque sia l'angolo μ, sono eguali fra loro; per cui le spinte esercitate contro il piano AB da due porzioni qualsivogliono dell' attuale terrapieno, le quali abbiano le basi egualmente inclinate alla base di quella, la cui spinta è la massima, sono fra loro eguali.

Se poi oltre essere orizzontale la faccia superiore del terrapieno, il piano AB fosse verticale, siccome sarebbe anco $m=0$; così si avrebbe

$$x=\frac{r}{2},\ \text{e}\ Q=\tfrac{1}{2}pa^2\,\text{tang}.^2\frac{r}{2}=-4at\,\text{tang}.\frac{r}{2}.$$

In *secondo* luogo, il piano AB sia verticale, ma il BC comunque inclinato all' orizzonte, anco *declive*, cioè sia $m=0$ ed $n=u$, e si avrà

$$M=\text{sen}.u+\cos.r\,\text{sen}.(u-r)+v\,\text{sen}.(u-r),$$

ed $R^2=4\,\text{sen}.u\cos.r\,\text{sen}.(u-r)+2\,[\cos.r+\text{sen}.u\,\text{sen}.(u-r)]\,v+v^2$ ossia

$$R^2=(v+2\cos.r)\,[v+2\,\text{sen}.u\,\text{sen}.(u-r)];$$

e però sarà Q eguale ad $\frac{A}{\cos.^2(u-r)}$ *moltiplicato* per

$$\text{sen}.u+(\cos.r+v)\,\text{sen}.(u-r)-\sqrt{(v+2\cos.r)\,[v+2\,\text{sen}.u\,\text{sen}.(u-r)]}.$$

In *terzo* luogo, si prescinda dalla tenacità della terra, cioè sia $v=0$, e però

$$M=\text{sen}.n\cos.m+\cos.r\,\text{sen}.(u-r),$$

$$\text{ed}\ R^2=4\,\text{sen}.n\cos.m\cos.r\,\text{sen}.(n-r);$$

e si avrà

$$Q=A\,[\sqrt{\text{sen}.n\cos.m}-\sqrt{\cos.r\,\text{sen}.(u-r)}\,]^2:\cos.^2(n-r),$$

espressione che pel caso di *u retto* si riduce alla

$$A\left(\frac{\text{sen}.\frac{\omega}{2}}{\cos.\frac{\alpha}{2}}\right)^2;$$

e questa per $m=0$ riducesi alla $A.\text{tang.}^2\frac{r}{2}$, cioè $\frac{a^2}{2}p\,\text{tang.}^2\frac{r}{2}$ notissima.

Essendo $r-2x=z$ e però $2x=r-z$, ed anco $r+m-2x=m+z$: colle espressioni esposte per sen.z, cos.z, si possono determinare facilmente quelle dei seni, coseni, e delle tangenti degli angoli $2x$, $r+m-2x$. Esporrò quelle pel secondo cioè per l' angolo $r+m-2x$, che chiamerò $2i$, dove l'i esprimerà l'angolo fatto dalla base della porzione del terrapieno corrispondente alla massima Q colla retta dividente pel mezzo l'angolo compreso dalle basi di quelle due porzioni del terrapieno medesimo alle quali corrispondono le spinte *nulle*.

La eguaglianza $2i=m+z$ dà

$$\text{sen}.2i=\text{sen}.m\cos.z+\cos.m\,\text{sen}.z,$$

$$\text{e}\ \cos.2i=\cos.m\cos.z-\text{sen}.m\,\text{sen}.z;$$

e però sarà

$$\text{sen}.2i=(cR-e-c\,\text{sen}.u)\cos.u:\ (d^2+k^2),$$

$$\text{e}\ \cos.2i=[(e+c\,\text{sen}.u)R+c\cos.^2u]:\ (d^2+k^2),$$

ed anco

$$\text{tang}.2i=\frac{cR-e-c\,\text{sen}.u}{(e+c\,\text{sen}.u)R+c\cos.^2u}\cos.u,$$

ovvero

$$\text{tang}.2i=(c^2-1)\cos.u:\ (R+ce+c^2\,\text{sen}.u).$$

IV.

Il piano, contro cui ho supposto nel paragrafo antecedente esercitate le spinte delle varie porzioni del terrapieno, può essere *mobile*, e spinto da una tal forza perpendicolarmente

ad esso e *contro* il terrapieno, di ridurre porzioni del terrapieno medesimo allo stato prossimo di sdrucciolare in su sulle basi rispettive; e però interessante io reputo anco questo paragrafo, ove determino le grandezze delle forze atte a ridurre, per questo verso, allo stato di equilibrio le porzioni del terrapieno, e segnatamente la minima di esse, non che la porzione del terrapieno ad essa medesima corrispondente.

La spinta del piano AB contro la porzione BAC del terrapieno si chiami S; e si ritengano tutte le altre denominazioni usate nei paragrafi antecedenti.

Evidentemente, affinchè la porzione ABC del terrapieno sia nello stato di sdrucciolare in su pel piano AC, o sia per questo verso in equilibrio, si dovrà avere

$$S\,\text{sen}.x - fS\cos.x - P\cos.(x-m) - fP\,\text{sen}.(x-m) - t.AC > \text{od} = 0,$$

ossia

$$S\cos.(r+x) + P\,\text{sen}.(r+x-m) + t.AC.\text{sen}.r < \text{od} = 0;$$

per cui la porzione ABC non concepirà movimento in su pel piano AC, se la S non sarà maggiore della soddisfacente la equazione seguente

$$(20)\qquad S\,\text{sen}.(n-x)\cos.(r+x) + A\,\text{sen}.x\,\text{sen}.(r+x-m) + \tfrac{1}{2}b = 0,$$

la quale ridurrebbe, per questo verso, la porzione stessa allo stato di equilibrio: anzi *nessuna* porzione del terrapieno si moverà in su sulla sua base, se la spinta del piano contro del terrapieno non sarà maggiore del minimo valore della S fra i corrispondenti agli infiniti dell'x, che insieme soddisfanno la stessa equazione (20). Dimodochè, con questa equazione si potrà determinare la S per ridurre qualunque porzione del terrapieno allo stato di equilibrio per questo verso, ed anco il suo minimo valore, affinchè nessuna porzione del terrapieno sdruccioli in su sulla base di essa.

Per esempio, nel caso dell'angolo n retto, la grandezza della S per ridurre a questo equilibrio la porzione corrispondente all'angolo $x = 90^\circ - \frac{a}{2}$ sarà quella, che soddisferà la equazione

$$S \operatorname{sen.}^2 \frac{\omega}{2} - A \cos.^2 \frac{\alpha}{2} - \frac{b}{2} = 0,$$

la quale dà

$$S = A \left(\frac{\cos . \frac{\alpha}{2}}{\operatorname{sen} . \frac{\omega}{2}} \right)^2 + \frac{b}{2 \operatorname{sen.}^2 \frac{\omega}{2}}$$

cioè

$$S = \tfrac{1}{2} a^2 p \left(\frac{\cos . \frac{\alpha}{2}}{\operatorname{sen} . \frac{\omega}{2}} \right)^2 \cos . m + at \frac{\operatorname{sen} . r \cos . m}{\operatorname{sen.}^2 \frac{\omega}{2}} .$$

Siccome la equazione (20) e la sua derivata rispetto all' x e corrispondente alla $S'_x=0$ contengono le quantità $S, -r, -t, x$, come la (8) e la sua derivata rispetto all' x e corrispondente alla $Q'_x=0$ contengono le Q, r, t, x; così la espressione *generale* del minimo valore della S e quella del corrispondente angolo x si potrebbero desumere dalle espressioni del massimo della Q e dell' x corrispondente, cavati dalle equazioni (10), (11), cambiando in queste i simboli Q, r, t negli $S, -r, -t$, ed attribuendo al radicale contenuto in queste medesime il segno *positivo* in vece del *negativo*. Ma per rendere l'attuale quistione indipendente da ogni altra, stimo bene di trattarla essa medesima, partendo dalla equazione

$$[\operatorname{sen}.(n+r)+\operatorname{sen}.(n-r-2x)]\, S + A \cos.(r-m) - \cos.(r+2x-m)] + b = 0,$$

che equivale alla (20).

Si ponga $S=A\varphi$, $r+2x=\theta$, $\operatorname{sen}.(n+r)=e$, $b=Av$,

$$v + \cos . (r-m) = c, \text{ ed } e - \operatorname{sen} . (\theta-n) = K;$$

e si avrà la

$$K\varphi - \cos . (\theta-m) + c = 0, \tag{21}$$

le cui prime due derivate rispetto al θ e corrispondenti alla $\varphi'_\theta=0$ sono

$$\varphi \cos . (\theta-n) - \operatorname{sen} . (\theta-m) = 0, \tag{22}$$

$$K\varphi'' + \varphi \operatorname{sen} . (\theta-n) + \cos . (\theta-m) = 0 .$$

Ponendo in queste due equazioni per φ il suo valore desunto dalla (21), si hanno le

$$\cos.u - c\cos.(\theta - n) - e\,\mathrm{sen}.(\theta - m) = 0\,,$$

$$K^2\varphi'' - c\,\mathrm{sen}.(\theta - n) + e\cos.(\theta - m) = 0\,,$$

che equivalgono alle seguenti

(23) $$\cos.u - d\cos.\theta - k\,\mathrm{sen}.\theta = 0\,,$$

(24) $$K^2\varphi'' - d\,\mathrm{sen}.\theta + k\cos.\theta = 0\,,$$

dove $d = c\cos.n - e\,\mathrm{sen}.m$, e $k = c\,\mathrm{sen}.n + e\cos.m$.

La equazione (23) dà

$$\mathrm{sen}.\theta = \frac{k\cos.u + dI}{d^2 + k^2} \quad \text{e} \quad \cos.\theta = \frac{d\cos.u - kI}{d^2 + k^2}\,,$$

ovvero

$$\mathrm{sen}.\theta = \frac{k\cos.u - dI}{d^2 + k^2} \quad \text{e} \quad \cos.\theta = \frac{d\cos.u + kI}{d^2 + k^2}\,,$$

dove $I = \sqrt{(d^2 + k^2 - \cos.^2 u)}$.

Questi valori di $\mathrm{sen}.\theta$, $\cos.\theta$ danno, i primi

$$k\cos.\theta - d\,\mathrm{sen}.\theta = -I\,,$$

ed i secondi

$$k\cos.\theta - d\,\mathrm{sen}.\theta = I\,,$$

per cui le loro corrispondenti equazioni (24) risultano

$$K^2\varphi'' - I = 0\,, \quad K^2\varphi'' + I = 0\,,$$

le quali insegnano, che i primi valori esposti per $\mathrm{sen}.\theta$, $\cos.\theta$ corrispondono ad un minimo della φ, ed i secondi ad un massimo; e conseguentemente per la quistione attuale sarà

$$\mathrm{tang}.\theta = \frac{k\cos.u + dI}{d\cos.u - kI}\,.$$

Se nella equazione (22) o nella sua equivalente

$$(\cos.n\cos.\theta + \mathrm{sen}.\theta\,\mathrm{sen}.n)\,\varphi = \cos.m\,\mathrm{sen}.\theta - \mathrm{sen}.m\cos.\theta$$

si pongano per $\mathrm{sen}.\theta$, $\cos.\theta$ i valori corrispondenti al minimo della φ, essa si riduce

$$(c+e\,\text{sen}\,.\,u-e\,I)\,\varphi=e+c\,\text{sen}\,.\,u+c\,I,$$

la quale dà

$$\varphi=\frac{e+c\,\text{sen}\,.\,u+c\,I}{c+e\,\text{sen}\,.\,u-e\,I}\,.$$

Moltiplicando per $d\cos.\,u+k\,I$ i termini della frazione valore trovato della tang.θ, e per $c+e\,\text{sen}\,.\,u+e\,I$ quelli del valore della φ, si ha

$$\text{tang}\,.\,\theta=\frac{d\,k+I\cos.\,u}{\cos.^2 u-k^2}\,.$$

$$\text{e}\ \ \varphi=(c\,e+\text{sen}\,.\,u+I):\ \cos.^2(r+n)$$

e però $S=(c\,e+\text{sen}\,.\,u+I)\,A:\ \cos.^2(r+n)$.

Se in questo valore della S si pongano per e, c i loro valori, si ha S *eguale* al prodotto di $A:\cos.^2(r+n)$ per la *somma* di

$$\text{sen}.n\cos.m+\cos.r\,\text{sen}.(r+u)+v\,\text{sen}.(r+n)$$

col radicale

$$\sqrt{(4\,\text{sen}.n\cos.m\cos.r\,\text{sen}.(r+u)+2[\cos.(r-m)+\text{sen}.u\,\text{sen}.(r+u)]v+v^2)}\,,$$

che è appunto ciò, che si avrebbe, cambiando nel valore della Q suddetto le r, t nelle $-r$, $-t$, ed il segno al radicale: come si è detto sopra.

Pel caso dell'angolo u retto si hanno immediatamente

$$\text{tang}\,.\,\theta=-\frac{d}{k}\,,$$

$$S=\frac{A}{\text{sen}.^2(r+m)}\,(c\,e+c+1+e)=\frac{A}{\text{sen}.^2(r+m)}\,(1+c)\,(1+e)\,;$$

e siccome per esso sono

$$d=-(c+e)\,\text{sen}\,.\,m\,,\ \ k=(c+e)\cos.\,m\,,$$

$$1+e=1+\cos.\,(r+m)=2\cos.^2\frac{\omega}{2}\,,$$

$$1+c=v+1+\cos.\,(r-m)=2\cos.^2\frac{\alpha}{2}+v\,;$$

così sarà

$$\text{tang}\,.\,\theta=\text{tang}\,.\,m\quad\text{ossia}\quad r+2x=180^\circ+m$$

$$\text{ed}\ \ S=A\left(2\cos.^2\frac{\alpha}{2}+v\right):\ 2\,\text{sen}.^2\frac{\omega}{2}\,,$$

cioè $x = 90^\circ - \frac{1}{2}\alpha$; ed

$$S = \frac{1}{2} p a^2 \left(\frac{\cos . \frac{\alpha}{2}}{\operatorname{sen} . \frac{\omega}{2}} \right)^2 \cos . m + a t \ \frac{\operatorname{sen} . r \cos . m}{2 \operatorname{sen}.^2 \frac{\omega}{2}} .$$

Questi valori dell'angolo x e della spinta S si possono avere anch' essi elementarmente.

Di fatto, in questo caso la equazione (20) o la sua equivalente, usata sopra, si riduce alla

$$(\cos.(\alpha+2x) + \cos.\omega)\, S = A \cos.(\alpha+2x) - A \cos.\alpha - b ,$$

che dà

$$S = A - \frac{2 A \cos . r \cos . m + b}{\cos . \omega + \cos . (\alpha+2x)} .$$

e però il minimo valore della S corrisponderà al massimo di questa frazione, cioè al minimo di $\cos.\omega + \cos.(\alpha+2x)$ e conseguentemente al minimo di $\cos.(\alpha+2x)$, che è l'unità *negativa*, avuto riguardo alla quistione concreta; e per tanto esso corrisponderà all' $x = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$, e desso medesimo sarà il trovato qui sopra, come si è veduto al principio di questo paragrafo. Anzi, da quest' ultima medesima espressione della S si manifestano eguali fra loro i valori di essa corrispondenti all' $\alpha + 2x = \pm\mu$, qualunque sia l'angolo μ.

Evidentemente nessuna porzione del terrapieno sdrucciolerà in basso lungo la rispettiva base, se la pressione esercitata dal piano A B contro il terrapieno medesimo sarà *maggiore* del massimo valore della Q trovato nel paragrafo antecedente; e nessuna di esse sdrucciolerà in alto, pure sulla sua base, se la pressione esercitata dal medesimo piano A B contro il terrapieno sarà *minore* del minimo valore della S trovato qui sopra; epperò volendo allontanare il pericolo sì dell' uno che dell' altro sdrucciolamento di una porzione qualunque di un dato terrapieno, la pressione del piano contro di esso *converrà* eguale ad una metà della somma dei valori massimo della Q e minimo della S sopra determinati, giacchè

così vi sarà la maggiore latitudine per le eventuali variazioni di essa, senza ridurre porzioni del terrapieno allo stato di sdrucciolare in basso od in alto lungo le basi rispettive; per cui può interessare di conoscere quelle porzioni del terrapieno appoggiate e premute dal piano AB, le quali in forza di questa o di altra pressione qualsivoglia D esercitata contro la scarpa del terrapieno medesimo, presentino le minime difficoltà, a sdrucciolare l'una in basso e l'altra in alto lungo le basi rispettive; e per tanto passo ad indicare la loro determinazione, limitandomi però, per evitare calcoli prolissi, al caso di m e t *nulli*, e di n, u angoli retti; cioè a trovare l'angolo x, che rende minima la quantità

$$\mathrm{D}\cos.(r-x) - \mathrm{A}.\,\mathrm{tang}.x\,\mathrm{sen}.(r-x)\,,$$

e quello che rende minima la seguente

$$\mathrm{D}\cos.(r+x) + \mathrm{A}.\,\mathrm{tang}.x\,\mathrm{sen}.(r+x)\,.$$

Eguagliando a *zero* le derivate prime prese rispetto all'x di queste due quantità, si hanno le equazioni

$$(\mathrm{D}\cos.^2x-\mathrm{A})\,\mathrm{sen}.(r-x) + \mathrm{A}\,\mathrm{sen}.x\,\cos.x\,\cos.(r-x)=0\,,$$

$$(\mathrm{D}\cos.^2x-\mathrm{A})\,\mathrm{sen}.(r+x) - \mathrm{A}\,\mathrm{sen}.x\,\cos.x\,\cos.(r+x)=0\,,$$

ossia

$$\lambda^3\,\mathrm{A}\cos.r + \lambda\,(2\mathrm{A}-\mathrm{D})\cos.r + (\mathrm{D}-\mathrm{A})\,\mathrm{sen}.r=0\,,$$

$$\xi^3\,\mathrm{A}\cos.r + \xi\,(2\mathrm{A}-\mathrm{D})\cos.r - (\mathrm{D}-\mathrm{A})\,\mathrm{sen}.r=0\,,$$

cioè le due seguenti

$$\lambda^3 + \left(2-\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{A}}\right)\lambda + \left(\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{A}}-1\right)\frac{1}{f}=0,$$

$$\xi^3 + \left(2-\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{A}}\right)\xi - \left(\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{A}}-1\right)\frac{1}{f}=0,$$

dove λ, ξ esprimono le tangenti degli angoli x sufficienti per individuare le due richieste porzioni del terrapieno.

Fra il massimo valore della spinta Q trovato nel paragrafo antecedente ed il minimo della S trovato in questo e gli angoli x ad essi corrispondenti vi sono relazioni, che possono

interessare, segnatamente le seguenti relative al caso dell'angolo *u retto*.

Le due equazioni

$$A\,\text{sen.}^2\frac{\omega}{2}=Q\cos.^2\frac{\alpha}{2}+\frac{b}{2},$$

$$S\,\text{sen.}^2\frac{\omega}{2}=A\cos.^2\frac{\alpha}{2}+\frac{b}{2},$$

le quali manifestano la spinta S formata colla quantità A, come questa quantità stessa è formata colla spinta Q, danno le due seguenti

$$\frac{S-A}{A-Q}=\left(\frac{\cos.\frac{\alpha}{2}}{\text{sen}.\frac{\omega}{2}}\right)^2,$$

$$S\,\text{sen.}^4\frac{\omega}{2}-Q\cos.^4\frac{\alpha}{2}=\frac{b}{2}\left(\text{sen.}^2\frac{\omega}{2}+\cos.^2\frac{\alpha}{2}\right),$$

che pel caso di $m=0$ e però di $\omega=\alpha=r$ si riducono la prima alla

$$\frac{S-A}{A-Q}=\cot.^2\frac{r}{2}\quad\text{ossia}\quad S\,\text{sen.}^2\frac{r}{2}+Q\cos.^2\frac{r}{2}=A,$$

e la seconda alla

$$S\,\text{sen.}^4\frac{r}{2}-Q\cos.^4\frac{r}{2}=\frac{b}{2}.$$

Le medesime due prime equazioni danno anco

$$S-Q=A\left(\frac{\cos.^2\frac{\alpha}{2}}{\text{sen.}^2\frac{\omega}{2}}-\frac{\text{sen.}^2\frac{\omega}{2}}{\cos.^2\frac{\alpha}{2}}\right)+\frac{b}{2}\left(\frac{1}{\text{sen.}^2\frac{\omega}{2}}+\frac{1}{\cos.^2\frac{\alpha}{2}}\right),$$

e però la

$$S=Q+A\left(\frac{v}{2}+\cos.r\cos.m\right)\left(\text{sen.}^{-2}\frac{\omega}{2}+\cos.^{-2}\frac{\alpha}{2}\right),$$

la quale rende visibile la totale variazione di cui sia suscettibile la spinta del piano contro il terrapieno, senza ridurre porzioni di esso nello stato di sdrucciolare.

Le stesse due equazioni poi pel caso di $t=0$ somministrano visibilmente

$$SQ = A^2 \text{ ed } S = Q\left(\frac{\cos.\frac{\alpha}{2}}{\text{sen}.\frac{\omega}{2}}\right)^4,$$

ed $S = Q \cot.^4 \frac{r}{2}$ nel caso di t ed m *nulli*.

Rappresentino (fig. 4) AB la scarpa del terrapieno, BH la faccia superiore di esso, AD una verticale, ed HA la scarpa naturale della terra senza tenacità; e la base di quella porzione del terrapieno, la quale corrisponde alla massima spinta Q sarà la retta AI, che divide pel mezzo l' angolo BAH; e quella della porzione corrispondente al minimo valore della spinta S sarà la AG facente l' angolo GAI eguale all' AHB inclinazione della scarpa AH: tutto questo emerge evidentemente dai valori $\frac{m}{2} + \frac{r}{2}$, $90 + \frac{m}{2} - \frac{r}{2}$ dell' angolo x corrispondenti a questi due delle Q, S.

V.

Siccome alcuni terrapieni hanno le figure dei profili analoghe alla ABCE... (fig. 5) ed alla massima spinta analoga alla Q, od alla minima analoga alla S contemplate pei terrapieni ordinarj, corrisponde una retta AD, che sega il prolungamento della BC; ovvero hanno le figure dei profili analoghe alla AFE, ma sopra di essi in vicinanza del ciglio hanno un corpo di terra od altro, il cui peso è costante per qualunque porzione del terrapieno stesso; così credo di trovare anco quelle spinte ad esercitarsi col piano AB contro le porzioni di essi, che sono atte a ridurre le porzioni di essi medesimi a quegli stati, che sono prossimi al moto l'uno per discendere e l' altro per salire lungo le rispettive basi, ammettendo però per semplicità la AB verticale e la CE orizzontale.

Si chiamino: a la retta AB, x l'angolo BAD; Q, S le spinte richieste: P_x o semplicemente P il peso totale cadente sulla base AD, ed h la differenza tra P ed il peso della porzione del terrapieno, che ha od avrebbe per profilo AFD.

Evidentemente si avranno le due equazioni

$$Q \cos.(r-x) - P \operatorname{sen}.(r-x) + t.AD.\operatorname{sen}.r = 0,$$

$$S \cos.(r+x) + P \operatorname{sen}.(r+x) + t.AD.\operatorname{sen}.r = 0,$$

le quali, per essere

$$AD = \frac{a}{\cos.x}, \text{ e } P = \tfrac{1}{2} pa^2 \operatorname{tang}.x - h,$$

dove l'h può essere quantità anco *negativa*, equivalgono alle

$$Q \cos.x \cos.(r-x) - \frac{a^2}{2} p \operatorname{sen}.x \operatorname{sen}.(r-x) + h \cos.x \operatorname{sen}.(r-x) + at \operatorname{sen}.r = 0,$$

$$S \cos.x \cos.(r+x) + \frac{a^2}{2} p \operatorname{sen}.x \operatorname{sen}.(r+x) - h \cos.x \operatorname{sen}.(r+x) + at \operatorname{sen}.r = 0$$

epperò alle seguenti

$$(25)\quad (Q-d) \cos.(r-2x) + h \operatorname{sen}.(r-2x) + (Q+d) \cos.r + l \operatorname{sen}.r = 0,$$

$$(26)\quad (S-d) \cos.(r+2x) - h \operatorname{sen}.(r+2x) - (S+d) \cos.r + k \operatorname{sen}.r = 0,$$

dove $d = \frac{1}{2} pa^2$, $l = h + 2at$, e $k = h - 2at$, colle quali si potranno determinare i valori delle Q, S corrispondenti a valori qualsivogliono dell'angolo x, ed anco i valori singolari di esse medesime.

Per esempio, il valore della Q per $x = \frac{r}{2}$, e quello della S per $x = 90^\circ - \frac{r}{2}$ saranno i soddisfacenti le due equazioni

$$Q - d + Q \cos.r + d \cos.r + l \operatorname{sen}.r = 0,$$

$$S - d - S \cos.r - d \cos.r + k \operatorname{sen}.r = 0$$

ossia le

$$2Q \cos.^2 \frac{r}{2} = 2d \operatorname{sen}.^2 \frac{r}{2} - 2l \operatorname{sen}.\frac{r}{2} \cos.\frac{r}{2},$$

$$2S \operatorname{sen}.^2 \frac{r}{2} = 2d \cos.^2 \frac{r}{2} - 2k \operatorname{sen}.\frac{r}{2} \cos.\frac{r}{2}$$

le quali danno

$$Q = d \operatorname{tang}.^2 \frac{r}{2} - l \operatorname{tang}.\frac{r}{2},$$

$$\text{ed } S = d \cot.^2 \frac{r}{2} - k \cot.\frac{r}{2}.$$

Passo a trovare il massimo valore della Q ed il minimo della S, ed anco gli angoli x ad essi corrispondenti, i quali faranno conoscere le due porzioni del terrapieno, l'una della più probabile discesa e l'altra della più probabile salita lungo le basi rispettive; e comincio a trovare il massimo della Q e l' angolo x ad esso corrispondente.

Si ponga $Q-d=\psi$, $r-2x=z$, $h\cos.r=e$, $2d\cos.r+l\,\text{sen}.r=c$, e $\cos.z+\cos.r=H$; e la equazione (25) si ridurrà alla

$$(27)\qquad H\psi+h\,\text{sen}.z+c=0,$$

colla quale, eliminando la ψ dalle due prime sue derivate rispetto alla z e corrispondenti alla $\psi'_z=0$, si hanno le

$$h+e\cos.z+c\,\text{sen}.z=0,$$

$$H\psi''+c\cos.z-e\,\text{sen}.z=0,$$

le quali manifestano, che pel massimo valore della Q dev'essere

$$\cos.z=\frac{cV-eh}{c^2+e^2}\quad\text{e}\quad\text{sen}.z=-\frac{ch+eV}{c^2+e^2}$$

e però

$$\text{tang}.z=\frac{ch+eV}{eh-cV}\quad\text{ossia}\quad\text{tang}.z=\frac{V+ce}{h^2-e^2}\,h,$$

dove $V=\sqrt{(c^2+e^2-h^2)}$ cioè

$$V=2\sqrt{(d\cos.r+at\,\text{sen}.r)(d\cos.r+at\,\text{sen}.r+h\,\text{sen}.r)}.$$

E siccome la prima derivata della stessa equazione (27), corrispondente alla $\psi'_z=0$, è

$$\psi\,\text{sen}.z-h\cos.z=0;$$

così sarà

$$\psi=h\cot.z=h\,\frac{eh-cV}{ch+eV}\quad\text{ossia}\quad\psi=\frac{ce-hV}{h^2-e^2},\ \text{cioè}$$

$$Q=d+(c\cos.r-V):\text{sen}.^2r.$$

Similmente, se per la equazione (26) si ponga

$S-d=\varphi$, $r+2x=y$, $2d\cos.r-k\,\text{sen}.r=c$, e $\cos.y+\cos.r=K$, essa si riduce alla

$$(28) \qquad K\phi - h\,\text{sen}.y + c = 0,$$

le cui prime derivate rispetto alla y e corrispondenti alla ϕ'_y ossia $\phi' = 0$ sono

$$\phi\,\text{sen}.y + h\cos.y = 0,$$

$$K\phi'' - \phi\cos.y + h\,\text{sen}.y = 0,$$

dalle quali, eliminando ϕ colla equazione stessa (28), si hanno le

$$h + e\cos.y - c\,\text{sen}.y = 0,$$

$$K^2\phi'' + c\cos.y + e\,\text{sen}.y = 0;$$

e per tanto pel minimo valore della ϕ si avrà

$$\text{tang}.y = \frac{eU - ch}{cU + eh},$$

ed il minimo stesso sarà $-h\cot.y$ epperò

$$\frac{eh + cU}{ch - eU}h \quad \text{ossia} \quad (c\cos.r + U)\,\text{sen}.^{-2}r,$$

dove $U^2 = c^2 + e^2 - h^2$ ossia

$$U = 2\sqrt{(d\cos.r + at\,\text{sen}.r)(d\cos.r + at\,\text{sen}.r - h\,\text{sen}.r)}.$$

Vale a dire sarà

$$S = d + (c\cos.r + U)\,\text{sen}.^{-2}r,$$

$$\text{e} \quad \text{tang}.y = (c\cos.r - U)\,h : (c^2 - h^2).$$

Non voglio ommettere la esposizione di quelle spinte o pressioni del piano contro il terrapieno, che riducono ogni porzione di questo a *pari* stabilità sì per un verso che per l'altro sulla base di essa: però, per semplicità terrò pei simboli x, m, n, t, p, A i medesimi significati già attribuiteli nei paragrafi antecedenti; e chiamerò P il peso della porzione corrispondente all' angolo x o questo aumentato o diminuito di altro peso, ed S la spinta richiesta per questa medesima porzione.

La difficoltà a vincersi per questa porzione del terrapieno, onde ridurla sulla sua base alle condizioni di equilibrio dall' alto al basso, cioè la sua stabilità per questo verso, sarà (fig. 3) espressa con

$$AC.t + fP\,\text{sen}.(x-m) + fS\cos.x + S\,\text{sen}.x - P\cos.(x-m),$$

e quella pel verso contrario con

$$A C . t + f P \operatorname{sen}.(x-m) + f S \cos.x - S \operatorname{sen}.x + P \cos.(x-m);$$

e però, affinchè esse siano eguali, dovrà essere

$$S \operatorname{sen}.x = P \cos.(x-m), \text{ cioè } S = P \frac{\cos.(x-m)}{\operatorname{sen}.x},$$

la quale è indipendente sì dal coefficiente f che dal t.

Questa proprietà della S di essere indipendente tanto dall' attrito quanto dalla tenacità merita di essere osservata, avendo essa luogo in molte altre quistioni concrete segnatamente di Architettura idraulica e di Statica architettonica; giacchè rende interessanti per la pratica varie quistioni, che sembrano puramente speculative, come feci riflettere, trattando dell' equilibrio delle volte.

Le medesime anzidette due stabilità saranno

$$A C . t + f P \operatorname{sen}.(x-m) + f S \cos.x,$$

le quali, pel valore trovato della S, si riducono ad

$$A C . t + \frac{\cos.m}{\operatorname{sen}.x} f P.$$

Pel caso di P peso di quella *sola* porzione di un terrapieno ordinario corrispondente all' angolo x, essendo

$$P = A \frac{\operatorname{sen}.x}{\operatorname{sen}.(n-x)}, \quad \text{si avrà } S = A \frac{\cos.(x-m)}{\operatorname{sen}.(n-x)},$$

la quale aumenterà coll' aumentarsi dell' angolo x; giacchè

$$S'_x = A \frac{\cos.(n-m)}{\operatorname{sen}.^2(n-x)}$$

è quantità *positiva*: e le stabilità corrispondenti saranno

$$(at \operatorname{sen}.n + A f \cos.m) : \operatorname{sen}.(n-x),$$

per cui aumenteranno anch'esse coll'ingrandirsi dell'angolo x.

E se questo terrapieno avrà la faccia superiore *orizzontale*, cioè sia $n = 90^\circ + m$, si avrà $S = A$. Dimodochè, se la spinta del piano contro questo terrapieno sarà *eguale* ad $\frac{1}{2} a^2 p \cos.m$, essa ridurrà una porzione *qualunque* del medesimo egualmente stabile sulla sua base sì per un verso che per l'altro, sebbene tali stabilità varieranno dall'una porzione all' altra, essendo esse

$$a\left(t + \frac{a}{2} p \cos.m\right) \cos.m : \cos.(x-m)$$

cioè funzioni dell' angolo x.

La equazione $S = A \frac{\cos.(x-m)}{\text{sen}.(n-x)}$ dà facilmente

$\text{tang}.x = (S \,\text{sen}.n - A \cos.m) : (S \cos.n + A\,\text{sen}.m)$,
cioè quella porzione del terrapieno, che per la pressione S contro la scarpa avrà le due suddette stabilità fra loro eguali.

Se la linea BCD (fig. 6) profilo della faccia superiore del terrapieno fosse curva, invece delle equazioni (2), (7) si avrebbero le seguenti

$$\text{sen}.(\alpha - x)\, S^{\circ} \varphi^2 dx - \frac{b}{2}\varphi = 0,$$

$$Q \cos.(r-x) - \tfrac{1}{2} p\, \text{sen}.(\omega - x)\, S^{\circ} \varphi^2 dx + t\varphi\, \text{sen}.r = 0,$$

ove φ esprime la retta AC suo raggio vettore corrispondente all' angolo $x = \text{BAC}$, colle quali si possono istituire alcune ricerche almeno curiose, che io ommetto.

Così, chiamate y, θ le rette BM, MN (fig. 3) parti successive e qualsivogliono della AB scarpa, e $Q(y)$ il massimo valore della spinta del terrapieno MBC contro la parte y del piano AB, cioè una funzione della y come $Q(a)$, massimo valore trovato nel paragrafo terzo per la Q, lo è della a; ed ammessa la *ipotesi*, che la parte

$$Q(y+\theta) - Q(y)$$

della spinta $Q(y+\theta)$ sia esercitata sulla parte $MN = \theta$ del piano AB, il *momento* della spinta $Q(a)$, per rispetto al punto A, sarebbe

$$S^{\circ}_{a}(a-y)\,Q'(y)\,dy \quad \text{e però} \quad S^{\circ}_{a} Q(y)\,dy;$$

e la forza $Q(a)$ si potrebbe supporre applicata a quel punto della retta AB, il quale avesse dal termine A la distanza eguale ad

$$\frac{1}{Q(a)} S^{\circ}_{a}\, Q(y)\, dy.$$

In questa Memoria ho supposto in generale la figura del terrapieno ordinaria ed ogni sua porzione un corpo solido, ed ho trascurato le tenacità e gli attriti lungo le faccie estreme di esso, come fecero coloro, che trattarono le quistioni già note sulla stabilità e l' equilibrio dei terrapieni; in altra favorevole occasione parlerò della stabilità e dell' equilibrio delle terre considerandole aggregati di molecule.

C E C F D B

Fig 3

A

H N K Q

F C D E

B

Fig 5

A

C

H

B

Fig 6

ig 4

A

Fig. 1

Fig. 3

Fig. 4

Fig. 6

SULL' AZIONE MAGNETIZZANTE

DELLE CORRENTI ELETTRICHE MOMENTANEE

MEMORIA VIII.

DELL' INFLUENZA DEL FERRO, ATTORNO A CUI CIRCOLA UNA SCARICA ELETTRICA, NELLA MAGNETIZZAZIONE DI ALTRO FERRO, ATTORNO AL QUALE CIRCOLA PURE LA SCARICA MEDESIMA.

DEL CAV. PROF. STEFANO MARIANINI.

Ricevuta il 4 Settembre 1846.

I. Il celebre Faraday ha scoperto che la corrente voltaica viene rinforzata dalla magnetizzazione del ferro che essa opera circolando attorno ad esso. La corrente della boccia di Leida riceverà essa pure un rinforzo dal ferro ch' essa magnetizza quando vi circola attorno? Le tante analogie già note fra la corrente voltaica e la Leido-elettrica offrono un valido argomento per rispondere affermativamente. Tuttavia io mi adoperai invano fin' ora a scoprire questo rinforzo per la vivacità o qualità delle scintille osservate nella scarica elettrica e quando essa magnetizza del ferro e quando non ne magnetizza. Vani mi riuscirono anche i tentativi per iscoprire differenza nelle contrazioni muscolari, come inutili furono quelli sulle combustioni e fusioni operate dalla boccia leidense. Il re-elettrometro, lo stromento cioè che indica la presenza delle correnti elettriche e la loro forza relativa mediante le alterazioni che esse producono nello stato magnetico del ferro, mi diede prove irrefragabili del rinforzo che trae la scarica elettrica dal ferro ch' essa magnetizza. E siccome solamente da questo istromento io trassi fin' ora gli argomenti del detto rinforzo; così mi limito a considerare in questa Memoria l' influenza che sull' azione

magnetizzante della scarica elettrica esercita il ferro da essa stessa magnetizzato.

Il vedere questo fenomeno è cosa di tutta facilità. Scaricata sull' elica d' un re-elettrometro la boccia di Leida, e notata la deviazione dell' ago calamitato prodotta dalla forza magnetica acquistata dal ferro esistente nell' elica stessa, si avvolga una delle appendici di questa attorno ad un tubo di vetro in guisa da formare un' altr' elica, e, dopo d' aver introdotto un ferro nel detto tubo, si scarichi di nuovo la boccia carica alla tensione di prima, ponendo l' armatura esterna in comunicazione coll' appendice libera dell' elica dello stromento, e l' interna coll' appendice libera dell' altr' elica; e la deviazione dell' ago magnetico sarà più grande che quella ottenuta nel primo esperimento.

Per esempio, colla scarica d' una boccia di mediocre capacità, ed essendo nell' elica un fascio di 400 fili sottili di ferro dolce e ricotto, ottenni la deviazione di 4.° Distrutto poi il magnetismo nel detto fascio, e rimesso nell' elica dello stromento, indi collocato un altro simile fascio nell' elica aggiunta, e poscia ripetuta la scarica precedente, la magnetizzazione conseguita dal ferro fu tale che l' ago stava deviato di 12.°

Veduto questo fenomeno, mi accinsi tosto a studiare l' influenza che hanno su di esso le qualità della scarica e dell' elica circondante il ferro, e del ferro stesso impiegato a rinforzare l' azione magnetizzante. E passai poscia a considerare le relazioni tra il detto rinforzo e le alterazioni che avvengono nello stato magnetico del ferro impiegato a produrlo.

PARTE PRIMA.

Esperienze istituite variando le circostanze della scarica, delle eliche, e dei ferri impiegati a rinforzare l' azione magnetizzante della boccia di Leida.

II. Nelle sperienze, che ora sono per descrivere, l' elica dello stromento (1) e l' elica aggiunta sono tra loro eguali e formate entrambe di un tubo di vetro del diametro esterno di due centimetri, lungo un decimetro e circondato da un filo di rame della grossezza di circa quindici centesimi di millimetro, coperto di seta, che vi gira attorno a forma di spirale o elica in tutta la sua lunghezza, e il numero de' giri è quaranta. Nell' elica che riposa sullo stromento si pone il ferro dalla cui magnetizzazione si vuole dedurre l' azione magnetizzante della scarica adoperata. Incomincio dal descrivere una serie di esperienze fatte con bocce di differente capacità e caricate tutte alla medesima tensione.

1.ª Ho messo nell' elica dello stromento un fascio di 200 fili di ferro ricotti, lunghi otto centimetri e mezzo, e pesanti tra tutti otto grammi; e nell' elica aggiunta non ho messo alcun ferro. Caricai alla tensione di sei gradi dell' elettrometro a doppio quadrante una boccia di Leida, ciascun' armatura della quale è di un decimetro quadrato, e la grossezza del vetro un millimetro: e feci passare la scarica di detta boccia pel filo formante le due eliche; e l' ago del magnetometro in forza del magnetismo acquistato dal ferro ch' era nella sua elica deviò di gradi 13.°

Distrutto quindi il magnetismo nel detto fascio, indi rimesso nell' elica dello stromento, e collocato un egual fascio

---

(1) Tale stromento s' appella *re-elettrometro* quando è adoperato per conoscere la qualità o la forza delle correnti elettriche, e *magnetometro* quando dalle sue indicazioni si desume la polarità, o la forza magnetica acquistata dal ferro sul quale opera la corrente elettrica.

di fil di ferro nell' elica aggiunta, ho replicata la scarica della detta bottiglia pur colla tensione di sei gradi, e la deviazione dell' ago fu di 15.°

2.ª Ritenuta al solito come unità di capacità quella della boccia adoperata nella precedente esperienza, ne istituii una eguale con una boccia, la capacità della quale è espressa dal numero 2. E la magnetizzazione conseguita quando non v' era ferro nell' elica aggiunta venne indicata dalla deviazione 10.°

E col solito fascio nell' elica aggiunta, la deviazione fu 12.° 30'.

3.ª La boccia di capacità 2, 4, colla solita tensione di sei gradi, senza il ferro nell' elica aggiunta produsse la deviazione di 12.°

E col fascio di fili di ferro nella detta elica la produsse di 15.°

4.ª La boccia di capacità 5 senza ferro nell' elica aggiunta fece deviare di 15.°

E col ferro solito in detta elica, 22.°

5.ª Una boccia di capacità 9, senza il ferro nell' elica aggiunta deviò l' ago di 17.°

E col ferro solito nell' aggiunta 37.° 30'.

6.ª Finalmente una giara di Leida di capacità 25, nel primo caso l' effetto da essa prodotto fu la deviazione 8.°

E nel secondo fu 24.°

III. Adoperando sempre la boccia di capacità 5 caricata a differenti tensioni ottenni li risultamenti che leggonsi compendiati nella seguente tabella:

Numeri indicanti le tensioni della boccia di Leida di capacità 5.	Numeri esprimenti le deviazioni prodotte da un fascio di 400 fili di ferro dolce e ricotto lunghi centimetri 8, 5, e pesanti tra tutti grammi 16, 3.	
	Senza ferro nell' elica aggiunta.	Con un egual fascio di fili di ferro nell elica aggiunta.
1.	10.°	12.° 30'.
2.	4.	10.
3.	4.	11.
6.	3.	17.
12.	3. 15.'	15.
18.	7.	20. 30.

IV. Anche quando la quantità di fluido elettrico scaricata è costante, ma varia la capacità della boccia, e per conseguenza anche la tensione, il rinforzo ha sempre luogo; come si scorge dalle sperienze registrate in compendio nella tabella che segue. Le altre circostanze sono come quelle delle sperienze già descritte.

Capacità	Tensione	Deviazione del Magnetometro	
Della boccia caricata sempre colla stessa dose di elettricità.		Quando non v'è il fascio di fili di ferro nell'elica aggiunta.	Quando v'è nell'elica aggiunta il detto fascio.
0, 5.	40.	11.°	17.°
1.	20.	7.	16. 15'.
2.	10.	8. 15'.	12.
5.	4.	5. 30.	8, 15.
9.	2, 2.	5. 40.	7. 15.
25.	0, 8.	4. 30.	7.
100.	0, 2.	3. 30.	4, 45.

V. Nella precedente Memoria si è notato che uno strato d'acqua di mediocre conducibilità assoluta messo nel circuito della scarica elettrica avvalora l'azione magnetizzante della scarica stessa. Volli pertanto osservare se, obbligando la scarica, oltre che ad attraversare lo strato d'acqua, anche a circolare attorno a del ferro, si avesse un maggiore rinforzo. Ed ecco ciò che l'esperienza mi ha dimostrato.

Messo un fascio di 175 fili sottili di ferro crudo nel magnetometro, ed obbligata la scarica della boccia di capacità 5, e carica alla tensione di 6 gradi, a traversare un prisma d'acqua ben salata lungo un centimetro e avente per base sei centimetri quadrati, non essendo alcun ferro nell' elica aggiunta, la deviazione fu 22.°

Tolto dal circuito il detto strato d'acqua, e ripetuta la scarica, la deviazione fu pure 22.°

Rimesso nel circuito lo strato d' acqua, e posto nell' elica aggiunta un fascio di 560 ferri sottili e ricotti, la deviazione fu 44.° 45'.

E questi risultati dimostrano che quando lo strato liquido è abbastanza conduttore da non portare alcun sensibile rinforzo nell' azione magnetizzante della scarica, allora il ferro messo nell' elica aggiunta rinforza l' azione medesima.

Quando per altro la conducibilità del liquido è tale che rinforza esso stesso l' azione magnetizzante della scarica, allora è tanto meno sensibile il rinforzo prodotto dal ferro messo nell' elica aggiunta, quanto più grande è il rinforzo prodotto dall' acqua: talmente che quando il liquido per la sua poca conducibilità porta il massimo o quasi massimo effetto, allora non è più percettibile il rinforzo recato dal ferro introdotto nell' elica aggiunta.

Avendo obbligata la solita scarica a traversare un prisma d' acqua di pozzo di due centimetri quadrati di base, e sei centimetri di lunghezza, essa in sei volte magnetizzò il fascio di 175 ferri crudi al segno, che questo teneva deviato l' ago di 77.°

E scaricata la boccia per la settima volta, non produsse che un' oscillazione appena percettibile.

E introdotto poscia il fascio di 560 fili ricotti nell' elica aggiunta, la scarica suddetta produsse pure soltanto una vivissima oscillazione di maniera che l' ago magnetometrico rimase sensibilmente dov' era, cioè a 77.°

VI. Fin qui l' elica aggiunta era destra come quella del magnetometro, onde magnetizzava il ferro nel medesimo senso di questa. L' esperienze istituite con un' elica sinistra dimostrarono aver luogo a circostanze pari un eguale rinforzo nell' azione magnetizzante pel ferro in essa collocato.

Così se l' elica aggiunta era più corta del ferro introdotto in essa, il rinforzo dell' azione magnetizzante della scarica aveva pur luogo. E poco notabili furono le differenze osservate quando l' elica corta aggiunta, invece di ricoprire la parte di mezzo del ferro introdotto in essa, ricopriva un' altra parte.

Le esperienze istituite con eliche di vario diametro mi dimostrarono che quando l' elica aggiunta è più ristretta, il rinforzo che avviene nella magnetizzazione è maggiore. Per esempio, quando l' elica aggiunta era del diametro di due centimetri, come quella dello strumento, messo nell' una e nell' altra un fascio di cento fili sottili di ferro, mediante la scarica della boccia di capacità 5 carica alla tensione di sei gradi, ebbi la deviazione di 16.° 30'. E sostituita alla detta elica aggiunta, un' altra del diametro di 16 millimetri, la deviazione fu 18.°

Che se l' elica aggiunta è molto grande, come sarebbe di quattro o più centimetri di diametro, allora, adoperando i fasci di ferro che usai nelle altre, non ottenni indizj di rinforzo. E adoperando grossi fasci di fili di ferro, capitarono de' risultati, i quali sembrami che meritino uno studio a parte (1).

VII. Se le eliche aggiunte sono due, e disposte in modo che la scarica elettrica debba percorrerle successivamente, ed entrambe contengano del ferro, il rinforzo dell' azione magnetizzante della scarica stessa è più grande che non quando l' elica aggiunta è una sola.

1.ª Ad un' appendice dell' elica dello stromento attaccai un' altr' elica eguale ad essa, e nell' appendice libera di questa un' altra eguale ne attaccai. Indi scaricai la boccia con sei gradi di tensione ponendo l' armatura esterna in comunicazione coll' appendice libera dell' elica dello stromento, e l' interna

---

(1) Ho osservato fra le altre cose:

1.° Che adoperando un' elica di quattro centimetri di diametro, nella quale il filo metallico forma dieci soli giri, e posti nella parte di mezzo, introdotto in essa un fascio di circa tre mila fili sottili di ferro dolce ricotto, questo, colla solita scarica, si magnetizza al contrario de' piccoli fasci.

2.° Che se i detti fili così magnetizzati, si percuotono o inflettono leggermente sviluppasi in essi una polarità più forte e nel senso di prima.

3.° Che proseguendo a provare e riprovare, li ferri si magnetizzano poi quasi sempre al solito.

4.° Che finalmente qualche volta calamitandosi essi al solito, facendogli poi soffrire qualche lieve percossa o flessione, s' invertono i poli.

coll'appendice libera della seconda elica aggiunta; e la deviazione fu 4.° 30'.

Messo un fascio di fili di ferro sottili e ricotti in numero di 400 in una delle dette eliche aggiunte, e ripetuta la scarica, la deviazione fu di 11.°

E replicata poi la scarica dopo di aver messo un fascio di fili di ferro eguale all'anzidetto anche nella seconda elica aggiunta, la deviazione fu di 15.°

E poichè l'ampiezza delle eliche lo permetteva, provai a collocare ambi li detti fasci in una sola di esse: ma in questo caso la solita scarica non produsse che la deviazione 12.° 30'.

2.ª Tolte le due eliche aggiunte nell'esperienza precedente, ne posi in loro luogo altre due l'una destra e l'altra sinistra. Scaricai al modo solito la boccia suddetta carica alla tensione di dodici gradi, mentre non v'era ferro in nessuna delle eliche aggiunte; e la deviazione fu di 13.°

Messo che fu un fascio di 100 fili sottili e ricotti di ferro nell'elica destra aggiunta, e rinnovata la scarica suddetta, la deviazione fu 21.°

Tolto il fascio dall'elica destra, e messo un altro fascio eguale nella sinistra, la deviazione prodotta da una scarica eguale alle precedenti fu parimente 21.°

Rinnovata l'esperienza col fascio nell'una e nell'altra, la deviazione fu 26.°

Collocati ambi li detti fasci nella spirale destra, indi scaricata la boccia come sopra, si ottenne 23.°

Ed ottenni risultato eguale allorchè feci l'esperienza con ambi li fasci nell'elica sinistra.

Messo di nuovo l'un de' fasci nella destra e l'altro nella sinistra 26.°

Ripetuta finalmente la scarica dopo aver tolto il fascio di fili da entrambe le eliche aggiunte, ottenni, come da principio, 13.°

VIII. Avendo aggiunto tre eliche a quella dello stromento, non ebbi indizio di ulteriore vantaggio nell'azione magnetizzante della scarica adoperata nelle sperienze del paragrafo

precedente. Bensì l' ottenni col far uso d' una boccia, la cui capacità è 1,2, carica alla tensione di 25 gradi. Ecco i risultati medii di quattro serie d' esperienze istituite a questo proposito.

Col fascio di fil di ferro in tutte tre le eliche aggiunte, ottenni la deviazione di . . . . 27.° 30′.

Col fascio in due qualunque di esse . . . . 25. —

. . . . . . in una . . . . 21. 30.

. . . . . . in nessuna . . . . 14. 30.

Ho provato a disporre due eliche aggiunte in modo che la scarica avesse a percorrerle contemporaneamente dividendosi fra le medesime, e nelle molte sperienze istituite vidi per lo più qualche maggior effetto quando v' era del ferro in entrambe, che non quando ve n' era soltanto in una. Ma il vantaggio era assai tenue.

Ho finalmente osservato con sette sperimenti essere indifferente che l' elica o le eliche aggiunte vengano collocate in luogo tale da essere invase dalla corrente prima che lo sia quella dello stromento, o dopo di essa.

IX. Vengo alle sperienze istituite con ferri di diversa qualità, e comincio da quelle in cui il ferro messo nell' elica aggiunta era eguale a quello dell' elica dello stromento.

Ferro ricotto. 1.ª Un cilindro di ferro ricotto lungo otto centimetri e pesante grammi 7, 2 mentre nell' elica dello stromento, e lasciata vuota l' elica aggiunta, colla scarica consueta ottenni la deviazione di 6.° 20′.

Replicata la scarica dopo aver distrutto il magnetismo nel detto ferro, e messo nell' elica aggiunta un altro ferro eguale al suddetto, la deviazione fu 9.° 30′.

2.ª Posto un cilindro di ferro lungo come il precedente, e pesante 26 grammi nello stromento, e niente nell' elica aggiunta, la solita scarica produsse 7.° 30′.

Ma quando v' era un ferro eguale all' anzidetto nell' elica aggiunta, la deviazione fu 9.° 40′.

3.ª La magnetizzazione prodotta dalla solita scarica in un fascio di quattro cilindri di ferro lunghi otto centimetri e mezzo e pesanti tra tutti grammi 8,8, era tale che deviava l' ago dello stromento di 7.° 15'.

E quando vi era un fascio eguale anche nell' elica aggiunta, la deviazione era di 13.°

4.ª La solita scarica attorno ad un fascio di 560 fili lunghi otto centimetri, e pesanti tra tutti grammi 17,8 lo magnetizzava al segno che, per risultato medio di sette sperienze deviava l' ago di 7.°

E dopo che fu collocato un fascio eguale nell' elica aggiunta. il medio risultato di sette sperienze fu la deviazione di 18.° 15'.

X. *Ferro crudo.* 1.ª Nell' elica del magnetometro ho messo un cilindro lungo centimetri 8,5 pesante 28 grammi, ed ho lasciata vuota l' elica aggiunta; e mediante la solita scarica ottenni la deviazione di 15.°

Messo un egual cilindro nell' elica aggiunta, e ripetuta la detta scarica ottenni 20.° 45'.

2.ª In ambe le eliche ho messo un tubo di lastra di ferro del diametro di 16 millimetri, lungo centimetri 8,5 e pesante grammi dieci, e colla solita scarica otteneva 19.° 30'.

Ma tolto il tubo dall' elica aggiunta, la scarica non produsse che la deviazione 15.° 30'.

3.ª Con un fascio di 175 fili lunghi 8 centimetri e pesanti otto grammi, collocato in ambe le eliche, colla solita corrente ottenni 50.° 30'.

Tolto il fascio dall' elica aggiunta, la detta corrente produsse la deviazione 31.°

XI. *Acciajo.* 1.ª Ho messo un cilindro d' acciajo temperato lungo centimetri 9, e pesante 13 grammi nell' elica del magnetometro e niente nell' aggiunta, e la deviazione prodotta dalla consueta scarica fu di gradi 5.°

E messo un egual cilindro nell' aggiunta ebbi 11.°

Eguali furono i risultati quando uno de' cilindri era stemprato, e l' altro no.

2.ª Un fascio di 5 fili lunghi 8 centimetri e mezzo, e pesanti grammi 2,2, messo nell'elica dello stromento, e niente nell' aggiunta, la deviazione fu 12.° 40'.

E messo un fascio eguale nell' aggiunta ottenni 16.° 50'.

XII. Fin qui io poneva sempre nell' elica aggiunta un corpo magnetizzabile eguale a quello posto nell' elica dello stromento. Nelle sperienze che ora passo a descrivere ho proceduto diversamente; e queste vennero istituite per conoscere le circostanze più favorevoli ad ottenere una più forte magnetizzazione da una data scarica elettrica.

1.ª Il fascio di cinque fili d' acciajo della seconda sperienza del §. precedente, spogliato che fu di magnetismo, fu posto nell' elica del magnetometro, e, scaricata la solita boccia colla tensione di sei gradi, la deviazione fu 13.°

E ripetuta la scarica dopo d'aver introdotto nell'elica aggiunta un fascio di 560 fili di ferro dolce e ricotto lunghi centimetri 8 e pesanti tra tutti 16 grammi, la deviazione fu 29.° 30'.

3.ª Tolto il detto fascio dell' elica aggiunta, e messo in suo luogo un cilindro di ferro lungo centimetri 8,5 pesante 23 grammi, la deviazione fu 16.° 30'.

3.ª Al cilindro suddetto sostituito un fascio di 400 fili di ferro crudo lunghi centimetri 8,5 pesanti 16 grammi, la deviazione fu 23.° 10'.

4.ª Messo nel magnetometro il fascio di 560 fili ricotti, e lasciata vuota l' elica aggiunta, la deviazione prodotta dalla solita scarica fu 3.° 30'.

E quando ebbi introdotto nell' elica aggiunta due lastre rettangolari di ferro lunghe 9 centimetri, e pesanti insieme grammi 13, 2 la deviazione fu di 5.° 30'.

5.ª Il cilindro d' acciajo dell' esperienza 1.ª del §. precedente lo misi nell' elica dello stromento, ed il fascio di 400 fili ricotti nell' elica aggiunta, mediante la solita scarica, l' ago deviò di 12.°

Tolto il fascio dell' elica aggiunta, un' eguale scarica produsse solo la deviazione 9.°

6.ª Lo stesso presso a poco si è osservato ripetendo quest' ultima esperienza dopo d' aver sostituito al detto cilindro d' acciajo temperato un altro cilindro ad esso eguale, ma stemprato.

7.ª Nell' elica del magnetometro ho messo un fascio di 175 fili di ferro crudo lunghi centimetri 8, 5 pesanti 8 grammi, e nulla misi nell' aggiunta: e la solita scarica produsse, per risultato medio di otto esperienze, la deviazione 21.° 40′.

E quando nell' elica aggiunta v' era un fascio di dieci fili d' acciajo lunghi centimetri 8, 5 pesanti tra tutti grammi 4, 5, la detta scarica, per risultato medio di altrettante esperienze, diede 29.° 10′.

8.ª Un fascio di 75 fili d' acciajo lunghi centimetri 8, pesanti tra tutti 20 grammi, messo nell' elica dello stromento mediante la solita scarica produsse, per risultato medio di tre sperienze, 35.° 40.

E dopo d' aver messo il fascio di 560 fili di ferro ricotti nell' elica aggiunta, il risultato medio di tre sperimenti fu 65.° 20′.

XIII. *Ferro con magnetismo dissimulato.* Un fascio di 500 fili di ferro ricotti lunghi centimetri 8, 5, pesanti tra tutti grammi 17, 8, fu messo nell' elica del magnetometro, e la solita scarica, mentre nessun ferro trovavasi nell' elica aggiunta, produsse la deviazione 4.° 45′.

Veduto ciò, ho messo nell' elica aggiunta un tubo di ferro magnetizzato con entro di esso un altro tubo del pari magnetizzato, e coi poli diretti al contrario, per cui li due tubi riuscivano reciprocamente neutralizzati quanto al magnetismo; e quindi rinnovata la scarica, la deviazione ottenuta fu 10.° 30′.

Esaminati poi li due tubi separatamente li trovai entrambi magnetizzati nel medesimo senso, e presso a poco con egual forza.

Li rimisi poscia di nuovo l' un dentro l' altro e coi poli opposti, e rinnovata la scarica ebbi 11.° 40′.

Rinnovata poi la scarica, tolti che furono li due tubi dall' elica in cui si trovavano, la deviazione ottenuta fu 4.° 30′, come presso a poco fu da principio.

XIV. *Ferro magnetizzato nell' elica dello stromento.* Quando la forza magnetica che possiede il ferro è prossima a quella che può fargli acquistare la scarica elettrica, allora è poco sensibile, e talvolta anche nullo il rinforzo proveniente dal ferro posto nell' elica aggiunta. Quando poi la forza che possiede il ferro è lontana dal detto punto ha luogo benissimo il detto rinforzo. E ciò è facile a vedersi sperimentando sopra fasci di fili di ferro non ricotti.

Che se, operando su ferro magnetizzato, la scarica vien diretta in modo da produrre smagnetizzazione è meno facile osservare l' effetto del ferro posto nell' elica aggiunta. E conviene ripetere più e più volte la scarica, fin che il suo effetto è ridotto ad un piccolo movimento nell' ago del magnetometro: ed allora, posto il ferro nell' elica aggiunta, e rinnovando la scarica stessa, vedesi un movimento alquanto più grande dell' ultimo che si è osservato.

Noi vediamo adunque dalle sperienze descritte che qualunque sia il ferro di cui vuolsi osservare la rinforzata magnetizzazione, e qualunque il ferro messo nell' elica aggiunta, mai non manca il fenomeno di cui qui si tratta. Ma per farmi strada a scoprire, se fia possibile, la cagione di tale rinforzo, giudicai opportuno di osservare se, e quale relazione vi fosse fra i cambiamenti che avvengono nello stato magnetico del ferro dell' elica aggiunta, e l' avvaloramento della forza magnetizzante della scarica elettrica.

PARTE SECONDA.

Esperienze dirette a far conoscere la relazione tra il rinforzo dell' azione magnetizzante della scarica elettrica, e le alterazioni che avvengono nello stato magnetico del ferro impiegato a produrlo.

XV. Il ferro collocato nell' elica aggiunta, destinato a rinforzare la magnetizzazione del ferro posto nell' altra elica,

verrà esso pure alterato nel suo stato magnetico dalla scarica elettrica. E v'ha tutto il fondamento di credere che da siffatta alterazione provenga il rinforzo. Importa adunque che passiamo ad esaminare quali relazioni vi sieno fra le alterazioni prodotte dalla scarica elettrica nel ferro dell' elica aggiunta, ed il rinforzo da esso prodotto nell' azione magnetizzante della scarica stessa.

A tale oggetto collocai anche l' elica aggiunta sopra una bussola, e nello stesso modo di quella del magnetometro, e mi accinsi prima di tutto ad indagare se il ferro che si magnetizza più fortemente per una data scarica, sia poi quello che rinforza anche maggiormente l' azione magnetizzante della medesima.

Egli è noto che una data scarica elettrica magnetizza più fortemente una data massa di ferro quando questa, invece di costituire un solo cilindro o prisma, è divisa in più cilindri o prismi o fili d' egual lunghezza; e che se in maggior numero sono i prismi che la formano, più forte ancora è la magnetizzazione (1). Volli pertanto vedere se, al crescere in questa guisa l' attitudine di magnetizzarsi d' una data massa, crescesse altresì l' attitudine di rinforzar l' azione magnetizzante della scarica elettrica.

Compendierò nella tabella qui contro registrata una delle serie d' esperienze istituite a quest' oggetto. In essa volli anco tener conto dei rinforzi conseguiti dai diversi fasci di fili di ferro adoperati, e ciò per vedere se, coll' attitudine di magnetizzarsi più fortemente al crescere del numero de' fili ond' è formata una data massa di ferro, crescesse ancora l' attitudine di mostrare il rinforzo accennato nell' azione magnetizzante della scarica.

---

(1) Veggasi la Memoria III sull' azione magnetizzante delle correnti elettriche momentanee.

Numeri esprimenti quanti fili di ferro lunghi otto centimetri entrano a formare il fascio d'egual lunghezza, e pesante 28 grammi.	Deviazioni magnetometriche indicanti la forza magnetica conseguita da una data scarica dal fascio di fil di ferro.		Deviazioni indicanti il rinforzo prodotto nella magnetizzazione d'un fascio di 180 fili di ferro ricotti lungo centim. 8, 5, pesante grammi 10.
	Quando non v'è ferro nell'elica aggiunta.	Quando vi è ferro nell'elica aggiunta.	
1.	8.°	11.°	5.°
4.	10.	16.	13.
22.	15.	19.	16.
39.	15. 30'.	20. 30.'	19.
72.	19.	49.	21.
122.	27.	54.	22. 30'.

La serie de' numeri della seconda colonna mostra che al crescere de' fili componenti una data massa di ferro, cresce la suscettibilità di magnetizzarsi. I numeri della quarta colonna mostrano che crescendo la detta suscettibilità, in questa circostanza cresce anche il rinforzo prodotto nell'azione magnetizzante della scarica, e quelli della terza indicano che i fili più suscettibili di magnetizzarsi, perchè in maggior numero, sono più suscettibili di sentire il rinforzo prodotto nell'azione magnetizzante della scarica elettrica da un ferro o fascio di ferri che si trova in un' altr' elica, nella quale circola pure la scarica elettrica.

Anche il ferro ricotto rinforza più quando è più diviso. Un fascio di quattro fili lunghi otto centimetri, pesanti tra tutti grammi 28, mediante la scarica della detta boccia carica alla tensione di sei gradi si calamitava al segno da deviar l' ago di un sol grado, e calamitava il solito fascio dell' altr' elica a segno che deviava l' ago di 20.°

Un fascio di 22 fili eguali in lunghezza e nel peso complessivo a quelli del fascio suddetto acquistavano per la detta scarica la forza indicata dalla deviazione 1.° 30', e magnetizzavasi l'altro ferro al segno che deviava l' ago di 23.°

Ed un fascio di 72 fili come sopra, che magnetizzavasi come 4, avvalorava l'azione magnetizzante in modo che l'ago sottoposto al solito fascio deviava di 32.°

E altrettanto può dirsi dell' acciajo, come dimostrano le due seguenti esperienze.

1.ª Due fili d'acciajo lunghi centimetri 8, del peso complessivo di 4, 6 grammi, posti essi soli nell' elica aggiunta, mediante la scarica della solita boccia carica alla tensione di 8 gradi di tensione, magnetizzavasi tanto da deviar l'ago di 17.°

Tolti questi dall' elica aggiunta, e messo il solito fascio nell'altra, la magnetizzazione conseguita da questo era indicata da 9.°

Collocati li detti due fili nell' elica aggiunta, ed il fascio solito nell' altra, la deviazione prodotta dai due fili 20.° 30'; e quella prodotta dal detto fascio 12.°

2.ª Un fascio di 24 fili d' acciajo lunghi otto centimetri e pesanti quanto i due dell' esperienza precedente, acquistò mediante l' anzidetta scarica la forza magnetica espressa da 28 gradi quando non v' era ferro nell' altr' elica, e produsse la deviazione di 71.° e quando v' era il solito fascio nell' altra, e la magnetizzazione indicata dal solito fascio fu indicata da 16.° 30'.

XVI. Non sempre però alla maggiore suscettibilità di magnetizzarsi, di cui è dotato il ferro corrisponde una maggiore attitudine di rinforzare l' azione magnetizzante della scarica elettrica. Che anzi occorre spesso di osservare che di due ferri assai fra loro differenti nella suscettibilità di calamitarsi, le loro attitudini a rinforzare l' azione magnetizzante della scarica, o sono poco differenti, o pressochè eguali, o anco talvolta si mostra più atto a rinforzare quello che meno si magnetizza per una data corrente.

1.ª Un fascio di 75 fili d' acciajo lunghi 8 centimetri, e pesanti 20 grammi, messo nell' elica aggiunta, mediante la scarica della boccia solita carica alla tensione di sei gradi, calamitavasi al segno da deviare il magnetometro di 20.°

Ed un fascio di 13 fili di ferro ricotti lunghi 8 centim., e pesanti grammi 52,7, magnetizzavasi mediante una scarica eguale alla suddetta solo al segno da deviar l'ago dello stromento di 1.° 30'.

Messo pertanto nell'elica del magnetometro il fascio di 180 fili delle sperienze del §. precedente, questo, mediante la detta scarica, se nell'elica aggiunta v'era il fascio de' 13 fili d'acciajo, magnetizzavasi al segno da deviar l'ago di 21.°

E se al detto fascio di fili d'acciajo sostituivasi l'altro di ferro ricotto, la deviazione era 20.° 40'.

2.ª Colla boccia carica alla tensione di 12 gradi poco differirono dalle notate nell'esperienza precedente le forze magnetiche che acquistavano li due fasci quando non v'era ferro nell'elica dello stromento. E quando poneva in questa li 180 fili ricotti, questi conseguivano la forza magnetica espressa da 26, qualunque de' due suddetti fasci si trovasse nell'elica aggiunta.

3.ª Mediante una piccola boccia, la capacità della quale era circa la quinta parte di quella delle sperienze precedenti, carica a 12 gradi, magnetizzava il fascio di fili d'acciajo tanto che teneva deviato l'ago di 90.°; ed il fascio de' 13 fili di 14.° Pertanto il rinforzo prodotto dal primo era di 26.°, e quello prodotto dal secondo di 25.° 30'.

4.ª Un fascio di 500 fili ricotti, il quale colla scarica di detta boccia carica alla tensione di 24 gradi acquistava sol la forza di deviare il sottoposto ago di 18.°, avvalorava tanto la magnetizzazione del solito fascio di 180 fili che teneva deviato l'ago di 35.° Mentre il fascio di fili d'acciajo, il quale a circostanze pari deviava l'ago di oltre 90.°, rinforzava notabilmente meno la magnetizzazione del fascio di 180 fili, poichè questo non teneva l'ago che a 29.°

XVII. Anche quando io magnetizzava con masse di ferro eguali ed egualmente divise, ma dotate di suscettibilità differente, trovava che alla maggiore suscettibilità non corrispondeva sempre la maggiore attitudine a rinforzare.

1.ª Colla solita boccia di capacità 5 carica alla tensione di 12 gradi, la quale scaricata sul magnetometro produceva

la deviazione di 20.°, se nell'elica aggiunta poneva un fascio di 123 fili ricotti (il quale colla detta scarica deviava sol di tre gradi l' ago ad esso sottoposto), la deviazione dello stromento era di 31.°

E ponendo nell' elica aggiunta un fascio pur di 123 fili eguali a quelli del fascio predetto, ma crudi (il qual fascio nella detta circostanza deviava di 22.° 30'. l'ago ad esso sottoposto), la deviazione dello stromento era 36.°

2.ª Quando poi la suddetta boccia aveva la tensione di due gradi, nel qual caso deviava lo strumento sol di 14.°, se nell'elica aggiunta era il fascio di 123 fili ricotti (che da soli non conseguivano che la magnetizzazione espressa da 2.°), l' effetto sul magnetometro era di 20.°

Ed il fascio di fili crudi (il quale da se acquistava mediante la detta scarica la magnetizzazione espressa da 30.°) calamitava il fascio del magnetometro solo al segno da tener l'ago a 13.°

XVIII. Si è già veduto al §. XIV che quando il ferro è magnetizzato, e specialmente se è prossimo al grado di forza, che con una data scarica replicata può conseguire, piccolo è il rinforzo che si ottiene ponendo del ferro nell' elica aggiunta. Ora vogliamo osservare il rinforzo che nasce in un altro ferro quando nell'elica aggiunta si ponga un ferro già magnetizzato.

1.ª Ritenuto nell'elica del magnetometro il fascio di 180 fili di ferro ricotto, il quale colla solita boccia carica alla tensione di dieci gradi calamitavasi al punto da tener l' ago deviato di 16.°, ho messo nell' elica aggiunta un cilindro di ferro crudo lungo 8 centimetri e pesante grammi 13, 85 non magnetizzato. Invasi quindi le due eliche con una scarica eguale alla suddetta; e la magnetizzazione acquistata dal detto cilindro venne espressa dalla deviazione 9.°, e quella acquistata dal fascio da 20.° Distrussi il magnetismo di quest' ultimo, e lasciai il cilindro con quello che aveva, e, rinnovata la scarica, l'ago sottoposto al detto cilindro da 9.° si portò a 15.°, e l'ago sottoposto al fascio si portò da zero a 20.° 30'.

Rinnovata quest' ultima prova, il cilindro mandò l' ago da 15.° a 19.°, ed il fascio da 0.° a 22.°

Rinnovata ancora, il cilindro mandò l' ago da 19.° a 21.°, ed il fascio da 0.° a 19.

E così replicata molte volte questa prova, ho sempre veduto che anche quando l' aumento nella forza magnetica del cilindro era di un solo grado, e persino d' una frazione di grado, l' azione magnetizzante veniva rinforzata poco meno di quando, per essere il cilindro nello stato naturale, l' alterazione nel suo stato magnetico riusciva molto più grande.

2.ª Al cilindro dell' esperienza precedente venne sostituito un fascio di 22 fili di ferro crudo lunghi otto centimetri e pesanti tra tutti grammi 28. Questo alla prima scarica della boccia (carica come nell' esperienza precedente) acquistò la forza da deviar l' ago a lui sottoposto di 39.°, e rinforzò l' azione magnetizzante in modo che il solito fascio di ferro dolce che trovavasi nell' altr' elica deviò l' ago di 31.°

Alla seconda scarica (eguale alla precedente), il primo de' detti ferri fece passar l' ago da 39.° a 68.°, e l' altro fascio da zero a 32.°

Alla terza il primo de' detti aghi passò da 68 a 69.° 45', e l' altro da 0.° a 28.°

Alla quarta il primo ago andò da 69.° 45' a 70.° 40', e l' altro da 0.° a 26.° 30'.

Alla quinta il primo fascio fece retrocedere l' ago da 70.° 40' a 70°, e l' altro fascio si magnetizzò ancora in modo da far passare l' ago a lui sottoposto da 0.° a 26.° 30'.

Estratto il fascio di ferri crudi dall' elica, e poi rimesso nella medesima in contraria posizione, teneva l' ago a — 60.° E rinnovata la scarica, l' ago sottoposto al detto fascio passò da — 60.° a — 11.°, e l' altro da 0.° a 25.° 30'.

Replicata la scarica, il primo ago passò da — 11.° a + 8.°, e l' altro da 0.° a 26.° 30'.

E così istituite molte altre serie d' esperienze simili alle due qui sopra descritte ho veduto che il più delle volte ad un

grande cangiamento nello stato magnetico del ferro rinforzante, corrisponde un rinforzo un poco più grande. Ma la differenza era sempre di minore momento che non quella delle alterazioni avvenute nella forza magnetica di esso ferro rinforzante.

XIX. Se il fenomeno di cui si tratta nasce da una corrente a cui dà luogo il ferro nell' atto che si magnetizza, la quale modifichi la corrente della scarica in guisa da avvalorarne l' azione magnetizzante, sembra che vi dovrebbe essere una relazione più pronunciata tra la forza magnetica che acquista o perde il ferro, ed il rinforzo da esso prodotto nell' azione magnetizzante della scarica stessa. Ma il vedere che quand' anco l' alterazione nello stato magnetico del ferro sia minima, pure rinforza notabilmente l' azione magnetizzante della scarica, indurrebbe a conchiudere che il ferro sull' elica aggiunta, anche indipendentemente dalla corrente, alla quale per avventura dà origine nell' atto che si magnetizza, ha la proprietà di produrre il detto rinforzo. Inoltre, se nell' atto che il ferro si magnetizza dà origine ad una corrente, la direzione di questa sarà in relazione col senso in cui il ferro viene polarizzato. Se adunque da questa corrente viene modificata quella della scarica elettrica, tale modificazione sembra ch' esser dovrebbe contraria, se contraria è la polarizzazione magnetica che nasce nel ferro. Eppure noi abbiamo osservato nel precedente paragrafo che quando il ferro dell' elica aggiunta trovasi avere la massima forza magnetica che con una data scarica e in una data circostanza può conseguire, molte volte avviene che quella scarica smagnetizza alquanto il ferro; e non di meno anche in siffatti casi non manca un tal quale rinforzo nell' azione magnetizzante.

Ma vi ha di più che si può preparare il ferro magnetizzato in guisa che, agendo sopra di lui con una data scarica, essa lo polarizzi al contrario del solito. Eppure un tal ferro rinforza anch' esso l' azione magnetizzante della scarica elettrica. Vediamolo con qualche sperienza.

1.ª Nell' elica del solito stromento ho messo un fascio di 183 fili di ferro ricotti, lunghi otto centimetri e mezzo, in peso otto grammi. Esso magnetizzavasi al punto di deviar l' ago di 8.° quando scaricavasi sull' elica che lo conteneva (ed alla quale erane aggiunta un' altra) la solita boccia carica alla tensione di tredici gradi. Quando poi nell' elica aggiunta eravi un fascio di 250 fili di ferro ricotti lunghi dieci centimetri, e pesanti tra tutti 13 grammi, allora la detta scarica magnetizzava il primo fascio al segno che deviava l' ago di 26.° Ed il fascio dell' elica aggiunta deviavalo di 6.° 30'.

A questo punto levai il fascio dall' elica del solito stromento, e ridussi a zero la sua polarità; quindi tormentai l' altro fascio ch' era nell' elica aggiunta con sei scariche della detta boccia carica alla piccola tensione di un grado e mezzo. Con che avvalorai la sua forza magnetica tanto che teneva deviato l' ago di 40.° 30'.

Rimisi allora l' altro fascio nella prima elica, e, caricata la boccia alla tensione di 13 gradi, la scaricai al solito sulle due eliche, e gli effetti furono, che il fascio dell' elica aggiunta perdè tanto di forza magnetica che non teneva più deviato l' ago a 40.° 30', ma a 10°, e quello della prima ottenne un rinforzo eguale a quello conseguito quando il ferro dell' aggiunta conseguiva la forza espressa da 8.°; esso teneva l' ago deviato a 26.°

2.ª Un fascio di 122 fili di ferro non ricotti, lunghi otto centimetri, e pesanti tra tutti 28 grammi, fu messo nell' elica aggiunta, e mentre nell' altra v' era il ferro dell' esperienza precedente, conseguiva, mediante la solita boccia carica alla tensione di 14 gradi, la forza magnetica espressa dalla deviazione 8.°

Ho tormentato il detto ferro con un buon numero di scariche a piccole tensioni, finchè esso teneva l' ago a 17.°

Allora estrassi il detto ferro dall' elica in cui si trovava, e vel rimisi tosto rivolto al contrario ed esso teneva l' ago deviato al contrario, cioè a — 15.°

Caricai quindi la boccia a 14 gradi di tensione, e, scaricata al solito sull' elica, la magnetizzazione del ferro dell' elica aggiunta crebbe in modo che l' ago si portò da — 15.° a — 24°, e la magnetizzazione del fascio del magnetometro fu presso a poco eguale a quella che si ebbe nella prima prova, esso deviò l' ago di + 25.°

Avendo così veduto che, anche quando il ferro viene dalla scarica elettrica magnetizzato al contrario di quello che suole, esso ferro non manca di rinforzare l' azione magnetizzante della medesima, volli osservare se, collocato il ferro esteriormente all' elica aggiunta invece che dentro di essa avvalorasse pure l' azione magnetizzante della scarica che l' invade. Le esperienze fin' ora da me istituite su questo argomento con istrati di fili di ferro circondanti l' elica, mi lasciarono incerto (1). Ma un cilindro di ferro del diametro interno di centimetri 2, 6 e pesante grammi 356, nel quale venne introdotta l' elica, fece sì che l' ago magnetometrico deviò di 40.°, mediante una scarica, colla quale l' ago stesso non veniva deviato se non che di 29.° quando l' elica aggiunta non era circondata da quel cilindro.

XX. Che il ferro nel momento che viene magnetizzato dalla scarica elettrica produca una corrente di induzione è per me un fatto ben dimostrato, e formerà l' argomento di una delle Memorie che seguiranno a questa, e si vedrà in essa io spero, se la detta corrente indotta abbia o no relazione col fatto in discorso. Ma frattanto, l' aver veduto che anco delle minime alterazioni nello stato magnetico d' un ferro già calamitato, avvalorano l' azione magnetizzante poco meno di quel che facciano le grandi, fece nascere in me il sospetto che quel ferro nell' elica aggiunta potesse generare il rinforzo

(1) Bensì ho osservato che uno strato di fili di ferro che involge un elica (ed anche un fascio collocato accanto ad essa) rinforza notabilmente la magnetizzazione operata dalla scarica che la invade sul ferro posto nell' interno dell' elica stessa. E reciprocamente la magnetizzazione del ferro esterno è rinforzata dal ferro interno. Di questo fatto cadrà opportuno il discorso in alcuna delle seguenti Memorie.

indipendentemente dalla sua qualità di corpo magnetizzabile. E passai perciò ad indagare se altri metalli messi nell' elica aggiunta avessero virtù di rinforzare l' azione magnetizzante della scarica elettrica. Pertanto nella Memoria che segue tratterò delle sperienze istituite su quest'argomento; e pongo fine alla presente col notare qui le principali proposizioni.

1.ª La magnetizzazione operata dalla scarica della boccia di Leida nel ferro che si trova in un' elica metallica riesce più forte quando alla detta elica siane aggiunta un'altra contenente pure del ferro, e la scarica scorra anche per quest' elica aggiunta.

2.ª Tale rinforzo riesce comunque sia preparato o foggiato il ferro posto nelle due eliche: nè importa che quello dell' una sia o non sia eguale a quello dell'altra; nè che la scarica sia forte o debole, la boccia più o meno capace, la seconda elica eguale o più lunga o più corta, più ampia o più ristretta, avvolta nel medesimo senso, o in senso contrario della prima.

3.ª Ha luogo questo rinforzo anche quando la scarica della boccia traversa uno strato d' acqua, semprechè la poca conducibilità di esso strato non sia tale da produrre già per se stesso un rinforzo notabile nell' azione magnetizzante della scarica medesima.

4.ª Se l' elica aggiunta è più ristretta, il rinforzo nell' azione magnetizzante riesce più grande.

5.ª Quando le eliche aggiunte sono due, e disposte in modo che la scarica le percorra successivamente e non simultaneamente, il rinforzo è più grande che non quando è una sola l' elica aggiunta, e sebbene in questa si pongano tutti i fili di ferro contenuti nelle due. E qualche vantaggio si ottiene anche aggiungendo una terza elica ove la boccia sia di poca capacità e carica ad alta tensione.

6.ª Al crescere il numero de' fili componenti una data massa di ferro, cresce (colla suscettibilità di magnetizzarsi) l' attitudine di rinforzare l' azione magnetizzante della scarica elettrica, come pure la suscettibilità di sentire il rinforzo pro-

dotto nell' azione magnetizzante da altro ferro che si trova in un' altr' elica, nella quale circola pure la scarica stessa.

7.ª Fuori del caso contemplato nella proposizione precedente, rare volte è dato di osservare che alla maggiore suscettibilità di magnetizzarsi corrisponda nel ferro maggiore attitudine a rinforzare l' azione magnetizzante della scarica elettrica. E spesse volte si osserva che due ferri assai differenti fra loro rapporto alla detta suscettibilità, sono pressochè eguali nell' attitudine di rinforzare l' azione magnetizzante, e talvolta si mostra più atto a rinforzare quello che meno si magnetizza per una data corrente.

8.ª E neppure quando si sperimenta con masse di ferro eguali ed egualmente divise, ma dotate di differente suscettibilità a magnetizzarsi, si osserva che alla maggiore suscettibilità corrisponda sempre la maggiore attitudine a rinforzare l' azione magnetizzante.

9.ª A produrre un notabile rinforzo nell' azione magnetizzante non è punto necessario che la scarica operi un grande cangiamento nello stato magnetico del ferro destinato a rinforzare. Che anzi talvolta ad una minima alterazione nello stato magnetico del ferro corrisponde un rinforzo notabile nell' azione magnetizzante della scarica elettrica.

10.ª Finalmente tale rinforzo ha luogo anche quando il ferro dell' elica aggiunta è magnetizzato in modo, che la scarica elettrica lo magnetizza in senso contrario a quello che suole.

SULLA CAGIONE DELLA LUCE AZZURRA
CHE ILLUMINA LA GROTTA DI CAPRI
LETTERA
DIRETTA AL SIGNOR DOTTOR FRANCESCO GERA

DAL SIGNOR CAVALIERE MACEDONIO MELLONI

SOCIO ATTUALE

(*Inviata alla Società il* 15 *Dicembre* 1846.)

Chiar.[mo] *Sig. Dottore.*

Quand' ella volle comunicarmi, alcuni mesi fa, il suo divisamento di raccogliere in un volume varie notizie e disegni relativi ai dintorni di Napoli, e richiese la mia opinione intorno alla cagione della luce azzurra che illumina la grotta di Capri, io le dissi, se ben mi sovviene, che quantunque fossi persuaso della somma semplicità dell' argomento, tuttavia per confermare questo pensiero occorrevano alcune sperienze dalle quali avrei forse tratto i documenti necessarj a trasfondere il parer mio nell' animo de' suoi lettori.

Siffatte sperienze, ritardate per diversi motivi indipendenti dalla mia volontà, furono poscia eseguite; e vengo ora a compiere l'assunto impegno, non senza invocar prima l'indulgenza sua e quella delle gentili persone che avran la pazienza di leggere da capo a fondo questa rozza scrittura.

La grotta azzurra di Capri è situata nella costa dell' isola che guarda il golfo di Napoli, sotto lo stesso meridiano del Capo di Posilipo, appiè d'un' alta rupe che corre generalmente da levante a ponente, e si profonda a perpendicolo nel mare:

la sua volta s' innalza da diciotto a venti metri sopra il livello delle acque, che v' han libero accesso, e il fondo scende d' altrettanto, e forse più verso la parete rivolta alla marina.

Essa non riceve giammai la luce diretta del sole: i raggi ripercossi dall'atmosfera v'entran deboli e fiochi per la breve, angusta e bassissima apertura che serve d' ingresso alle barche, e vi penetrano soltanto assai vive quelle irradiazioni che passano sotto il masso dell'attigua parete; il quale masso non scende già nel mare come il resto della rupe, ma pesca solamente di alcuni piedi sotto la superficie. Il colore azzurro, che vedesi emergere copiosamente da questo lato è dunque dovuto alla luce che traversa l' acqua.

Ora, siccome parecchie sostanze diafane manifestano una colorazione variabile colla grossezza dello strato, così potrebbe darsi che il color verde-glauco del mare, proprio delle onde e de' siti poco profondi, si tramutasse in ceruleo ad una profondità maggiore, e che le particelle del liquido riverberassero nell' interno della grotta una luce resa turchina per semplice trasmissione. Questa spiegazione sembrava tanto più plausibile che, secondo un' antica sperienza, l' acqua del mare cangierebbe in rosso il suo color glauco ad una certa distanza dalla superficie. Newton riferisce infatti che Halley essendo calato di giorno nel mare entro la campana da palombaro, egli vide alla profondità di alcune braccia la parte superiore della propria mano tinta in rosso dai raggi solari che la percuotevano attraversando lo strato d'acqua soprastante ed il vetro di cui era fornita la sommità dell' apparecchio. Ma siffatta osservazione non va immune da obbiezioni; perchè lo stato di compressione cui Halley trovavasi sottoposto entro la campana poteva aver alterata la percezione normale de' colori: d'altra parte la nuova colorazione manifestata poteva benissimo essere apparente, non vera, l' interno dell' apparecchio illuminato dalla solita luce glauca del mare, e la sensazione del rosso sull' incarnato della mano destata soltanto per virtù di quel curioso fatto fisiologico a cui è dovuta la classe de' fe-

nomeni ottici conosciuti nella scienza sotto il nome di *colori accidentali o di contrasto*.

Per togliere queste obbiezioni bastava guardare, a traverso il liquido, i raggi lucidi direttamente, e nelle condizioni ordinarie di pressione atmosferica. Io feci pertanto costruire due specie di tini o vasi cilindrici di legno chiusi nel fondo, aperti alla sommità. Il primo era alto tre metri ed abbastanza ampio onde una persona potesse entrarvi comodamente calando dall' alto mediante alcune mensole laterali: sul fondo stava un seggiolino, e dirimpetto un pertugio chiuso da un vetro. Il secondo cilindro, alquanto più stretto e meno alto del primo di una quantità uguale a sei decimetri, era esso pure munito presso il fondo di un' apertura e d' un vetro contro il quale stava, a breve distanza, una lucerna. Questi due recipienti si fecero pescare dal lato chiuso entro il mare, per modo che mezzo metro circa della loro estremità aperta emergesse dalla superficie di livello, ma in condizioni alquanto diverse: perchè il vaso maggiore stava fisso tra quattro pali presso la riva, il minore era saldamente raccomandato alla poppa di una navicella. In siffatta disposizione di cose, una persona seduta di notte, a suo bell' agio, entro il recipiente fisso e respirando l' aria libera, poteva osservare lungo uno strato orizzontale d' acqua, distante due metri circa dalla superficie, il lume contenuto nel recipiente mobile, e notare le alterazioni che succedevano nel colore e nella energia della luce trasmessa di mano in mano che, allo scostarsi della navicella, s' aumentava la quantità d' acqua interposta. Si profittò per questa sperienza del quarto giorno di perfetta calmeria che regnò nelle acque di questo golfo sul principio di Settembre p. p. Le osservazioni furon fatte sulla costa di Posilipo, a mezzo miglio circa dalle ultime case di Mergellina, e precisamente nel primo seno di mare posto oltre la villa del Duca di Roccaromana, il quale ci offrì cortesemente tutto quanto potesse occorrere durante le nostre operazioni. Quelle acque, naturalmente limpide e lontane dalle cloache della

capitale, trovavansi per la lunga quiete in condizioni favorevolissime alla trasmissione della luce. Allestita ogni cosa a dovere, alcuni marinari s' addestrarono prima a condurre la navicella per modo che il finestrino del vaso cilindrico ad essa aderente fosse costantemente rivolto contro il finestrino del gran vaso piantato sul lido, e quando li vidi eseguire questo movimento colla dovuta precisione entrai di notte nel recipiente stabile, feci accender la lanterna nel recipiente mobile, e mi posi seduto ad osservare attentamente, aspettando di veder presto succedere al color glauco la tinta rossa d'Halley. Ma la luce giallognola della lucerna (che era a doppia corrente d' aria ed a riverbero) assunse una leggier tinta verdastra traversando un breve tratto d' acqua, s' illanguidì rapidamente senza alterare sensibilmente il proprio colore, e sparì alla distanza di circa venti metri.

Il color glauco della luce trasmessa per l'acqua del mare si conserva dunque a qualunque profondità, e conviene cercar la cagione dell' azzurro che colora l' interno della grotta di Capri, altrove che nella semplice trasmissione.

Senza entrar quì in alcuna discussione sull' indole dell' agente che rende sensibili le immagini de' corpi, ricordiamo solamente il fatto incontrastabile che un raggio di luce ordinaria è composto di una infinità di raggi colorati, i quali arrivando contemporaneamente sull'organo della vista producono la sensazione del bianco. Ora la luce può giugnere sull' occhio traversando semplicemente uno o più mezzi diafani, oppure riverberandosi sulle sostanze opache e sulle particelle de' corpi trasparenti: ma tanto nel primo quanto nel secondo caso gli elementi lucidi non mantengono sempre le mutue loro relazioni, perchè nell' atto della trasmissione o della riverberazione sorge una certa resistenza detta dai Fisici *assorbimento*, la quale opera d' ordinario con diversa energia sui raggi elementari, ed estingue talora del tutto alcuni di loro, lasciando gli altri più o meno intatti: allora la luce bianca perde il suo carattere distintivo e si tinge dell'uno o dell'altro

colore; come succede per l' appunto quando i raggi lucidi pervengono sull' organo della vista ripercossi dalle varie sostanze solide o fluide che formano l' immensa serie dei corpi colorati.

Ma lasciando stare tutto quanto s' appartiene ai corpi opachi, e considerando i soli mezzi diafani, egli è manifesto che le loro colorazioni potranno essere svariatissime, perchè or l' uno or l' altro elemento verrà infievolito o estinto per virtù d'assorbimento, ed il mezzo vestirà il colore dovuto alla somma de' raggi restanti. E queste variazioni non succederanno solamente passando dall' uno all' altro mezzo, ma anche nello stesso mezzo secondo la profondità: taluni elementi lucidi potendo essere assorbiti più o meno rapidamente degli altri; per cui il colore della luce trasmessa o riverberata andrà cambiando colla qualità e quantità de' raggi che le verranno sottratti durante la progressiva sua trasmissione, o nell' atto stesso della riverberazione. Si hanno moltissimi esempj di così fatte variazioni ne' vetri e ne' liquidi colorati: per limitarmi tuttavia alle sole ottiche proprietà immediatamente applicabili al fenomeno da noi considerato, citerò le infusioni del *lignum nephriticum* e d' altri legni che versate nei vasi di vetro appariscono gialle rancie o rosse vedute per trasmissione e turchine guardandole per riflessione.

Le colorazioni dei mezzi diafani non devono pertanto riferirsi tutte a quelle manifestate dalle sostanze trasparenti che abbiamo continuamente sott' occhio, come sarebbe l' olio o il vino, i quali posseggono una sola tinta, tanto per riflessione, quanto per trasmissione: ma in certi casi il colore della luce trasmessa è al tutto diverso da quello della luce riverberata: e questo fenomeno succede nell' acqua del mare. Le sperienze dianzi citate provano infatti che ivi la luce trasmessa è verdognola: che poi i raggi riverberati dall' acqua marina siano di tutt' altro colore, ciò risulta ad evidenza dalle più ovvie osservazioni fatte in alto mare, o presso le coste ripide e scoscese dove l' acqua è molto più profonda che ne' lidi di

dolce pendío: colà il mare è sempre ceruleo, almeno nel Mediterraneo o in qualunque altra regione, ove l'acqua non è insozzata dal fango o pregna di materie eterogenee.

E quì torna utile una distinzione importantissima. A chiunque abbia veduto il golfo di Napoli in perfetta calma, ed illuminato dalla luce di un cielo limpido e sereno, non sarà certo fuggita di mente la vivacissima tinta cerulea che vedesi scintillare direi quasi alla sua superficie da tutti i punti del lido e delle terre circostanti. Siffatto colore non è quello che consideriamo, e deriva unicamente dalla riflessione specolare dell' azzurro celeste: per restarne capaci basta notare ch'esso cambiasi del tutto, e diventa grigio e bianco quando il cielo coprendosi di nubi fosche o chiare dura tuttavia la calma. Se poi le nuvole sono accompagnate da un vento che increspi la superficie del mare, allora il colore verde glauco dell'acqua s' intromette fra le immagini riflesse del cielo, ed offre un misto de' due colori. La tinta propria dell' acqua marina non ha nulla di comune con questa riflessione: difatto essa apparisce sotto qualunque stato del cielo e consiste propriamente nella luce riverberata o diffusa dalla somma delle molecole che compongono uno strato liquido di una certa profondità. Se l' acqua è poca, la colorazione riesce insensibile attesa l' estrema sua debolezza; donde la cagione per cui, presso il lido, gli oggetti bianchi posti in fondo al mare si vedono sempre tinti del solo colore verde-glauco dovuto al doppio passaggio della luce a traverso il liquido soprastante, senza che vi si scorga alcun vestigio del colore proprio alla riverberazione dell'acqua. Ma si appenda un pezzo di marmo, od altro oggetto bianco e pesante alla estremità di una funicella, e durante un mar placido e quieto, e sotto la viva luce meridiana di un giorno sereno si faccia calare pian piano a guisa di scandaglio nelle acque limpide e profonde, come sono appunto quelle che stanno intorno ai siti alpestri dell' isola di Capri; si vedrà il color verdognolo assunto dal marmo entro i primi strati maritarsi a poco a poco col turchino, la cui

proporzione andrà sempre crescendo, per modo che l' immagine dello scandaglio apparirà tutta cerulea qualche istante prima di dileguarsi per la troppa profondità.

La cagione del fenomeno ottico che s' osserva nella grotta di Capri sarà ora manifesta anche alle persone le meno versate nello studio delle scienze fisiche.

Limpido e profondo è, come dissi, il mare che bagna la parete ove sta il gran vano sottomarino della caverna. Ora è da sapersi, che la luce riverberata irregolarmente o diffusamente dai corpi, diafani od opachi, ha per carattere distintivo d' irradiare con eguale energia per ogni verso intorno alle molecole illuminate; e però quella stessa sorta di raggi donde deriva il color ceruleo delle acque limpide e profonde si trasmetterà pure copiosamente a traverso l' ampia apertura posta sotto il livello del mare, entrerà nella grotta e dominando compiutamente la poca luce diretta che vi penetra per l' angusto canale d' ingresso, tingerà le pareti, le barche, le persone, i remi, e qualunque altro oggetto di quel bel colore azzurro che reca tanta maraviglia, e tanto diletto all'osservatore.

Chi ha occasione di frequentare la grotta di Capri assicura che la tinta azzurra non è sempre d' ugual brio, e che il vento e le nuvole la rendono più pallida e sbiadata. Qualora si ponga mente alle minute arene ed altri corpiccinoli eterogenei più o meno abbondanti lungo le rive del mare, l'impallidire della luce azzurra nella caverna per l'azione del vento sembrerà una conseguenza naturale dell'intorbidamento dell' acqua circostante. Quanto poi all' azione delle nuvole, basterà considerare che la qualità della luce contribuisce assai alla vivacità delle tinte vibrate dai corpi colorati. Si ponga, a cagion d' esempio, una stoffa e un liquido rosso entro un ambiente illuminato mediante un picciol pertugio chiuso da un vetro colorato: la stoffa ed il liquido sembreranno molto più chiari ed illuminati dai raggi rossi che di tutt' altro colore. Questa superiorità d' illuminazione della luce rossa si manterrà persino rispetto alla luce diretta, convenientemente

moderata da un pannolino bianco più o men fitto onde renderne l'intensità presso a poco uguale a quella luce trasmessa pel vetro rosso: e la ragione è chiara; imperocchè ogni colore s'avviva e spicca unicamente in forza della luce analoga, e ad egual grado di virtù rischiarante, un fascio di luce bianca contiene necessariamente una proporzione di rosso minore del fascio interamente costituito dai raggi rossi. Così succede rispetto al mare illuminato da un cielo nuvoloso, o da un ciel sereno: le molecole liquide ricevono una luce bianca o analoga al loro proprio colore: esse danno pertanto un riverbero men vivo nel primo che nel secondo caso ove la luce rischiarante della volta celeste è del tutto analoga all' azzurro dell' acqua.

Da tutto ciò s' argomenta che la serenità del cielo, la calma e la limpidità dell' acqua sono condizioni favorevoli o necessarie, ad una viva illuminazione degli antri marini mediante la sola luce cerulea ripercossa dal mar profondo.

La conformazione della grotta di Capri e le sue attenenze col mare circonfuso sono probabilmente riprodotte in parecchie altre caverne: ma una luce così vivida, ed acque così pure e trasparenti non si trovano certo sì facilmente riunite in egual grado come intorno all'isola di Capri; ed ecco forse il principal motivo per cui il grazioso fenomeno da noi considerato non si manifestò finora così chiaro e spiccante in altre rive.

Si è detto che l'azzurro della nostra grotta varia alquanto di brio secondo lo stato del cielo, e secondo la calma o l'agitazione del mare. Soggiungiamo ora che il fenomeno si potrà un giorno dileguare compiutamente o sottrarsi del tutto all' occhio dell' osservatore.

E di fatto, le relazioni di posizione tra la terra e la superficie del mare non sono costanti e cambiano coll' andar degli anni, non solamente a cagione delle materie trasportate dai fiumi o respinte dalle onde marine, come accade nelle spiaggie di debole declivio, ma anche nelle coste ripidissime

prive affatto di correnti d' acqua dolce, e formate di rupi salde ed immobili. Questi cambiamenti derivano propriamente da una lenta variazione di livello prodotta dall' abbassarsi e sollevarsi dell' acqua, o, più probabilmente, dal sollevamento e dall' abbassamento del suolo. Supponiamo pertanto che la parete pescante della grotta azzurra venisse un giorno ad emergere fuori del livello marino; allora la riverberazione propria dell' acqua sarebbe vinta e sopraffatta dalla luce ordinaria, e la spelonca illuminata dal solito chiarore atmosferico. Se poi il masso entrasse più profondamente nel mare, l' ingresso della caverna, già tanto basso che per varcarlo il viaggiatore è costretto ad acquattarsi in fondo agli schifi, verrebbe del tutto chiuso.

Queste congetture, emesse per la prima volta dal Marchese Ruffo mio egregio collega nella R. Accademia delle Scienze di Napoli, sembrano tanto più probabili oggidì, che, dopo di aver lette e ponderate le belle ed importantissime osservazioni pubblicate recentemente dal Cav. Antonio Niccolini intorno alle altezze presenti e passate del mare nelle riviere di Napoli, Baia, Cuma e paesi adiacenti, *non può più rimanere un' ombra di dubbio che tra le coste d' Amalfi ed il promontorio di Gaeta, il mare, in epoche storiche non troppo remote, ha occupato nello stesso sito un' altezza successivamente maggiore e minore di sei metri circa, sopra e sotto il suo livello presente* (1). Anzi stando a questi dati *certissimi*, ed ammettendo, come sembra al tutto probabile, che siffatte variazioni di livello siansi estese alle isole circonvicine, il breve

(1) Breislak, Babbage, Forbel avevano già dimostrato *geologicamente* i cambiamenti di livello succeduti nel seno di Baia. Ma i dati raccolti dal Cav. Niccolini mostrano che il fenomeno non è così limitato come credevasi, e che le oscillazioni del terreno si estendono a tutto il golfo di Napoli ed alla costa di Gaeta. Le dimostrazioni del Niccolini essendo poi quasi tutte poggiate sopra indizj marini forniti da opere architettoniche di nota origine, o sulle posizioni di fabbriche antiche o moderne, svelano in pari tempo, tra limiti d' errore assai ristretti, le varie epoche ove il mare trovavasi apparentemente più o meno alto dell' odierno suo livello.

speco che conduce alla grotta azzurra di Capri doveva essere totalmente emerso dal seno delle acque insieme alla parete adiacente sul principio dell' era cristiana; per cui la grotta trovavasi allora nel caso anzidetto di una illuminazione ordinaria; ed otto o nove secoli dopo essa era probabilmente inaccessibile per la totale immersione dello speco. Tra queste due epoche il livello marino toccò l'altezza presente, e la grotta venne allora illuminata come oggidì dalla luce cerulea.

D' altra parte se l' antro marino di Capri avesse presentato, durante il regno de' Cesari, il fenomeno tanto curioso della colorazione azzurra, i classici latini, e segnatamente quelli che vantarono le delizie dell' isola di Tiberio, non avrebbero mancato di farne parola. Che poi non si trovi alcun ricordo o documento della successiva apparizione e scomparsa del fenomeno avvenuto tra il quinto e l' ottavo secolo, nessuno ne farà certo le meraviglie ponendo mente alle crudeli vicende di que' tempi di barbarie e d' ignoranza.

L' epoca della nuova apparizione del colore azzurro nell' interno della spelonca dovette succedere sul principio del decimoquinto secolo ove l' altezza del mare sulle rive del prossimo continente era quella stessa d' oggidì: ed è possibile, anzi probabile, che l' ingresso dell' antro sia nel giro di pochi anni compiutamente tuffato nell' acqua, se l' odierna fase d' innalzamento del livello marino, tanto manifesta nella gran terma puteolana, volgarmente detta *tempio di Giove Serapide*, progredisce colla stessa rapidità, ed è parimente sensibile allo stesso grado nelle isole del golfo di Napoli.

Le variazioni periodiche del livello marino dedotte dai segni irrefragabili del soggiorno passato e presente delle acque su per le rupi e pe' ruderi degli antichi edifizj, sparsi con tanta dovizia in questa classica terra, sono, giova ripeterlo, della più alta importanza, non solamente per la Storia e la Geologia, ma anche per la *Fisica del globo*: speriamo che i Governi europei vogliano promuoverne efficacemente lo studio in diverse stazioni della superficie terrestre, come fecero

ultimamente rispetto alle osservazioni magnetiche. Il frutto di così fatte protezioni è forse più prossimo di quel che potrebbe credersi. Non sarebbe egli possibile, a cagion d'esempio, che vi fosse una relazione intima tra i periodi del successivo abbassamento e sollevamento di una data costa marittima, e le variazioni del meridiano magnetico intorno al meridiano astronomico?..... Fatto sta che la forza magnetica della terra è del tutto analoga all'azione di una gran calamita. Ora il travaglio incessante cui sembra sottoposta la materia nell'interno del nostro globo potrebbe produrre delle modificazioni periodiche, le quali operassero simultaneamente e sulla posizione del livello marino rispetto a un dato punto della superficie terrestre, e sulla posizione dell' ago di declinazione relativamente al meridiano del luogo.....

Ma non potrei entrare più addentro in così fatte considerazioni senza uscire manifestamente dello scopo prefisso a questa lettera. Ripiglierò pertanto il nostro soggetto, e porrò fine alle argomentazioni descrivendo una esperienza che mi sembra atta a riassumere quanto si è disopra discorso, ed a mostrare chiaramente la genesi della luce azzurra della grotta di Capri.

Abbiasi un tubo di latta lungo dodici o quindici decimetri, largo uno o due centimetri, il quale porti da un lato una imboccatura di tali forme e dimensioni che il bulbo dell' occhio possa chiuderla esattamente. Dal lato opposto si disponga trasversalmente, a guisa di diaframma, un foglio di carta bianca finissima, e vi si adatti poscia un tubo conico, lungo sei o sette decimetri, le cui pareti siano inclinate di 30 o 40° affinchè i raggi di luce poco discosti dal paralellismo dell' asse possano raccogliersi sulla carta, direttamente, o dopo una o più riflessioni.

Munito di questo strumento lo sperimentatore entrerà in una barchetta e si recherà ne' siti ombrosi dove il mare è ceruleo, tufferà nell' acqua una buona porzione del cono, e tenendo il tubo verticale, egli applicherà l'occhio al pertugio

superiore. Dopo alcuni istanti di quiete la carta gli apparirà tutta splendente di luce azzurra.

Ora, nel tubo così disposto verticalmente, non possono certo penetrare i raggi cerulei del cielo ripercossi specolarmente dalla superficie del mare, nè le immagini riflesse dei colori provenienti dalla rifrazione, le quali dovrebbero evidentemente ricomporre la luce bianca per la sovrapposizione degli spettri appartenenti ai fili di luce che si rifrangono da ogni banda e sotto diverse obliquità intorno all' apertura del cono. — Il fenomeno osservato deriva dunque dal color proprio del mare, o più precisamente dalla proprietà che posseggono le sue acque limpide e profonde di riverberare i raggi azzurri, assorbendo o trasmettendo tutti gli altri elementi della luce diffusa per l' atmosfera.

SOPRA L' AZIONE MAGNETIZZANTE
DELLE CORRENTI ELETTRICHE MOMENTANEE

MEMORIA IX.

SULL' INFLUENZA CHE NELLA MAGNETIZZAZIONE DEL FERRO OPERATA DALLA SCARICA ELETTRICA ESERCITANO I METALLI, ATTORNO AI QUALI SI FA CIRCOLARE LA SCARICA MEDESIMA

DEL SOCIO ATTUALE

CAV. PROF. STEFANO MARIANINI.

(*Ricevuta il* 15 *Marzo* 1847.)

L' aver veduto nella precedente Memoria VIII che il ferro messo in un' elica aggiunta a quella del magnetometro rinforza l'azione magnetizzante della scarica elettrica anche quando la scarica stessa produce nel detto ferro piccolissime alterazioni nello stato magnetico, e che il rinforzo non è proporzionale alle alterazioni medesime, mi fece nascere il pensiero di osservare se anche i metalli non magnetizzabili, messi nell' elica aggiunta producessero qualche rinforzo nella magnetizzazione leido-elettrica. E l' aver supposto che quel rinforzo provenir potesse da una corrente eccitata dal ferro nell' atto che si magnetizza mi suggerì di sperimentare i metalli foggiati in tubi, ovvero anche in eliche chiuse, essendomi noto che sì in quelli che in queste nascono in tale circostanza delle correnti elettriche di induzione (1). Ed ecco l' argomento delle sperienze che andrò discorrendo in questa breve Memoria.

---

(1) V. la Memoria IV nella quale trattasi dell' influenza degl' involucri metallici nella magnetizzazione operata dalle correnti momentanee nel ferro in essi contenuto.

PARTE PRIMA.

Esperienze comprovanti il rinforzo che l' azione magnetizzante della scarica elettrica riceve dai cilindri, dai prismi, dai fasci di fili, e dai tubi metallici attorno ai quali circola la stessa scarica.

I. Ho messo nell' elica del magnetometro un fascio di cento fili di ferro crudi, lunghi otto centimetri e pesanti grammi 4, 5; all' elica suddetta aggiunsi un' altr' elica eguale, e, senza porre in questa verun metallo, scaricai al solito su di esse una boccia di Leida di capacità 5, e carica alla tensione di dieci gradi. E fu tale la magnetizzazione acquistata dal fascetto di fili di ferro che l' ago calamitato sottoposto ad esso era tenuto deviato di 34°. 50'.

Ho poi messo nell' elica aggiunta un cilindro d' ottone pieno lungo centimetri otto e pesante grammi 129, 7 e, dopo di aver distrutto mediante alcune flessioni il fascetto di fili di ferro del magnetometro, scaricai come sopra la detta boccia ancora colla tensione di dieci gradi, e la forza magnetica acquistata dal fascio anzidetto fu maggiore che nel primo caso; poichè teneva deviato l' ago magnetometrico di 42°.

Al cilindro dell' esperienza descritta sostituito un altro esso pure d' ottone egualmente lungo ma pesante solo 40 grammi, ottenni mediante la scarica medesima un rinforzo minore; l' ago deviò di 29°.

Ottenni pure non dubbj indizj di rinforzo nell' azione magnetizzante in un cilindretto di ferro dolce e ricotto lungo otto centimetri e pesante grammi sette messo nell' elica del magnetometro in vece del fascio di fili suddetto.

Tale rinforzo per altro è stato appena percettibile quando, in luogo della scarica usata nelle precedenti esperienze, adoperai quella eccitata da una piccola boccia di capacità 1, e carica alla tensione di venti gradi.

II. Nell' elica dello stromento ho messo un fascio di 183 fili di ferro crudo lunghi centimetri 8, 5, e pesanti tra tutti otto grammi. E la scarica eccitata dalla boccia di capacità 5 colla tensione di dodici gradi, mentre l' elica aggiunta era vuota, diede per risultato medio di sei esperienze una magnetizzazione rappresentata dalla deviazione di 34°. 48'.

E dopo di aver introdotto nell'elica aggiunta un cilindro di stagno lungo otto centimetri e pesante grammi 85, il risultato medio di altri sei esperimenti, fu una magnetizzazione espressa da 39°. 4'.

Messo nell' elica aggiunta, invece di quello di stagno, un cilindro di zinco lungo otto centimetri e pesante grammi 81, ottenni per risultato medio di sei esperimenti la deviazione 39°. 45'.

Tolto il cilindro di zinco, e introdotto nell'elica aggiunta uno di piombo lungo esso pure otto centimetri, e pesante grammi 123, 9, il risultato medio di sei esperimenti fu una magnetizzazione espressa dalla deviazione 47°. 30'.

Altrettanti esperimenti simili ai sovraccennati ho eseguiti dopo d'aver introdotto nell'elica aggiunta un prisma d'ottone lungo centimetri 9, avente per base un quadrato di dodici millimetri di lato, e la media deviazione magnetometrica fu 46°. 40'.

All'elica aggiunta delle precedenti esperienze ne sostituii una formata del solito fil di rame non più lunga di due centimetri e mezzo, di soli dieci giri, ed avvolta ad un tubo di vetro di centimetri 5, 5 di diametro: e scaricata la solita boccia colla tensione di dodici gradi, l' ago magnetometrico deviò di 33°. Ma quando ebbi messo nella detta elica un cilindro di carbone del Bunsen lungo otto centimetri, col diametro della base di quattro centimetri, e pesante grammi 123, una scarica eguale alla predetta produsse la deviazione 40°. 30'.

Un cilindro di mercurio presso a poco delle dimensioni dell'anzidetto di carbone, sostituito ad esso nella stessa elica, produsse mediante un' eguale scarica la deviazione 47°. 30'.

Finora non ho potuto ottenere verun rinforzo nell'azione magnetizzante delle scariche elettriche dai prismi e cilindri di carbone elettromotore ordinario messi nell' elica aggiunta; nè dai cilindri formati di conduttori elettrici liquidi.

III. La scarica della solita boccia carica alla tensione di dieci gradi, nulla essendo nell'elica solita aggiunta, ed il suddetto fascio di 183 fili di ferro in quella dello stromento, diede per risultato medio di sei esperimenti la deviazione 27°.

Ed avendo poi messo nell' elica aggiunta un fascio di 90 fili d' ottone lunghi otto centimetri e mezzo, e pesanti tra tutti grammi 37, il risultato medio di altrettanti esperimenti fu la deviazione 32°.

Cimentato allo stesso modo un fascio di fili di rame in numero e dimensioni eguali ai detti fili d' ottone, diede lo stesso risultato.

Messo nell' elica aggiunta un fascio di 830 fili sottili di rame inargentato lunghi centimetri 8, 5 e pesanti tra tutti 50 grammi, la magnetizzazione prodotta nel detto fascio di fili di ferro fu tale che teneva deviato l' ago magnetometrico di 37°. 30'.

Un fascio formato di 150 fili o minute striscie di piombo lunghe centimetri 8, 5, pesanti fra tutte 43 grammi, collocato nell' elica aggiunta, avvalorò esso pure l'azione magnetizzante della suddetta scarica producendo la deviazione 33°.

Più tenue fu il rinforzo prodotto da un fascio di 150 fili di stagno lunghi centimetri 8, 5 pesanti grammi 15, 7. La deviazione fu 32°.

Ed un fascio di altrettanti fili di zinco lunghi come i precedenti, e pesanti grammi 8, 2, diede un rinforzo ancor minore. La deviazione fu 31°. 20'.

IV. *Tubi metallici.* Nell' elica aggiunta a quella del magnetometro ho messo un tubo di lastra d'ottone del diametro di 16 millimetri, lungo nove centimetri e pesante grammi 35, 5; e la scarica solita magnetizzò il fascio di fili di ferro che trovavasi nel magnetometro al segno che teneva deviato il sottoposto ago di 36°.

Al tubo di lastra d'ottone dell'esperienza precedente un altro ne sostituìi di maggior mole d'ottone fuso, il quale era lungo centimetri 8,9, aveva il diametro interno di millimetri otto, e pesava grammi 116,2. Ma il rinforzo da esso prodotto superò di poco quello del tubo sovraccennato; la deviazione fu 36°. 45'.

Messo nell'elica aggiunta un sottile tubo di piombo lungo centimetri 8,5 col diametro di centimetri 1,5 e pesante grammi 49,6, ebbesi colla solita scarica la deviazione 31°.

E messovi un tubo pure di piombo lungo centimetri 9,6 col diametro interno di nove millimetri e pesante grammi 239,7, la deviazione fu 34°.

Un tubo d'oro lungo centimetri 9,8 del diametro interno di centimetri 2 e pesante grammi 41,15, in parità di circostanze de' tubi precedenti, produsse la deviazione di 42°. 45'.

Un tubo di lastra d'ottone prismatico a base quadrata di centimetri 1,2 di lato, lungo centimetri 9,2, pesante grammi 113,5, fece deviare il magnetometro di 43°. 15'.

Ed un altro tubo, pur di lastra d'ottone e prismatico, a base triangolare equilatera di centimetri 1,4 di lato, lungo come il predetto, e pesante grammi 20,5, rinforzò precisamente come il tubo d'oro sovraccennato.

V. Alla solita elica aggiunta ne attaccai una seconda eguale ad essa, e, quando non v'era ferro in nessuna delle due, la scarica della solita boccia colla tensione di 13 gradi produceva nel magnetometro la deviazione 22°. 45'.

Messo pertanto il grosso tubo di piombo sopra descritto in una delle eliche aggiunte, la deviazione ottenuta mediante la detta scarica fu 29°. 30'.

Lasciato il detto tubo nell'elica, e messo il grosso tubo d'ottone nell'altra, la deviazione a pari circostanze fu 34°. 25'.

Levato il tubo di piombo dall'elica aggiunta in cui si trovava, e lasciato dov'era quello d'ottone, la scarica stessa produceva la deviazione 27°. 30'.

Tolto anche il secondo tubo dalla seconda elica aggiunta, la deviazione ottenuta fu presso a poco come da principio, cioè 23°.

VI. *Più tubi nella stessa elica aggiunta.* Volli anche vedere se cresceva il rinforzo prodotto da un tubo, introducendo altri tubi nella medesima elica.

Mediante la scarica della solita boccia carica ad undici gradi di tensione, se non v'era alcun tubo nell'elica aggiunta, la deviazione magnetometrica che ottenevasi era 20°.

Collocato nella detta elica un tubo di lastra sottile d'oro lungo centimetri 8, 3, del diametro interno d'un centimetro, e pesante grammi 6, 8, la deviazione ottenuta mediante l'anzidetta scarica fu 24°. 35'.

Tolto dall' elica l' anzidetto tubo d' oro, e messo in suo luogo un tubo d'argento delle stesse dimensioni, la deviazione a parità di circostanze fu 23°.

Ed avendo poi messi entrambi li tubi delle due sovraccennate sperienze nella stessa elica aggiunta, la deviazione fu 25°. 30'.

Per poter introdurre un maggior numero di tubi nell'elica aggiunta delle notate esperienze, ne sostituii un altra del diametro di tre centimetri, nella quale il fil di rame circonda il tubo di vetro a cui è avvolto sessanta volte, ed è lunga un decimetro. Sperimentando pertanto con quest' elica, se nulla trovavasi nella medesima, mediante la scarica della solita boccia colla tensione di 14 gradi, l'ago del magnetometro deviava di gradi 13°. 15'.

Messo nella detta elica un tubo d' ottone sottile, delle dimensioni di quello d'oro sopra citato, la deviazione prodotta dalla detta scarica fu 13°. 30'.

Messovi anche il tubo d' oro suddetto, la deviazione fu 16°. 30'.

Ai due tubi predetti aggiunto un tubo di platino eguale ad essi in dimensioni, la deviazione fu 20°.

Finalmente aggiunto anche un tubo d' argento non dissimile, quanto alle dimensioni, dai tre precedenti, l' effetto della detta scarica fu 23°. 20'.

VII. Anche con bocce più capaci di quelle fin qui adoperate si osserva il rinforzo nell'azione magnetizzante operato dai metalli posti nell' elica aggiunta.

1ª. Una boccia di capacità 9 carica alla tensione di cinque gradi scaricata nell' elica del magnetometro mentre non v' era metallo nell' aggiunta, la deviazione fu 17°.

Messo nell' elica aggiunta il grosso tubo d' ottone, la deviazione fu 19°.

2ª. Con una boccia di capacità 25, e carica alla tensione di sei gradi, non essendo niente nell' elica aggiunta, l' ago deviò di 15°.

E dopo d' aver messo il grosso tubo d'ottone nella detta elica, una eguale scarica produsse la deviazione 20°. 30'.

VIII. *Tubo metallico nell' elica aggiunta quando la scarica traversa uno strato d' acqua.* Anche quando la scarica della boccia, oltre che per l' elica aggiunta, deve passare per uno strato d' acqua, purchè la poca conducibilità assoluta di questo non porti già per se stesso un notabile rinforzo nell' azione magnetizzante, un tubo metallico, un prisma, o un fascio di fili messo nell'elica aggiunta rinforza l'azione medesima.

La boccia carica alla tensione di sei gradi, trovandosi nell' elica del magnetometro un fascio di 180 fili sottili di ferro non ricotti, e non mai adoperati, non essendo nulla nell' elica aggiunta, nè dovendo la scarica traversar acqua, la magnetizzazione eccitata nel fascio del magnetometro era tale che teneva l' ago deviato di 31°. 20'.

Un' eguale scarica, obbligata a traversare oltre l'elica aggiunta (nella quale per altro non v' era metallo) anche un prisma d' acqua leggermente salata lungo due centimetri, e avente sei centimetri quadrati di base produceva la deviazione 35°. 50'.

Lasciate le cose come in quest' ultimo sperimento, e messo nell'elica aggiunta il grosso tubo d' ottone, la deviazione prodotta dalla scarica fu 44°. 20'.

Tolto lo strato acqueo, e lasciato nell' elica aggiunta il tubo, la deviazione fu 37°. 40'.

Le esperienze istituite con altri tubi o cilindri, o fasci di fili metallici nell'elica aggiunta condussero a risultati simili a quelli ottenuti col detto tubo d' ottone. Ed ottenni pure risultati analoghi ai qui sopra descritti, ma con differenze più piccole, anche tenendo nell' elica dello stromento un fascio di 500 fili di ferro sottili e ricotti.

IX. *Scarica in parte deviata.* All' elica del magnetometro aggiunsi due eliche, e queste erano unite fra loro mediante una striscia di piombo, ed il capo libero della seconda elica aggiunta lo congiunsi col capo parimente libero dell' elica dello stromento. La striscia poi che univa i due capi liberi suddetti era di tale lunghezza che, se, per iscaricare la boccia di Leida, si poneva in comunicazione l' esterna armatura col punto di mezzo dell' ultima striscia, e l' interna col punto di mezzo di quella che univa le due eliche aggiunte, la scarica aveva presso a poco una strada egualmente conduttrice da percorrere, e passando per l' elica dello stromento, e passando dall'altra parte.

Così disposte le cose, e scaricata al modo che si è detto la boccia colla tensione di sei gradi, mentre non v' era metallo in nessuna delle due eliche aggiunte, la deviazione ottenuta fu 13°. 30'.

Messo quindi il grosso tubo d' ottone nell' elica aggiunta che trovavasi dalla parte dello stromento, con una scarica eguale alla precedente, ed eseguita allo stesso modo, si conseguì la deviazione 16°. 45'.

Tolto il detto tubo dall' elica aggiunta in cui si trovava, e messolo nell' altra, l' azione magnetizzante d' una scarica eguale alla precedente, ricevette un eguale rinforzo; la deviazione fu ancora 16°. 45'.

X. In somma in tutte le circostanze in cui il ferro, come si vide nella precedente Memoria, rinforza l' azione magnetizzante della scarica elettrica, anche i tubi metallici, o formati d' altri conduttori elettrici solidi la rinforzano, e lo stesso dicasi de' cilindri, prismi e fasci di fili formati delle stesse sostanze. Bene inteso che tale rinforzo è sempre molto minore di quello che produce un' eguale massa di ferro posta nell' elica aggiunta.

Infatti mentre la scarica della boccia di Leida colla tensione di undici gradi, se nell' elica aggiunta v' era il tubo d'ottone pesante grammi 35, 5, il magnetometro stava deviato a 27°; quando nella detta elica poneva un fascetto di 50 fili sottili di ferro crudo, il cui peso era solo di grammi 3, 4, cioè neppure la decima parte del peso del tubo, la deviazione era di 31°. E messovi un fascio di 25 fili, che non arrivava alla ventesima parte del peso del tubo, il rinforzo era già alquanto maggiore, poichè coll' anzidetta scarica ottenevasi la deviazione 28°.

All' occasione di queste sperienze ho pure osservato che il rinforzo prodotto dal tubo metallico non impedisce punto quello cagionato dal ferro che si trova nella medesima elica, semprechè il ferro stesso non sia circondato dal tubo. Infatti, scaricata al solito la boccia colla tensione di dieci gradi, ottenni la deviazione 20°.

Messo nell' elica aggiunta un fascio di fili sottili di ferro pesanti tra tutti grammi 6, 5, la detta scarica produsse la deviazione 32°.

Levato il fascio, e messo nell'elica il tubo di lastra d'ottone descritto al §. IV, la detta scarica produsse la deviazione 23°. 30'.

Lasciato nell' elica il tubo, e messovi anche l' anzidetto fascio di fili di ferro, non però dentro il tubo, la deviazione in pari circostanza fu 35°. 40'.

PARTE SECONDA.

Ragionamenti ed esperienze tendenti a dimostrare che il rinforzo nell' azione magnetizzante, di cui si tratta, nasce dall' induzione di second' ordine eccitata nell' elica aggiunta dai metalli che trovansi nella medesima.

XI. Quando nell'elica aggiunta trovasi un tubo metallico, nel momento che sull' elica stessa vien scaricata la boccia di

Leida, nasce nel tubo stesso una corrente di induzione (1). Se pertanto è da siffatta corrente che nasce il rinforzo nell' azione magnetizzante, anche quando nell' elica aggiunta, invece del tubo metallico, vi sarà un' elica chiusa, dovrà pur aversi un rinforzo, perchè anche in tale elica nasce una corrente di induzione ogniqualvolta si scarichi al solito la boccia di Leida. E ciò avviene di fatto, come si può vedere dalle seguenti esperienze.

1ª. L'elica aggiunta a quella del magnetometro è questa volta lunga un decimetro, il suo diametro è tre centimetri, e il solito fil di rame coperto di seta si avvolge settantasette volte attorno al tubo di vetro che la sostiene. In questa pertanto collocai un'elica eguale a quella dello stromento; nella quale ho messo un fascio di 175 fili di ferro sottili e crudi.

La solita boccia di capacità 5, carica alla tensione di tre gradi, scaricata al solito mentre l'elica che stava dentro l'aggiunta era aperta, si ottenne per risultato medio di tre sperimenti la deviazione 15°. 15'.

Chiusa poi che fu la detta elica interna, cioè messi fra loro a contatto i due capi della medesima, e rinnovata la scarica suddetta, la deviazione media ottenuta fu 18°. 10'.

2ª. Aperta di nuovo l'elica interna, e scaricata la boccia colla tensione di dieci gradi, lo stromento deviò di 18°.

E dopo di aver chiusa la detta elica, la scarica eguale alla precedente portò la deviazione 30°. 30'.

XII. Ma in un'elica chiusa nasce la corrente di induzione anche quando essa trovasi, non dentro, ma attorno all' elica sulla quale scaricasi la boccia, e tale induzione nasce pure in un tubo metallico che circonda l' elica stessa (2). Dunque, se è da questa corrente indotta che nasce il rinforzo nell'azione magnetizzante della scarica, anche quando il tubo metallico sarà attorno all' elica aggiunta, dovrà dar luogo a rinforzo

(1) Memoria citata §§. XXX, XXXI e segg.

(2) Memoria citata §. XXVI.

nell'azione di cui si tratta. E ciò pure ho verificato con molte sperienze, delle quali basterà qui accennarne alcune.

1ª. Un grosso tubo di ottone lungo un decimetro, del diametro di centimetri 3, 5, pesante 361 grammo fu messo attorno all' elica aggiunta. Scaricai al solito la boccia di capacità 5 carica alla tensione di quattro gradi, e ottenni la deviazione 25°. Replicai la detta scarica senza distruggere il magnetismo nel fascio di fili del magnetometro, e la deviazione divenne 31°. 30'. E dopo aver ripetuto altre quattro volte la detta scarica, l'ago magnetometrico deviava di 45°. 30'.

Distrutto allora il magnetismo nel fascio di fili di ferro, tolsi il tubo d' ottone d' attorno all' elica aggiunta, e agendo poscia coll' anzidetta scarica, e per quante volte io la ripetessi, la massima deviazione ch' io perveniva ad ottenere fu solamente 28°. 45'.

Ma messa di nuovo l' elica aggiunta nel detto tubo, mediante una delle dette scariche, l' ago dello stromento passò dal grado 28°. 45' al 36°.

2ª. Nell' elica del magnetometro ho messo un fascio di 400 fili sottili di ferro ricotto, e colla boccia carica a sei gradi, quando l' elica aggiunta non era circondata da verun tubo, la deviazione fu 8°.

Introdotta la detta elica in un tubo di piombo lungo centimetri 10, 6, pesante grammi 564, essendo la parete grossa di millimetri 5, con una scarica eguale alla precedente ottenni 13°. 30'.

3ª. Ho messo di nuovo nell'elica dello stromento il fascio di 175 fili sottili di ferro crudo, e colla boccia carica a dodici gradi, e non essendo l' elica aggiunta circondata da involucro metallico, ottenni la deviazione 31°.

E dopo che l'elica venne circondata da un tubo di ferro lungo un decimetro, del diametro interno di centimetri 2, 6 e pesante grammi 356, la deviazione ottenuta colla detta scarica fu 40°.

4ª. Tolto il detto tubo di ferro, e introdotta l' elica aggiunta in un tubo di carbone del Bunsen lungo centimetri 13 e pesante grammi 399, si ebbe colla scarica eguale a quella della precedente esperienza la deviazione 41°. 20′ (1).

XIII. Possiamo adunque ragionevolmente ritenere che la circostanza, per la quale i tubi metallici messi nell' elica aggiunta rinforzano l'azione magnetizzante della scarica elettrica sia l' aver luogo in essi una corrente di induzione nel momento in cui la scarica stessa circola attorno ai medesimi.

Ma per qual ragione questa corrente indotta nel tubo che si trova dentro l'elica aggiunta, o attorno ad essa, avvalora l' azione magnetizzante della boccia, o almeno fa sì che la magnetizzazione riesca più forte? Credo essere questa la prima volta che mi torna opportuno l' aver osservato, or son dieci anni, che la corrente di induzione genera un' altra corrente pur d' induzione in un circuito metallico chiuso vicino ad essa, e che questa, cui dissi *induzione di second' ordine*, ha una direzione opposta a quella di primo ordine che la produce, ed è in conseguenza diretta nel medesimo senso della corrente primitiva o inducente. Pertanto io dico che la corrente di induzione di prim' ordine, la quale nasce nel tubo per la corrente momentanea che circola nell'elica che lo circonda produce nell' elica stessa una corrente d' induzione di second' ordine, la quale, essendo diretta nel medesimo senso della scarica leido-elettrica, polarizza il ferro dell' elica del magnetometro nel medesimo senso della scarica stessa, e quindi la magnetizzazione riesce più forte.

Che un filo metallico, nel quale circola una corrente di induzione leido-elettrica, generi in un altro filo chiuso vicino e parallelo ad esso un' induzione di second' ordine, lo dimostrai al §. XIII della mia prima Memoria sulle correnti prodotte

---

(1) Si è anche osservato che il rinforzo prodotto dal tubo interno viene qualche poco avvalorato dall' applicare all' elica aggiunta un tubo esteriore: e reciprocamente che il rinforzo prodotto da questo viene avvalorato da un tubo introdotto nell' elica stessa.

dalla induzione delle correnti elettriche momentanee (1). E che altrettanto faccia un tubo metallico, quando in esso ha luogo una corrente indotta, è messo fuori di ogni dubbio dalle sperienze registrate al §. XXXI della citata mia Memoria sull' influenza degl'involucri metallici nella magnetizzazione di ferri in essi contenuti (2). Tuttavia credo opportuno di far vedere che tali induzioni di second' ordine hanno luogo anche in esperienze simili a quelle registrate in questa Memoria.

1ª. Nell' elica aggiunta a quella del magnetometro introdussi un'altr'elica, ma solo per metà, e feci che l'altra metà fosse introdotta in un' altra eguale all' aggiunta. Su quest' ultima scaricai la solita boccia di Leida e carica alla tensione di dieci gradi; ed osservai che, se l'elica introdotta era aperta, non avevasi alcuna deviazione, come era ben d' aspettarsi, nel magnetometro; ma se l' anzidetta elica era chiusa, nel qual caso la scarica, che si faceva circolare attorno alla sua metà, eccitava in tutta quanta un' induzione di prim' ordine, il magnetometro deviava di parecchi gradi, e nel medesimo verso che avrebbe deviato, se la boccia si fosse scaricata nella stessa direzione sull' elica aggiunta. Il quale risultato dimostra che veramente la corrente d' induzione di prim' ordine, che aveva luogo nell' elica interna, generava nell' aggiunta che per metà la ricopriva un'induzione di second'ordine contraria alla detta di primo, e perciò cospirante con quella che la corrente inducente, cioè la scarica elettrica avrebbe eccitata agendo essa stessa su quell' elica aggiunta.

2ª. Attorno ad un tubo di vetro avvolsi due eliche, ciascuna di quindici giri, l'una verso un estremo e l'altra verso l'altro, e separate da tale intervallo che, scaricando sopra una di queste la boccia, non nasceva induzione di sorta nell'altra quantunque chiusa. Introdussi poi nel tubo l' elica aggiunta

---

(1) Memorie di Fisica sperimentale anno 1837, pag. 62. Annales de Chimie et de Physique, Troisième serie, Tome X, pag. 491.

(2) Opera citata, anno 1840.

a quella del magnetometro. Con tale apparecchio istituivansi più agevolmente le sperienze simili alla precedente; e qui pure ogniqualvolta scaricavasi la boccia sopra una delle eliche circondanti il tubo, e l' altra era chiusa, se la tensione era sufficiente a produrre una sensibile induzione di second' ordine, si ottenevano nel magnetometro deviazioni le quali indicavano che l' effetto di quest' ultima cospirava con quello della scarica che immediatamente scorreva per l' elica del magnetometro stesso.

XIV. A fine di dimostrare che anche un tubo metallico circondato da un' elica, nell' atto che si scarica su questa la boccia di Leida può eccitare in un' altr' elica in esso contenuta una induzione di second' ordine descriverò l' esperienza la quale per amore di brevità non feci che accennare alla fine del §. XXXIII della citata Memoria.

Due tubi eguali d' ottone li feci unire fra loro mediante due lastre pure d' ottone lunghe com' essi nove centimetri, parallele fra loro, e non più distanti di un millimetro l' uno dall' altro; e feci fare una fessura in ciascun tubo, la quale incontrava il vano che lasciavano le due lastre. Così che la sezione perpendicolare agli assi di questo tubo presenta questa figura ○══○

In vicinanza ad uno de' tubi feci fare trenta fori in fila nelle due lastre che li congiungono, e attorno al detto tubo vicino ai fori feci avvolgere un' elica di fil di rame ben coperto di seta facendo passare il filo ad ogni avvolgimento pei due fori che trovansi dirimpetto l' uno all' altro nelle due lastre, compiendo così trenta avvolgimenti.

Messa pertanto un' elica nell' uno e nell' altro tubo, posi quella che stava nel tubo nudo in comunicazione con l' elica del magnetometro, e scaricai sull' altra (la quale era nel tubo circondato dall' elica) la boccia carica alla tensione di quindici gradi; e l' ago dello stromento deviò di 6°.

Donde si vede che la corrente indotta nel tubo dall' elettricità che scorreva nell' elica che lo circondava, produsse

una corrente di induzione di second' ordine nell' elica contenuta nell' altro tubo.

Dunque il tubo metallico che è nell'elica aggiunta o attorno ad essa avvalora l' azione magnetizzante della scarica elettrica, o rende più forte il magnetismo ch' essa produce nel ferro, perchè esso tubo eccita nell' elica aggiunta un'altra corrente cospirante con quella della scarica. E lo stesso deve pur dirsi dei cilindri e dei fasci di fili metallici messi nell' elica aggiunta.

XV. Due adunque sono le correnti che nel caso di cui si tratta operano nel ferro; quella della scarica della boccia, e quella d'induzione di second'ordine che il conduttore elettrico messo nell' elica aggiunta o disposto attorno ad essa eccita nell' elica medesima.

Ma gli effetti di due correnti di così differente forza, e che si succedono l' una all' altra con tale prestezza che possono dirsi contemporanee, perchè non sì tosto che l' una comincia, comincia anche l'altra, possono poi realmente aggiungersi, e produrre quindi effetto più grande?

Per togliere questo estremo dubbio che potrebbe forse rimanere ho studiato di conseguire in altra guisa due correnti elettriche momentanee, e di forza differente, e che con rapidità non minore di quella delle due sopra menzionate si succedessero l' una all' altra. Al quale oggetto feci costruire una boccia di Leida coll'armatura esteriore divisa in due parti eguali fra loro ed in modo che restano separate l' una dall' altra da una fascia di vetro nudo larga un centimetro. Se la boccia è verticale, la superficie di vetro nudo che separa le due semi-armature esteriori presenta due zone pur verticali l' una di contro all' altra, le quali dall' orlo dell' armatura esterna discendono alla base e riescono unite fra loro per via d' un' altra zona che si trova nella superficie esteriore del fondo della boccia. Una delle semi-armature esteriori la chiamo *destra*, e l' altra *sinistra*.

Caricata pertanto al solito siffatta boccia d'elettricità positiva, qualora si faccia arco di comunicazione fra una delle semi-armature esteriori, la destra, per esempio, e l'armatura interna, mentre l' elettricità di questa si slancia sulla detta semi-armatura destra, la semi-armatura sinistra cessa di essere attuata, sorge quindi in essa la tensione negativa, per la qual tensione chiama tosto a se l' elettricità in eccesso che si trova nella semi-armatura destra, e v' ha quindi un' altra scarica, o corrente elettrica che dalla destra semi-armatura va alla sinistra. La quale scarica è manifestata dalla scintilla che scocca tra le due semi-armature, se esse non comunicano fra loro per via d' un conduttore, dalla scossa, se esse sono in comunicazione per via d' una o più persone, dalla deviazione dell' ago calamitato, se è l' elica d' un re-elettrometro che stabilisce l'arco di comunicazione fra le due semi-armature. Ed in quest' ultimo caso la deviazione ha luogo in un verso o nell' opposto secondo che la scarica della boccia viene determinata ponendo in comunicazione l' armatura interna con la semi-armatura destra, ovvero con la sinistra.

Possiamo adunque avere con siffatta boccia due scariche le quali si succedono l' una all' altra con tale rapidità che possono riputarsi contemporanee dotate della stessa tensione; ma la quantità d'elettrico che scorre nel conduttore che unisce l' armatura interna con una delle esterne è circa doppia di quella che scorre da una semi-armatura all'altra. E sarebbe circa tripla, quadrupla ecc. se l' armatura esteriore fosse divisa in due parti che stessero fra loro come due ad uno, come tre ad uno ecc.

Per assoggettare adunque il ferro alle azioni magnetizzanti simultanee della descritta boccia ho collocato nell' elica del magnetometro, la quale era destra, un'altr'elica parimente destra, ed in questa il fascio di fili di ferro. Caricai la boccia a dieci gradi, quindi posi il capo orientale dell' elica interna a contatto della semi-armatura esteriore destra, ed il capo occidentale dell' elica stessa colla sinistra; poscia, dopo aver

messo anche il capo orientale dell' altr' elica a contatto colla semi-armatura destra, determinai la scarica della boccia portando mediante un bastone isolante il capo occidentale di quest' elica a contatto della sfera comunicante coll' armatura interna della boccia, e l'effetto fu una deviazione di 24°. 30'.

Veduto l' effetto delle due scariche simultanee, passai a vedere quello delle scariche medesime fatte agire l'una dopo l' altra. Ed ho osservato che, tenuto il debito conto dell' influenza che un' elica esercita sull' altra, il risultato superava di pochissimo quello conseguito precedentemente.

Dopo di aver veduto con questa ed altre simili esperienze che gli effetti di due correnti momentanee che operano simultaneamente si aggiungono l' uno all' altro come presso a poco quando operano successivamente, non rimane in me più alcuna dubbiezza sulla spiegazione data del rinforzo che l'azione magnetizzante della scarica elettrica riceve dai metalli, o da altri conduttori di prima classe posti in un' elica aggiunta a quella contenente il ferro che viene magnetizzato colla boccia di Leida. Conchiudo adunque:

1°. Che l'azione magnetizzante della boccia di Leida viene rinforzata da uno o più prismi di metallo, o di altra sostanza elettromotrice solida, cavi o pieni, che si trovano in un' elica aggiunta a quella in cui evvi il ferro da magnetizzare:

2°. Che il rinforzo di cui si parla, a parità di circostanze è molto minore di quello prodotto dal ferro, ed ha luogo in tutti i casi ne' quali il ferro stesso rinforza l' azione magnetizzante:

3°. Che tale rinforzo succede perchè la scarica della boccia fa nascere nel metallo, attorno al quale circola, una corrente di induzione, la quale ne produce una di second' ordine nell' elica contenente il metallo stesso; e questa essendo diretta nel medesimo senso della scarica, o corrente momentanea primitiva, polarizza magneticamente il ferro contenuto nell' altr' elica nel medesimo senso, in cui viene polarizzato dalla scarica stessa.

SOPRA UN SISTEMA DI NOMENCLATURA CHIMICA

II. MEMORIA

DEL CONTE CAVALIERE

PROF. AMEDEO AVOGADRO

Ricevuta il 23 Ottobre 1847.

Nuove riflessioni da me fatte sul sistema di Nomenclatura Chimica, che ho proposto nella Memoria pubblicata nella Parte Fisica del Tomo XXIII degli Atti della Società Italiana, mi hanno condotto ad arrecarvi alcune modificazioni tendenti a ridurlo a maggior semplicità ed a più comodo uso, soprattutto per la parte che riguarda la nomenclatura speciale de' corpi organici. Mi è parso nello stesso tempo che una più compiuta indicazione dell'applicazione di questo sistema ad alcuna delle principali classi di composti conosciuti ne farebbe meglio apparire lo scopo ed i vantaggi. Tale è il doppio oggetto a cui io mi son proposto di soddisfare in questa seconda Memoria.

I. Nomenclatura de' corpi inorganici.

Poco ho da cangiare riguardo ai principj ed all'uso della nomenclatura generale di questi corpi, quali li ho esposti nella prima Memoria, e ciò che debbo dirne si riferisce, non alla formazione del nome generico sostantivo di ciascun composto, risultante dalla riunione dei nomi semplici degli elementi componenti, più o meno abbreviati (poichè se qualche variazione occorre in questi nomi generici, essa non riguarda che le abbreviazioni particolari de' nomi dei componenti, quali si presenteranno negli esempi di applicazione), ma solo a quella dei nomi specifici, cioè degli aggettivi numerici che debbono esprimere i numeri di equivalenti, per cui ciascuna sostanza elementare concorre alla formazione del composto.

Io avea proposto di indicare questi numeri coi nomi aggettivi *semplice, doppio, triplo*, ecc., e di dare questa stessa forma non solo ai numeri terminali, cioè relativi all' ultima delle sostanze componenti comprese in tale indicazione, ma anche a tutti gli altri, quando due o più fossero i componenti, di cui si dovesse esprimere il numero degli equivalenti; dicendo per esempio *semplice-doppio, triplo-doppio, triplo-quadruplo, triplo-quadruplo-quintuplo*, ecc. Osservo ora che la ripetizione di questa terminazione per ciascuno dei componenti allungherebbe soverchiamente i nomi specifici di cui si tratta, e ne renderebbe difficile la pronunziazione. Propongo quindi di limitare questa terminazione aggettiva all' ultimo dei nomi numerici contenuti nel nome specifico di ciascun composto, indicando quelli che lo precedono coi semplici nomi o particelle numeriche *uno* od *uni, due, tre* o *tri, quattro* o *quadri, cinque* o *quinque, sei* o *ses, sette* o *setti, otto, nove, dieci* o *deci, undici* od *onde, dodici* o *dode* ecc. Così quel composto per esempio, che secondo la mia prima proposizione avrebbe avuto per nome specifico l'aggettivo *triplo-quadruplo-quintuplo*, prenderà più semplicemente il nome di *tri-quadri-quintuplo*, e così degli altri, come si vedrà negli esempi che quì appresso ne saranno arrecati. Questi nomi anche così semplificati potranno tuttavia riuscire talvolta un po' lunghi per le sostanze di composizione più complessa, e in cui alcuni dei componenti entrassero per numeri di equivalenti alquanto elevati, e soprattutto espressi da due cifre; ma queste sostanze di composizione così complicata avranno raramente ad indicarsi nell' uso ordinario della nomenclatura, e non sarà sempre necessario di aggiungervi il nome specifico, che esprime il numero relativo degli equivalenti de' loro componenti.

Questi nomi numerici esprimenti il numero degli equivalenti di ciascun componente debbono collocarsi nel nome specifico, secondo ciò che si è detto nella prima Memoria, nell' ordine delle sostanze a cui si riferiscono, quale esse lo presentano nel nome sostantivo generico del composto, ordine

che è esso medesimo determinato dalla lor qualità più o meno elettro-negativa, od elettro-positiva; e debbono estendersi dal primo de' componenti sino a quello al di là del quale gli altri componenti non siano più contenuti che per un solo equivalente, questi non avendo più bisogno di alcuna indicazione numerica. Secondo questa regola, se anche l'ultimo dei componenti entrasse nel composto per più d' un equivalente, se ne dovrebbe pure esprimere il numero come per gli altri componenti. Io avea però fatta un'eccezione per questo caso nella prima Memoria, alla forma generale dei nomi numerici adottata per gli altri componenti. Invece di applicare la terminazione in *uplo* a quest' ultimo numero, io avea proposto di premetterne l' indicazione al nome specifico composto coi nomi parziali *semi*, *terzo*, *quarto* ecc., come per significare che i numeri relativi a ciascuno degli altri componenti dovessero prendersi per metà, per terza, per quarta parte ecc. relativamente a questo componente. Ma credo ora più conveniente di rinunziare a tale eccezione, e di comprendere più semplicemente tutte le sostanze componenti nello stesso modo d' indicazione, estendendo la serie de' nomi numerici nell' ordine e nella forma sovra esposta, anche sino all' ultimo de' componenti quando esso entri nel composto per più d' un equivalente.

Ciò posto io ripeterò qui per maggior chiarezza le regole generali da seguirsi nella formazione di questi nomi specifici colle modificazioni che ho ora proposte al sistema stabilito nella prima Memoria.

Il nome generico sostantivo che forma la prima parte del nome d'un composto essendo, come sopra si è detto, composto de' nomi abbreviati de' suoi componenti elementari nell' ordine della loro qualità elettro-chimica, cominciando dai più elettro-negativi, e passando successivamente ai più positivi, per formarne il nome specifico, si cerchino primieramente i numeri più piccoli, cioè *primi* fra loro, ossia non aventi alcun fattore a tutti comune, per cui si possano rappresentare i

numeri relativi di equivalenti delle sostanze semplici che costituiscono il composto. Dico il numero degli *equivalenti*, e non degli *atomi*, perchè, come ho fatto notare nella prima Memoria, i Chimici sono a un dipresso d' accordo sul valore degli equivalenti dei diversi corpi semplici, cioè sulle dosi relative per cui essi entrano nelle combinazioni che si considerano come tra loro analoghe o corrispondenti, mentre nol sono sempre sul peso de' loro atomi; così per esempio per l' idrogeno, pel cloro ecc. si prende generalmente l' equivalente doppio dell' atomo che sarebbe indicato dalla densità dei loro gaz relativamente a quella del gaz ossigeno; nè pare esservi motivo sufficiente di ammettere a tale riguardo le idee speciali di Gerhardt e Laurent che si sono in parte scostati dall' uso comune. Ciò posto:

1°. Se il numero degli equivalenti così espresso è, per tutti i componenti, l' unità, cioè, se essi entrano tutti nel composto per un solo equivalente, il nome specifico consisterà nel solo aggettivo *semplice*.

2°. Se l' ultima od alcuna delle ultime sostanze componenti nell'ordine suddetto non entrano nel composto che per un solo equivalente, mentre quelle che le precedono presentano diversi numeri di equivalenti, si indicherà nel nome specifico il numero degli equivalenti di queste nello stesso ordine in cui i loro nomi sono posti nel nome generico; queste indicazioni si faranno semplicemente coi nomi ordinarj dei numeri, o con particelle corrispondenti, sino all'ultimo di questi numeri, a cui si darà la forma aggettiva *doppio, triplo, quadruplo* ecc. Si noterà che tra i numeri che precedono quest' aggettivo potrà anche trovarsi l' unità, da indicarsi colla particella *uni*, quando cioè alcuna delle sostanze a cui essi si riferiscono entri nel composto per un solo equivalente, mentre quelle che la seguono abbiano più equivalenti. I componenti poi non compresi nel nome specifico così formato si sottintendono entrar tutti nel composto per un solo equivalente. Così se il composto è binario, cioè formato di due sole sostanze

elementari, il nome specifico nel supposto caso non potrà consistere che in un solo nome numerico, che sarà *doppio*, *triplo*, *quadruplo* ecc., secondo il numero di equivalenti del primo componente che sono uniti ad un equivalente del secondo. Se il composto è ternario vi potranno essere nel nome specifico o un solo, o due numeri, che si riferiranno al primo, o ai due primi componenti, mentre gli altri due, o il terzo compresi nel composto ciascuno per un solo equivalente si lascieranno senza indicazione. Se il composto è quaternario si dovranno esprimere nel nome specifico o un solo, o due, o tre numeri che si riferiranno al primo, ai due primi, o ai tre primi componenti, il nome del numero finale prendendo sempre la forma aggettiva *doppio*, *triplo*, *quadruplo* ecc.

3°. Se l'ultimo componente entra anch'esso per più d'un equivalente nella composizione ridotta, come si è detto alla sua più semplice espressione numerica, dovrà ad esso pure applicarsi, come a tutti i precedenti, l'indicazione del numero de'suoi equivalenti, la quale essendo finale prenderà la forma aggettiva suddetta *doppio*, *triplo* ecc., mentre agli altri componenti si riferiranno i semplici nomi o particelle numeriche *uni*, *due*, *tri* ecc.

4°. In tutti questi casi, occorrendo che due o più delle sostanze componenti di seguito, nell' ordine indicato, offrano lo stesso numero di equivalenti, basterà mettere nel nome specifico una sola volta questo numero, premettendovi le particelle *bis*, *ter*, *quater* ecc., per esprimere quante volte esso si debba intendere ripetuto.

Secondo queste regole i nomi specifici dei diversi composti che presenteranno i numeri seguenti di equivalenti dei loro componenti saranno quelli quì appresso rispettivamente indicati per servir d' esempio:

Composti binarj 1, 1 semplice ; 2, 1 doppio ; 3, 1 triplo; 4, 1 quadruplo; ecc.
1, 2 uni-doppio; 3, 2 tri-doppio; 5, 2 cinque-doppio ecc.
1, 3 uni-triplo ; 2, 3 due-triplo; 4, 3 quadri-triplo ecc. ecc.
Composti ternarj 1, 1, 1 semplice ; 2, 2, 1 bis-doppio ; 3, 2, 1 tri-doppio;
3, 3, 1 bis-triplo ; 1, 2, 1 uni-doppio ecc.
1, 1, 2 bis-uni-doppio; 1, 3, 2 uni-tri-doppio; 3, 1, 2 tri-uni-doppio;
3, 3, 2 bis-tri-doppio ecc.
1, 1, 3 bis-uni-triplo ; 1, 2, 3 uni-due-triplo; 2, 2, 3 bis-due-triplo;
2, 1, 3 due-uni-triplo ecc.
2, 1, 1 doppio ; 3, 1, 1 triplo; 4, 1, 1 quadruplo, ecc.
1, 2, 2 uni-bis-doppio; 3, 2, 2 tri-bis-doppio ecc.
1, 3, 3 uni-bis-triplo ; 2, 3, 3 due-bis-triplo ecc. ecc.
Composti quatern. 1, 1, 1, 1 semplice; 2, 2, 2, 1 ter-doppio; 1, 2, 2, 1 uni-bis-doppio;
3, 2, 2, 1 tri-bis-doppio ecc.
1, 1, 1, 2 ter-uni-doppio; 3, 3, 3, 2 ter-tri-doppio;
3, 3, 2, 2 bis-tri-bis-doppio ecc.

Stabiliti così i principj generali per la formazione dei nomi generici e specifici di qualunque composto, io presenterò quì, per mostrarne più compiutamente l' applicazione, di quello che io avea fatto nella prima Memoria, l' abozzo d' un quadro generale delle sostanze chimiche conosciute, coi nomi che esse dovranno prendere secondo questi principj, ad esclusione però dei composti organici, e di alcuni altri composti suscettibili dell'applicazione dei principj speciali della nomenclatura loro propria, di cui in appresso ci occuperemo. Indicherò ciascun composto colla formola chimica che gli appartiene, prendendo le lettere iniziali dei componenti nel senso dell' atomo che loro assegna Berzelius, da alcune eccezioni in fuori, e sottolineando quelle che dovranno essere raddoppiate per formarne gli equivalenti. Aggiungerò a ciascuna sostanza il nome sotto cui essa è oggi più generalmente conosciuta nella nomenclatura usitata.

Ho fatto osservare nella prima Memoria, che i diversi generi formati secondo i principj della nostra nomenclatura, ed anche le specie tra loro analoghe appartenenti a generi diversi, possono riunirsi sotto una denominazione più generale,

mettendo nel loro nome composto, in vece del nome di una delle sostanze elementari che vi entrano, un nome che dinoti una classe qualunque di componenti, per esempio quello di *metallo*. Propongo quì più generalmente per tale oggetto il nome di *elemento*, che in composizione potrà abbreviarsi in quello di *elemo*.

Ciò posto, ecco la forma che potrebbe prendere il proposto quadro di tutte le sostanze semplici e composte, comprendendo in esso anche alcuni composti che non si sono ancora ottenuti allo stato isolato, ma che si concepiscono ordinariamente come esistenti in combinazione con altri componenti, e senza entrare a tale riguardo in discussioni, che sarebbero estranee al nostro oggetto.

I.[a] Classe. *Sostanze semplici od elementari.*

Si riterrà per ciascuna di queste sostanze il nome già generalmente usitato, facendovi solo, se si crede, alcune abbreviazioni, e indicando quelle più notabili, che questi nomi dovranno subire nella loro riunione per la formazione dei nomi generici de' composti. Potranno esse disporsi nell'ordine della loro qualità elettro-chimica, cominciando dalle più elettro-negative, tra le quali la prima è l'ossigeno, e terminando colle più positive, quale è probabilmente più di tutte l'idrogeno, dovendo poi questo stesso ordine seguirsi nella collocazione de' nomi parziali per formarne i nomi dei composti, secondo il principio che si è sopra stabilito. Io ho cercato di determinare quest' ordine nelle mie due Memorie *sul Volume atomico de' corpi*, stampate nel Tomo VIII delle Memorie dell' Accademia delle scienze di Torino, nuova serie: rimangono però ancora incertezze a tale riguardo, massime per alcune sostanze meno generalmente conosciute; e converrà attenersi provvisoriamente per la nomenclatura a quella posizione che sembrerà più probabile per ciascuna di esse. Credo di potermi quì dispensare dallo scrivere la serie di queste

sostanze semplici, coi loro nomi, potendosi le loro abbreviazioni da me adottate, e la sede che ho creduto poter loro assegnare quanto alla qualità elettrochimica, osservare nei nomi generici che quì appresso indicherò pei loro principali composti.

II.ª Classe. *Composti binarj, ossia di due sole sostanze elementari.*

1°. Ordine. *Osselemi*. Combinazioni dell' ossigeno colle altre sostanze elementari (acidi, ossidi, ossiduli ecc., della nomenclatura usitata.)

1°. Genere. Ossidro (Lat. *oxhydrum*). Combinazioni dell' ossigeno coll' idrogeno.

Specie 1ª. Ossidro semplice O $\underline{H}$ (acqua, ossido d' idrogeno)
2ª. ——— doppio $O^2\underline{H}$ (perossido, o bi-ossido d'idrogeno, acqua ossigenata).

2°. Genere. Ossazoto (*oxazotum*). Composti d' ossigeno e azoto.

Specie 1ª. Ossazoto semplice O $\underline{Az}$ (protossido d' azoto)
2ª. ——— doppio $O^2\underline{Az}$ (deutossido d' azoto, gaz nitroso)
3ª. ——— triplo $O^3\underline{Az}$ (acido nitroso od azotoso)
4ª. ——— quadruplo $O^4\underline{Az}$ (acido iponitrico od ipo-azotico)
5ª. ——— quintuplo $O^5\underline{Az}$ (acido nitrico od azotico).

3°. Genere. Ossicarbo (*oxycarbium*). Composti d' ossigeno e di carbonio.

Specie 1ª. Ossicarbo semplice O C (ossido di carbonio)
2ª. ——— doppio O^2C (acido carbonico)
3ª. ——— tri-doppio O^3C^2 (acido ossalico)
4ª. ——— quadri-quintuplo O^4C^5 (acido croconico)
5ª. ——— tri-quadruplo O^3C^4 (acido mellitico).

N. B. Ho quì annotate queste tre ultime specie, come esempj d' applicazione della nomenclatura generale, ma essi possono anche riferirsi, e forse più propriamente soprattutto i due ultimi, ai composti organici.

4°. Genere. Ossisolfo (*oxysulphur*). Composti d' ossigeno e di zolfo.

Specie 1ª. Ossisolfo semplice O S (acido iposolforoso)
2ª. ——— doppio O^2S (acido solforoso)
3ª. ——— triplo O^3S (acido solforico)
4ª. ——— cinque-doppio O^5S^2 (acido iposolforico)
5ª. ——— cinque-triplo O^5S^3 (acido iposolforico mono-solforato di Langlois)
6ª. ——— cinque-quadruplo O^5S^4 (acido iposolforico bi-solforato di Fordos e Gelis)
7ª. ——— setti-sestuplo O^7S^6 } (acidi scoperti da Plessy, *Annales de*
8ª. ——— setti-quintuplo O^7S^5 } *Chimie et de Physique*. Juin 1847.)

N. B. Si osserverà che la nostra nomenclatura è indipendente da qualunque supposizione che si voglia fare sulla costituzione, o formola così detta *razionale* da attribuirsi a questi acidi, e dalla esistenza o nò dei medesimi allo stato isolato.

5°. GENERE. Ossifosforo od ossifosfo (*oxyphosphorum*). Composti d'ossigeno e di fosforo.

Specie 1ª. Ossifosforo semplice $O\underline{P}$ (acido ipofosforoso)
2ª. ———— triplo $O^3\underline{P}$ (acido fosforoso)
3ª. ———— quintuplo $O^5\underline{P}$ (acido fosforico).

N. B. Questi acidi sono quì indicati quali si possono concepire esistenti, sebbene alcuni di essi non pajano poter sussistere che in combinazione ternaria cogli elementi dell'acqua. Si fa inoltre astrazione dai diversi stati *isomeri* in cui possano trovarsi, non essendo l' isomeria considerata nella nomenclatura chimica propriamente detta, come ho fatto osservare nella prima Memoria.

6°. GENERE. Ossicloro (*oxychlorum*). Composti d' ossigeno e di cloro.

Specie 1ª. Ossicloro semplice $O\underline{Cl}$ (ossido cloroso, gaz euclorino di Davy)
2ª. ———— triplo $O^3\underline{Cl}$ (acido cloroso)
3ª. ———— quintuplo $O^5\underline{Cl}$ (acido clorico)
4ª. ———— settuplo $O^7\underline{Cl}$ (acido ossiclorico, o perclorico).

7°. GENERE. Ossilicio od ossilcio (*oxysilicium* od *oxysilcium*). Composto d' ossigeno e di silicio.

Specie 1ª. Ossilicio doppio O^2Si (silicia, acido silicico). Secondo l' ipotesi che ho adottata nella prima Memoria sulla sua composizione.

8°. GENERE. Ossipoto od ossipozio (*oxypotum* od *oxypotium*). Composti d' ossigeno e di potassio.

Specie 1ª. Ossipoto semplice $O\,Po$ (potassa)
2ª. ———— triplo O^3Po (iperossido o perossido di potassio).

9°. GENERE. Ossisodio (*oxysodium*). Composti d' ossigeno e di sodio.

Specie 1ª. Ossisodio semplice $O\,So$ (soda)
2ª. ———— tri-doppio O^3So^2 (iperossido o perossido di sodio).

10°. GENERE. Ossicalcio (*oxycalcium*). Composti d' ossigeno e di calcio.

Specie 1ª. Ossicalcio semplice $O\,Ca$ (calce)
2ª. ———— doppio O^2Ca (iperossido o perossido di calcio).

11°. GENERE. Ossipiombo (*oxyplumbum*). Composti d' ossigeno e di piombo.

Specie 1ª. Ossipiombo semplice $O\,Pb$ (ossido o protossido di piombo)
2ª. ———— doppio O^2Pb (sovrossido di piombo).

12°. Genere. Ossimerco (*oxymercum*). Composti d' ossigeno e mercurio.

Specie 1ª. Ossimerco uni-doppio OHg^2 (ossido mercurioso, protossido di mercurio)

2ª. ——— semplice OHg (ossido mercurrico, deutossido di mercurio).

13°. Genere. Ossiferro (*oxyferrum*). Composti d' ossigeno e di ferro.

Specie 1ª. Ossiferro semplice $O\,Fe$ (ossido ferroso, protossido di ferro)

2ª. ——— tri-doppio O^3Fe^2 (ossido ferrico, sesqui-ossido di ferro)

3ª. ——— quadri-triplo O^4Fe^3 (ossido ferroso-ferrico)

4ª. ——— triplo O^3Fe (acido ferrico di Fremy).

14°. Genere. Ossarsenio (*oxarsenium*). Composti d' ossigeno e d' arsenico.

Specie 1ª. Ossarsenio triplo $O^3\underline{As}$ (acido arsenioso)

2ª. ——— quintuplo $O^5\underline{As}$ (acido arsenico)

ecc. ecc.

Si potranno dietro questi esempj formare facilmente i nomi generici e specifici degli altri composti appartenenti a quest' ordine degli osselemi, cioè dei diversi gradi d' ossigenazione degli altri corpi metallici e non metallici. Così si avranno i generi *ossiboro, ossibromo, ossiodio, ossimagnio* (magnesia), *ossibario, ossargio* (ossido d' argento), *ossauro, ossicupro* od *ossirame, ossistanno, ossalumio* (alumina), *ossantimo* (ossigeno e antimonio), *ossicromo, ossitunsto, ossimango* (ossido di manganese) *ecc.*

2°. Ordine. *Clorelemi*; combinazioni del cloro cogli altri corpi elementari (cloridi, e cloruri.)

1°. Genere. Cloridro (*chlorhydrum*). Composto di cloro, e idrogeno.

Specie 1ª. Cloridro semplice $\underline{Cl}\,\underline{H}$ (acido idroclorico o cloridrico)

ecc. ecc.

Si avranno così in quest' ordine i generi *clorazoto*, *clorocarbo, clorosolfo, clorofosforo, clorosilcio, cloroboro, cloropoto, clorosodio, cloropiombo, clorostanno, cloroferro, clorarsenio ecc.*; e i nomi delle specie si formeranno in una maniera analoga a quella adoperata per le specie dei generi dell' ordine precedente, dietro ai diversi gradi di clorurazione che le costituiscono.

3°. ORDINE. *Solfelemi*; combinazioni dello zolfo cogli altri corpi elementari (solfidi e solfuri.)

A quest'ordine apparterranno i generi *solfidro* (idrogeno solforato, acido solfidrico), *solfocarbo* (solfuro di carbonio, o carburo di zolfo), *solfopoto, solfosodio, solfoferro, solfopiombo ecc.*, colle loro specie formate dai diversi gradi di solforazione.

Si formeranno nella stessa maniera gli ordini dei *fluorelemi*, dei *bromelemi*, degli *iodelemi*, dei *carbelemi*, degli *azelemi*, dei *fosfelemi*, degli *arselemi ecc.*, cioè delle combinazioni del *fluorio*, del *bromo*, dell'*iodio*, del *carbonio*, dell'*azoto*, del *fosforo*, dell'*arsenico ecc.* coi corpi semplici più positivi di loro nella serie elettro-chimica. Ho annoverato tra i solfelemi il solfocarbo per uniformarmi alla maniera ordinaria di considerare il solfuro di carbonio; può però dubitarsi se il carbonio non sia più elettro-negativo che lo zolfo, nel qual caso questo composto apparterrebbe all'ordine dei carbo-elemi sotto il genere *carbosolfo*.

III.a CLASSE. *Composti ternarj ossia di tre sostanze elementari.*

1a. SOTTO-CLASSE. *Ossibi-elemi*; combinazioni dell'ossigeno con due altri elementi.

(Questa sotto-classe è principalmente formata dai così detti *Ossisali* nella nomenclatura usitata.)

1°. ORDINE. *Ossazelemi*. Composti d'ossigeno, d'azoto e d'un terzo elemento (nitrati, nitriti ecc.)

1°. GENERE. Ossazidro (*oxazhydrum*). Composti d'ossigeno, azoto e idrogeno.

Specie 1a. Ossazidro sestuplo $\underline{Az}O^5 + \underline{H}O = O^6\underline{Az}\,\underline{H}$ (1° idrato d'acido nitrico; nitrato idrico).

N. B. Le altre specie di questo genere saranno formate dagli altri gradi d'idratazione dell'acido nitrico nitroso ecc., e sarà facile formarne il nome specifico quando le proporzioni d'acido e d'acqua vi siano ben determinate.

2°. GENERE. Ossazopoto (*oxazopotum*). Composti d'ossigeno, azoto e potassio.

Specie 1a. Ossazopoto sestuplo $O^5\underline{Az} + OPo = O^6\underline{Az}Po$ (nitrato o azotato di potassa)

2a. ——— quadruplo $O^3\underline{Az} + OPo = O^4\underline{Az}Po$ (nitrito o azotito di potassa).

3°. Genere. Ossazoferro (*oxazoferrum*). Composti di ossigeno, azoto e ferro.

Specie 1ª. Ossazoferro sestuplo $O^5 \underline{Az} + OFe = O^6 \underline{Az} Fe$ (nitrato ferroso)

2ª. ———— diciotto-tri-doppio $O^{15} \underline{Az}^3 + O^3 Fe^2 = O^{18} \underline{Az}^3 Fe^2$ (nitrato ferrico)

3ª. ———— quadruplo $O^3 \underline{Az} + OFe = O^4 \underline{Az} Fe$ (nitrito ferroso)

4ª. ———— dodici-tri-doppio. $O^9 \underline{Az}^3 + O^3 Fe^2 = O^{12} \underline{Az}^3 Fe^2$ (nitrito ferrico).

4.° Genere. Ossazopiombo (*oxazoplumbum*). Composti di ossigeno, azoto e piombo.

Specie 1ª. Ossazopiombo sestuplo $O^5 \underline{Az} + OPb = O^6 \underline{Az} Pb$ (nitrato plombico di Berzelius)

2ª. ———— settuni-doppio $O^5 \underline{Az} + O^2 Pb^2 = O^7 \underline{Az} Pb^2$ (nitrato biplombico)

3ª. ———— quadruplo $O^3 \underline{Az} + OPb = O^4 \underline{Az} Pb$ (nitrito plombico)

4ª. ———— cinque-doppio $O^3 \underline{Az} + O^2 Pb^2 = O^5 \underline{Az} Pb^2$ (nitrito biplombico).

N. B. Sarà facile formare i nomi anche delle altre specie di nitrati e di nitriti di piombo, con diversi gradi di saturazione. ecc.

2°. Ordine. *Ossulfelemi.* Composti d'ossigeno, di zolfo e d'un terzo elemento (solfati, solfiti ecc.)

1°. Genere. Ossulfidro (*oxysulphydrum* od *osulphydrum*). Composti di ossigeno, zolfo ed idrogeno.

Specie 1ª. Ossulfidro quadruplo $O^3 S + O\underline{H} = O^4 S\underline{H}$ (mono-idrato d'acido solforico, solfato idrico, acido solforico concentrato)

2ª. ———— cinque-uni-doppio $O^3 S + O^2 \underline{H}^2 = O^5 S \underline{H}^2$ (bi - idrato d' acido solforico).

N. B. Nella stessa maniera si formeranno i nomi di altre specie di questo genere, risultanti da diversi gradi d' idratazione degli acidi solforico, solforoso, iposolforico ecc. di cui fosse ben verificata l' esistenza.

2°. Genere. Ossulpoto (*osulpotum*). Composti di ossigeno, zolfo e potassio.

Specie 1ª. Ossulpoto quadruplo $O^3 S + OPo = O^4 S\ Po$ (solfato di potassa, o potassico)

2ª. ———— setti-doppio $O^6 S^2 + OPo = O^7 S^2 Po$ (bisolfato di potassa)

3ª. ———— triplo $O^2 S + OPo = O^3 S\ Po$ (solfito di potassa)

4ª. ———— cinque-doppio $O^4 S^2 + OPo = O^5 S^2 Po$ (bisolfito di potassa)

5ª. ———— sei-doppio $O^5 S^2 + OPo = O^6 S^2 Po$ (iposolfato di potassa)

6.ª ———— tri-doppio $O^2 S^2 + OPo = O^3 S^2 Po$ (iposulfito di potassa).

N. B. Altre specie saranno presentate dalle combinazioni degli acidi dello zolfo, di cui sopra si è parlato, colla potassa.

3°. GENERE. Ossulferro (*osulferrum*). Composti d' ossigeno, di zolfo e di ferro.

Specie 1ª. Ossulferro quadruplo $O^3 S + OFe = O^4 S Fe$ (solfato ferroso)

2ª. ——— dodici-tri-doppio $O^9 S^3 + O^3 Fe^2 = O^{12} S^3 Fe^2$ (solfato ferrico)

3ª. ——— quindici-tri-quadruplo $O^9 S^3 + O^6 Fe^4 = O^{15} S^3 Fe^4$ (solfato biferrico)

4ª. ——— triplo $O^2 S + OFe = O^3 S Fe$ (solfito ferroso)

5ª. ——— nove-tri-doppio $O^6 S^3 + O^3 Fe^2 = O^9 S^3 Fe^2$ (solfito ferrico)

6ª. ——— sei-doppio $O^5 S^2 + OFe = O^6 S^2 Fe$ (iposolfato ferroso)

7ª. ——— diciotto-sei-doppio $O^{15} S^6 + O^3 Fe^2 = O^{18} S^6 Fe^2$ (iposolfato ferrico)

8ª. ——— tri-doppio $O^2 S^2 + OFe = O^3 S^2 Fe$ (iposulfito ferroso).

N. B. I sali formati dagli altri acidi dello zolfo di cui sopra si è parlato, coi due ossidi di ferro, potranno fornire altre specie di questo genere, e se ne otterrà nella stessa maniera il nome specifico.

ecc. Gli altri generi di quest' ordine saranno principalmente formati dai solfati, solfiti ecc. delle altre basi, come pure da alcuni acidi od ossidi in cui ad una porzione dell'ossigeno è sostituito lo zolfo, come nell' acido solfo-fosforico di Wurtz $O^3 S^2 \underline{P}$, che prenderà il nome di *Ossulfosfo tri-doppio* ecc.

3°. ORDINE. *Ocarbelemi.* Composti di ossigeno, carbonio ed un altro elemento.

1°. GENERE. Ocarbopoto od Ocarpoto (*ocarbopotum* od *ocarpotum*). Composti d' ossigeno, carbonio e potassio.

Specie 1ª. Ocarpoto triplo $O^2 C + OPo = O^3 C Po$ (carbonato di potassa o potassico)

2ª. ——— otto-tri-doppio $O^6 C^3 + O^2 Po^2 = O^8 C^3 Po^2$ (sesquicarbonato di potassa)

3ª. ——— cinque-doppio $O^4 C^2 + OPo = O^5 C^2 Po$ (bicarbonato di potassa).

ecc. Similmente a questo saranno formati gli altri generi di quest'ordine dai carbonati delle altre basi: *ocarcalcio*, *ocarferro* ecc.

4°. Ordine. *Oclorelcmi.* Composti di ossigeno, cloro, e un terzo corpo.

1°. Genere. Oclocarbo (*ochlocarbium*). Composti d' ossigeno, cloro e carbonio.

Specie 1ª. Oclocarbo semplice $O\underline{Cl}C$ (acido clorossi-carbonico, ossiclorido carbonico di Berzelius).

2°. Genere. Oclopoto (*ochlopotum*). Composti d' ossigeno, cloro e potassio.

Specie 1ª. Oclopoto sestuplo $O^5\underline{Cl} + OPo = O^6\underline{Cl}Po$ (clorato potassico)

2ª. ——— quadruplo $O^3\underline{Cl} + OPo = O^4\underline{Cl}Po$ (clorito potassico)

3ª. ——— ottuplo $O^7\underline{Cl} + OPo = O^8\underline{Cl}Po$ (iperclorato od ossiclorato potassico).

ecc. Generi formati dai clorati, cloriti ecc. delle diverse basi; ed altri formati dagli acidi ed ossidi in cui ad una porzione dell' ossigeno è sostituito il cloro, come nell' acido clorosolforico di Regnault $O^2\underline{Cl}S$ che si chiamerà *ossiclosolfo* od *oclorosolfo doppio*; nel clorossido di fosforo di Wurtz $O^2\underline{Cl^3}\underline{P}$, che sarà l' *oclofosfo due-triplo* ecc.

5°. Ordine. *Ofosfelemi.* Composti d' ossigeno, fosforo, e d' un terzo elemento.

1°. Genere. Ofosfidro (*ophosphydrum*). Composti d'ossigeno, fosforo ed idrogeno.

Specie 1ª. Ofosfidro otto-uni-triplo $O^5\underline{P} + \underline{H}^3O^3 = O^8\underline{P}\underline{H}^3$

2ª. ——— setti-uni-doppio $O^5\underline{P} + \underline{H}^2O^2 = O^7\underline{P}\underline{H}^2$

3ª. ——— sestuplo $O^5\underline{P} + \underline{H}O = O^6\underline{P}\underline{H}$.

N. B. Queste tre specie sono formate dai tre idrati di acido fosforico che corrispondono ai fosfati, parafosfati e metafosfati che si considerano come neutri, la nostra nomenclatura facendo altronde astrazione dallo stato isomerico particolare in cui l' acido possa in essi trovarsi.

4ª. Ofosfidro tri-uni-doppio $O\underline{P} + \underline{H}^2O^2 = O^3\underline{P}\underline{H}^2$ (acido ipofosforoso quale si trova ne' suoi sali disseccati)

5ª. ——— quadri-uni-triplo $O\underline{P} + \underline{H}^3O^3 = O^3\underline{P}\underline{H}^2 + \underline{H}O = O^4\underline{P}\underline{H}^3$ (idrato dell' acido precedente)

6ª. ——— quadruplo $O^3\underline{P} + \underline{H}O = O^4\underline{P}\underline{H}$ (acido fosforoso quale si trova ne' suoi sali disseccati)

7ª. ——— sei-uni-triplo $O^3\underline{P} + \underline{H}^3O^3 = O^4\underline{P}\underline{H} + \underline{H}^2O^2 = O^6\underline{P}\underline{H}^3$ (idrato dell' acido precedente).

N. B. Riguardo a queste quattro ultime specie V. Wurtz, *Annales de Chimie et de Phys.* Janvier 1846.

La nostra nomenclatura lascia indecisa la questione sulla costituzione che si voglia attribuire a questi composti.

2°. GENERE. Ofosfopoto od ofospoto (*ophosphopotum* od *ophospotum*). Composti d'ossigeno, fosforo e potassio.

Specie 1ª. Ofospoto otto-uni-triplo $O^5 \underline{P} + O^3 Po^3 = O^8 \underline{P} Po^3$

2ª. ——— setti-uni-doppio $O^5 \underline{P} + O^2 Po^2 = O^7 \underline{P} Po^2$

3ª. ——— sestuplo $O^5 \underline{P} + OPo = O^6 \underline{P} Po$

N. B. Queste tre specie sono formate dai tre gradi di saturazione, che si considerano come neutri rispettivamente nei così detti fosfato, parafosfato e metafosfato di potassa.

4ª. Ofospoto doppio $O\underline{P} + OPo = O^2 \underline{P} Po$ (ipofosfito di potassa)

5ª. ——— cinque-doppio $O^3 \underline{P} + O^2 Po^2 = O^5 \underline{P} Po^2$ (fosfito di potassa)

N. B. In queste due specie si fa astrazione dagli elementi dell'acqua, con cui questi sali sono uniti essenzialmente secondo il lavoro di Wurtz, stato in cui non appartengono più ai composti ternarj.

ecc. Gli altri generi di quest' ordine, colle loro specie, si dedurranno similmente dalla composizione dei fosfati, fosfiti e ipofosfiti delle diverse basi.

Nella stessa maniera si formeranno gli altri ordini di questa sotto-classe, come gli *obromelemi*, *ossiodelemi*, *oborelemi*, *ossilicelemi*, *ossarselemi*, *ocromelemi ecc.* coi loro generi e specie. Molti di questi ordini e generi corrisponderanno agli ossisali dei diversi acidi colle diverse basi nella nomenclatura usitata; ma ve ne sono anche alcuni che non si sogliono considerare come sali, e di cui si formerà senza difficoltà il nome, tostochè saranno date le proporzioni atomiche dei loro tre componenti. Il numero dei generi contenuti in ciascuno di questi ordini andrà diminuendo a misura che la seconda delle sostanze componenti sarà meno elettro-negativa o più positiva, ed avrà perciò nella serie elettro-chimica un minor numero di altre sostanze più di sè positive per formarne l'ultimo componente. Così gli ossidi dei metalli meno positivi combinandosi cogli ossidi dei metalli più positivi formeranno generi aventi per componenti l'ossigeno e i due metalli. Tutti gli ordini poi potranno aver un genere, di cui l'ultimo componente sia l'idrogeno, poichè consideriamo questo elemento

come il più elettro-positivo di tutti. Questi generi saranno principalmente formati dalle combinazioni dei diversi ossidi coll'acqua, ossia dagli idrati di questi ossidi; così gli ordini di cui il secondo componente sarà uno dei metalli i più positivi, come il potassio e il sodio, cioè l'ordine degli opotelemi e quello degli ossisodelemi od ossodelemi saranno quasi ridotti ciascuno ad un solo genere, cioè quello dell'*opotidro* e quello dell'*ossodidro*, i quali saranno formati dagli idrati di potassa e di soda.

2ª. Sotto-classe. *Solfo-bi-elemi*; combinazioni dello zolfo con due altri elementi.

Questa sotto-classe si dividerà in ordini, generi e specie in una maniera analoga alla sotto-classe precedente; essa sarà principalmente formata dai così detti solfo-sali, cioè dai solfuri di due metalli, in cui il solfuro del metallo negativo o meno positivo fa funzione d'acido relativamente a quello del metallo più positivo, e particolarmente anche dall'unione dell'idrogeno solforato, ossia acido solfidrico coi solfuri metallici.

3ª. Sotto-classe. *Cloro-bi-elemi*; combinazioni del cloro con due altri elementi.

A questa sotto-classe apparterranno principalmente i cloruri composti, ossia i composti di un cloruro elettro-negativo o clorido, con un cloruro elettro-positivo; essa si dividerà in ordini e generi come le due precedenti. E nella stessa maniera si formeranno altre sotto-classi, in cui la prima delle tre sostanze componenti sarà elettro-negativa relativamente alle altre due, come quelle dei *bromo-bielemi*, *iodo-bielemi ecc.* Ad alcuna di queste sotto-classi apparterranno alcuni composti, che nè anche nella nomenclatura usitata non si considerano come formati di due composti binarj preesistenti; così per esempio nella sotto-classe dei cloro-bi-elemi, vi sarà un ordine dei *closulfelemi*, di cui uno dei generi sarà il *closulfosfo*, al quale apparterrà il clorosulfuro di fosforo di Serullas $\underline{Cl}^3 S^2 \underline{P}$, che sarà il *closulfosfo tri-doppio*.

IV.ª *Classe. Composti quaternarj, ossia di quattro sostanze elementari.*

1ª. Sotto-classe. *Ossi-tri-elemi*. Composti d'ossigeno e di tre altri elementi.

1°. Ordine. *Ossul-bi-elemi*. Composti d'ossigeno, zolfo e di due altri elementi.

1°. Sottordine. *Ossulfalelemi*. Composti d'ossigeno, di zolfo, d'allumio e di un quarto elemento.

1°. Genere. Ossulfalpoto (*osulfolpotum*). Composto d'ossigeno, zolfo, allumio e potassio.

Specie 1ª. Ossulfalpoto sede-quadri-doppio $O^{12} S^4 + Al^2 O^3 + OPo = O^{16} S^4 Al^2 Po$

(Solfato d'allumina e di potassa; allume ordinario, astrazione fatta dall'acqua di cristallizzazione).

2°. GENERE. Ossulfalsodio (*osulfalsodium*). Composto d'ossigeno, zolfo, allumio e sodio.
Specie 1ª. Ossulfalsodio sede-quadri-doppio $O^{12} S^4 + Al^2 O^3 + OSo = O^{16} S^4 Al^2 So$
(solfato d' allumina e di soda, allume sodico)
ecc.

2°. SOTTORDINE. *Ossulferrelemi*. Composti d' ossigeno, zolfo, ferro e d' un quarto elemento.

1°. GENERE. Ossulferpoto (*osulferpotum*). Composto d' ossigeno, zolfo, ferro e potassio.
Specie 1ª. Ossulferpoto sede-quadri-doppio $O^{12} S^4 + Fe^2 O^3 + OPo = O^{16} S^4 Fe^2 Po$
(solfato d' ossido ferrico e di potassa, sale analogo all' allume ordinario, ma in cui l' ossido ferrico prende il luogo dell' allumina)
2ª. ——— otto-doppio $O^6 S^2 + OFe + OPo = O^8 S^2 Fe Po$
(solfato d' ossido ferroso e di potassa).

2°. GENERE. Ossulfersodio (*osulfersodium*). Composto d' ossigeno, zolfo, ferro e sodio.
Specie 1ª. Ossulfersodio sede-quadri-doppio $O^{12} S^4 + O^3 Fe^2 + OSo = O^{16} S^4 Fe^2 So$
(solfato d' ossido ferrico e di soda, analogo all' allume, in cui all' allumina sia sostituito l' ossido ferrico, e alla potassa la soda)
2ª. ——— otto-doppio $O^6 S^2 + OFe + OSo = O^8 S^2 Fe So$
(solfato d' ossido ferroso e di soda).

ecc. Gli altri generi di questo sottordine saranno formati nella stessa maniera colla sostituzione d'un altra sostanza elementare in vece del potassio e del sodio per ultimo componente, e ciascuno di questi generi comprenderà diverse specie risultanti dalle diverse proporzioni atomiche d' ossigeno e di zolfo nell' acido, di ossigeno e ferro nell' ossido di ferro, da quella dell' ossigeno che si voglia considerare come unito all' ultimo componente, e dalle diverse proporzioni dell' acido e delle due basi. L'analogo si dica di tutti gli altri sotto-ordini dell' ordine degli ossulbi-elemi. In ciascuno poi di questi sotto-ordini potrà essere contenuto un genere, in cui l' ultimo componente sia l' idrogeno; così, per esempio, uno di questi sotto-ordini sarà quello degli *ossulpotelemi*, e tra i generi di questo ve ne sarà uno sotto il nome di *ossulpotidro* (*osulpothydrum*), che sarà formato dalle combinazioni del solfato, solfito, iposolfito ecc. di potassa cogli elementi dell'acqua, sia che essi si vogliano considerare come idrati di questi sali, o come sali a doppia base, d' ossido e d' acqua, o che se ne voglia riguardar l'acido come contenente essenzialmente l'idrogeno, secondo la teoria di Wurtz sopraccennata.

2°. Ordine. *Ossazo-bi-elemi.* Composti di ossigeno, azoto e di due altri elementi. Diviso similmente in sotto-ordini aventi ancora un terzo componente comune, e questi in diversi generi formati ciascuno di quattro componenti determinati, e ciascuno di questi in più specie secondo le diverse proporzioni atomiche dei componenti.

3°. Ordine. *Oclo-bi-elemi.* Composti d' ossigeno, cloro e di due altri elementi, con divisione analoga in sotto-ordini, generi e specie.

ecc. formandosi nella stessa maniera gli altri ordini di questa sotto-classe, aventi tutti per prima sostanza componente l' ossigeno.

2ª. Sotto-classe. *Cloro-tri-elemi.* Composti di cloro, e di tre altri elementi elettro-positivi relativamente al medesimo.

3ª. Sotto-classe. *Solfo-tri-elemi.* Composti di zolfo, e di tre altri elementi elettro-positivi relativamente allo zolfo.

ecc. Ciascuna di queste sotto-classi si dividerà in ordini, sotto-ordini, generi e specie in una maniera analoga alla precedente degli ossi-tri-elemi.

I composti formati di più di quattro elementi potranno costituire altre classi, di cui si stabilirà la divisione e la nomenclatura secondo gli stessi principj; i nomi del resto ne diverranno necessariamente più lunghi e più complicati, a misura che crescerà il numero de' componenti. Ad aumentar questo numero potranno concorrere gli elementi dell' acqua; ma non credo che si debbano assoggettare rigorosamente alla nostra nomenclatura, per le ragioni allegate nella mia prima Memoria, gli idrati formati dall' acqua di semplice cristallizzazione.

Richiamerò quì l'osservazione che la nostra nomenclatura, per la natura stessa de' suoi principj, è affatto indipendente dalle questioni agitate tra i Chimici sull' ordine con cui si vogliano supporre riuniti i componenti nelle combinazioni, considerandoli o ciascuno separatamente, o due a due, tre a tre ecc. per formarne componenti immediati, e così dalle infinite ipotesi più o meno arbitrarie che si possono fare a tale riguardo per ciascun composto di più di due elementi.

II. Nomenclatura de' composti organici.

Ho esposto nella mia 1ª Memoria le ragioni per cui mi è sembrato conveniente di adottare una nomenclatura particolare pei composti organici. Il modo che io ho proposto per procedere alla sua formazione consiste essenzialmente nel dare un nome a ciascuno de' composti di carbonio e idrogeno, od anche di questi due elementi e d'azoto in diverse proporzioni atomiche, quali si presentano nelle sostanze organiche naturali, come se essi fossero corpi elementari, e di applicare quindi alle combinazioni di questi radicali composti, considerati come corpi semplici, coll' ossigeno, e tra loro, od anche con corpi inorganici, i principj della nomenclatura generale medesima che si è proposta pei corpi inorganici. Questi nomi particolari io ho creduto doversi attribuire non solo a quei composti carbo-idrici o carbazoto-idrici che presentassero rapporti diversi nel numero degli equivalenti di carbonio, idrogeno e azoto, ma anche a quelli, per cui il modo delle loro combinazioni ci conducesse ad ammettere un numero assoluto diverso di equivalenti per formare il loro equivalente totale, anzi a quelli ancora che senza richiedere la supposizione di una diversa grandezza di equivalente, si presentassero però nelle loro combinazioni con proprietà e relazioni chimiche diverse. Nè questo è contrario al nostro principio generale che la nomenclatura chimica propriamente detta non debba distinguere con nomi diversi i composti isomeri tra loro; poichè i radicali composti di cui si tratta non sono riguardati nella nomenclatura de' corpi organici come corpi composti, ma come corpi semplici che debbono necessariamente avere nomi diversi quando si distinguono tra loro per le chimiche proprietà.

Ma siccome si è osservato che questi radicali composti possono perdere uno o più degli equivalenti d' idrogeno che entrano nella loro formazione, e prendere in loro vece altrettanti

equivalenti di diverse sostanze elementari estranee alla loro primitiva composizione, senza cangiar di *tipo*, cioè senza cangiare le relazioni chimiche, che loro aveano fatto attribuire un nome particolare, io avea cercato nella prima Memoria di esprimere i risultati di queste sostituzioni facendo entrare il nome della sostanza o delle sostanze sostituite, unitamente a quello del radicale fondamentale nel nome sostantivo del composto, e introducendovi pure alcune particelle numeriche per indicare il numero degli equivalenti su cui cade la sostituzione. Ma nell'ammettere così nomi sostantivi misti di nomi di componenti e di nomi numerici, io mi era scostato dal principio generale che io avea preso per base di tutta la nomenclatura chimica, di rigettare cioè nell' aggettivo costituente il nome specifico di ciascun composto l' indicazione numerica delle proporzioni dei componenti, non ritenendo nel nome generico che i nomi dei componenti medesimi; ne risultava altronde una lunghezza e una complicazione di nomi che ne rendeva difficile la pronunziazione, e le stesse sostanze sostituite potendo ancora aggiungersi al radicale così modificato, si incontrava in questo sistema una fastidiosa ripetizione dei loro nomi nel nome del composto.

Ho ora considerato che la circostanza che si tratta di esprimere nel caso di queste sostituzioni è di un genere affatto diverso dall' oggetto della nomenclatura ordinaria, che è la semplice indicazione della natura e delle proporzioni dei componenti. Si vuole quì far intendere ad un tempo che dal radicale o tipo a cui si è dato un nome particolare, come ad una sostanza semplice, si dee sottrarre un certo numero di equivalenti di uno dei componenti, l' idrogeno, e sostituirvi un ugual numero di equivalenti di una o più altre sostanze, onde ritenere lo stesso numero totale di equivalenti, che uniti al gruppo di carbonio formavano il tipo primitivo. Quindi risulta come una *varietà* della specie costituita da questo tipo primitivo, la quale richiede naturalmente per la sua indicazione un aggettivo particolare aggiunto al nome generico e specifico

formato secondo i principj della nomenclatura generale. E in quest' aggettivo dovranno comprendersi i nomi delle sostanze surrogate e i numeri dei loro equivalenti, che son pur quelli dell' idrogeno di cui esse hanno preso il luogo, indicazioni di cui l'introduzione nel nome stesso generico del composto vi produceva quella incomoda complicazione di cui abbiamo parlato.

Così se la sostanza sostituita è per esempio il cloro, al nome del tipo o del composto di cui il tipo è uno de' componenti, si aggiungerà l'epiteto *uni-clorico*, *bi-clorico*, *tri-clorico* ecc., secondo che nel tipo o radicale fondamentale si troveranno sostituiti ad uno, due, tre ecc. equivalenti di idrogeno altrettanti equivalenti di cloro. Così pure se la sostanza surrogata è l'ossigeno (poichè questo elemento che qui consideriamo in generale come estraneo, nella composizione de' corpi organici di cui fa parte, ai radicali carbo-idrici da indicarsi con nomi particolari, può anch' esso entrare nei tipi primitivi per sostituzione all'idrogeno), i nomi da aggiungersi saranno quelli di *uni-ossico*, *bi-ossico*, *tri-ossico* ecc. La terminazione di questi nomi, misti di nomi di sostanze e di particelle numeriche, li distinguerà sufficientemente dai nomi specifici della nomenclatura ordinaria. Se più sostanze diverse concorrono nella sostituzione, per esempio il cloro e il bromo, si esprimeranno nello stesso aggettivo i nomi e i numeri degli equivalenti di queste sostanze, dicendo *uni-clo-bromico*, *bi-clo-tri-bromico*, *tri-clo-bi-bromico* ecc. Se nel composto fossero compresi due o più tipi o radicali diversi, come componenti, si dovrebbe esprimere nell' aggettivo di cui si tratta la somma dei numeri di equivalenti di ciascuna sostanza surrogata nei diversi tipi, nulla importando per la nomenclatura (e potendo esser talvolta difficile) il decidere a quali dei tipi ciascun equivalente sostituito debbasi riferire, e bastando che essa dichiari qual numero di equivalenti di idrogeno debbasi sottrarre, e qual numero di equivalenti di altre sostanze debbasi aggiungere alla composizione che risulterebbe dal nome generico e specifico del composto riferito ai tipi primitivi.

Nelle formole destinate a rappresentare la composizione de' corpi organici si introdurranno per simboli dei tipi, o radicali fondamentali, le iniziali dei loro nomi particolari, non altrimenti che per le sostanze elementari, distinguendoli però da queste con una linea al dissopra delle lettere; e si indicheranno le modificazioni arrecate dalle sostituzioni, mettendo al dissotto del simbolo del tipo, o della riunione di simboli costituenti la formola del composto, i simboli delle sostanze surrogate, cogli esponenti del loro numero.

Applicherò primieramente questi principj al radicale carbo-idrico ordinariamente indicato col nome di *etereno* od *eterino*, che ho pur considerato in primo luogo nella precedente Memoria. Questo radicale si riguarda come formato di 4 atomi od equivalenti di carbonio C^4 ($C = 0,75$ dell'atomo dell'ossigeno) e 4 equivalenti o doppj atomi d' idrogeno $\underline{H}^4$. Ho già mostrato nella citata Memoria la convenienza di dare a questo radicale un altro nome, riservando il nome dedotto dall' etere ad un altro radicale carbo-idrico che da molti si è riferito allo stesso tipo, ma che pare doverne essere distinto. La composizione di questo radicale $C^4\underline{H}^4$ essendo quella del gaz detto *oleifico*, che forma la parte più essenziale del gaz estratto dal carbon fossile, e che serve all' illuminazione, io ho proposto per esso il nome di *lampeno*, da abbreviarsi in composizione in quello di *lampo*. Alcuni gli hanno anche dato il nome di *elaino*, dedotto dal nome greco dell'olio, e che si riferisce, come quello stesso di gaz oleifico, alla proprietà che ha questo gaz di formare col cloro un composto di apparenza oleosa; ma questo nome, oltre che non esprime che una circostanza poco importante, non potrebbe entrare nella formazione dei nomi dei corpi composti, senza dar luogo a confusione con altre sostanze a cui furono dati nomi a quello più o meno rassomiglianti. Riterrò dunque il nome di *lampeno* o *lampo*, e indicherò nelle formole questo radicale o tipo fondamentale col simbolo $\overline{L}$.

Ora questo radicale $C^4 \underline{H}^4 = \overline{L}$ può perdere successivamente uno, due ecc. equivalenti del suo idrogeno, e prenderne altrettanti di cloro, e ciò per l'azione successiva, e in diverse circostanze del cloro sopra di esso. Laurent si è particolarmente occupato di queste sostituzioni e dei composti che ne derivano; composti che ha trovato realizzarsi tutti o separatamente, o in istato di combinazione con altri equivalenti di diversi corpi, al di fuori del tipo; ed ha loro applicato, come in generale ai composti formati per sostituzione dai diversi tipi de' corpi organici, una nomenclatura sistematica di cui ho accennati i principj nella mia prima Memoria. Secondo quella da noi proposta a tutti questi derivati presi isolatamente e indipendentemente dalle sostanze con cui possono formare altri composti, converrà il nome comune di *lampeno*, ma coll' aggiunta di un epiteto indicante il numero di equivalenti di cloro sostituiti in ciascuno di essi all' idrogeno; la formola ne consisterà nella lettera $\overline{L}$, a cui si sottoporrà il simbolo $\underline{Cl}$ del cloro coll' esponente relativo al numero stesso de' suoi equivalenti. Essi formeranno così la serie seguente, in cui ho apposto al nome di ciascuna specie o varietà la formola che la rappresenta, e il nome assegnatole da Laurent, partendo da quello di *etereno* da lui ammesso pel tipo primitivo.

Lampeno uni-clorico $C^4 \underline{H}^3 \underline{Cl} = \underset{\underline{Cl}}{\overline{L}}$: Cloreteraso o cloretaso di Laurent

——— bi-clorico o duo-clorico $C^4 \underline{H}^2 \underline{Cl}^2 = \underset{\underline{Cl}^2}{\overline{L}}$: Cloretereso o cloreteso di Laurent

——— tri-clorico $C^4 \underline{H} \underline{Cl}^3 = \underset{\underline{Cl}^3}{\overline{L}}$: Cloreteriso o cloretiso di Laurent

——— quadri-clorico $C^4 \underline{Cl}^4 = \underset{\underline{Cl}^4}{\overline{L}}$: Cloreteroso o cloretoso di Laurent.

È però dubbioso se quest' ultimo composto in cui tutto l'idrogeno sarebbe eliminato con surrogazione del cloro esista isolatamente ritenendo il tipo del lampeno, e così con proprietà diverse da quelle di un semplice clorocarbo $\underline{Cl}^4 C^4$ o $\underline{Cl} C$, a cui si riduce la sua formola uscendo dalla nomenclatura particolare de' corpi organici.

Il lampeno e i suoi derivati per sostituzione del cloro all'idrogeno possono poi ancora combinarsi, come già si è detto, con altri equivalenti di cloro, od anche d' idrogeno come qualunque altro corpo, e i nomi di questi composti si formeranno secondo le regole generali della nostra nomenclatura, aggiungendo sempre al nome del composto l'epiteto indicante la sostituzione che possa aver avuto luogo nel radicale che ne fa parte.

Così il lampeno fondamentale stesso $C^4\underline{H}^4$ ossia $\overline{L}$ unendosi a due equivalenti di cloro, senza perdere del suo idrogeno forma il composto $C^4\underline{H}^4 + \underline{Cl}^2$, che è quel liquido oleoso detto *liquor degli Olandesi* che risulta dalla prima azione del cloro sul gaz oleifico, e da cui si è dedotto il nome di questo o quello di elaino che da altri gli fu attribuito. I Chimici che hanno adoperato pel gaz oleifico il nome di etereno hanno chiamato questo nuovo composto *cloruro di etereno*; noi dovremo assegnargli la formola $\underline{Cl}^2\overline{L}$, e il nome di *clorolampo doppio*. Si è però da alcuni attribuita a questo corpo una composizione più complicata, considerandolo non come il risultato immediato dell' unione del gaz oleifico o etereno col cloro, ma come prodotto in primo luogo dalla sostituzione di un equivalente di cloro ad uno d'idrogeno nell'etereno, donde si formerebbe il composto derivato $C^4\underline{H}^3\underline{Cl}$, il quale poi si unirebbe coll'acido idroclorico $\underline{Cl}\,\underline{H}$; esso sarebbe così un idroclorato $C^4\underline{H}^3\underline{Cl} + \underline{Cl}\,\underline{H}$ di quel composto derivato. Come tale lo ha riguardato anche Laurent, e applicandovi il principio della sua nomenclatura lo ha chiamato *idroclorato di cloreteraso o di cloretaso*. Questa maniera di concepire il composto di cui si tratta si è fondata sù che per l'azione della potassa esso può scomporsi realmente in acido idroclorico, e nel composto $C^4\underline{H}^3\underline{Cl}$; ma la formazione di questi due corpi può essere determinata da una tale azione, cosicchè essi siano *prodotti* e non *edotti* dalla medesima, e nulla ci induce ad esprimere colla nomenclatura la supposta complicazione; e Laurent stesso pare avervi rinunziato più recentemente.

Così pure Laurent ci ha fatto conoscere diversi altri composti, che egli ha considerati dapprima come idroclorati dei varj derivati dell'etereno, ma che debbono riguardarsi più semplicemente come cloruri di altri di questi derivati, o secondo la nostra nomenclatura come *clorolampi* derivati, in cui oltre la sostituzione di alcuni equivalenti di cloro ad altrettanti di idrogeno nel lampeno che ne fa parte, si aggiungono altri equivalenti di cloro estranei a quel tipo. Eccone i nomi e le formole secondo il nostro sistema coll' indicazione di quelli adoperati da Laurent, e di quelli che egli avrebbe anche potuto dar loro, considerandoli come cloruri:

Clorolampo doppio uni-clorico $C^4 \underline{H^2} \underline{Cl^2} + \underline{Cl}\,\underline{H} = C^4 \underline{H^3} \underline{Cl} + \underline{Cl^2} = \underline{Cl^2}\, \underset{\underline{Cl}}{\bar{L}}$; Idroclorato di cloretereso, o bi-cloruro di cloreteraso. L.

——— ——— bi-clorico $C^4 \underline{H}\, Cl^3 + \underline{H}\,\underline{Cl} = C^4 \underline{H^2} \underline{Cl^2} + \underline{Cl^2} = \underline{Cl^2}\, \underset{\underline{Cl^2}}{\bar{L}}$; Idroclorato di cloreteriso, o bi-cloruro di cloretereso. L.

——— ——— tri-clorico $C^4 \underline{Cl^4} + \underline{H}\,\underline{Cl} = C^4 \underline{H}\, \underline{Cl^3} + \underline{Cl^2} = \underline{Cl^2}\, \underset{\underline{Cl^3}}{\bar{L}}$; Idroclorato di cloreteroso, o bi-cloruro di cloreteriso. L.

Il lampeno potrebbe anche essere modificato per sostituzione dal bromo e da altre sostanze, o in parte dal cloro, in parte dal bromo ecc., nè sarebbe più difficile di formare secondo i principj sovra indicati i nomi che converrebbero ai composti risultanti da queste sostituzioni ed alle loro ulteriori combinazioni con altre sostanze al di fuori del tipo così modificato.

Passiamo ora ad applicar questi principj ad un altro tipo o radicale composto, cioè a un gruppo formato pure di 4 atomi di carbonio, ma unito a 5 equivalenti d'idrogeno, a cui possono essere sostituiti uno o più equivalenti di cloro o di altre sostanze senza alterazione del tipo, il radicale primitivo o così modificato potendo poi altronde entrare in composizione con altri corpi ad esso estranei. Questo radicale non pare essersi finquì osservato in istato libero, ma si presenta allo stato d'ossido nell' etere ordinario $C^4 \underline{H^5} + O$ secondo la maniera che mi sembra la più naturale, e che è pur la più general-

mente ricevuta, di considerare questo composto. Molti chimici però riguardano l' etere come un idrato di $C^4\underline{H}^4$, e lo rappresentano colla formola $C^4\underline{H}^4 + O\underline{H}$, nel qual caso esso si ridurrebbe al tipo precedente, a cui perciò essi diedero il nome di etereno, come sopra si è detto. Ma già nella prima Memoria io ho creduto dover distinguere questi due tipi l'uno dall'altro, e mentre io avea proposto pel tipo $C^4\underline{H}^4$ il nome di lampeno, io avea ristretto al tipo $C^4\underline{H}^5$ il nome di *etilo*, già per esso più specialmente adoperato dai Chimici che lo hanno ammesso. Io lo chiamerò quì *eteno* (*ethenum*) con terminazione più generalmente usitata pei radicali organici, nome da abbreviarsi poi in *eto* in composizione; e lo indicherò nelle formole col simbolo $\overline{E}$. Quando in esso saranno sostituiti ad uno o più equivalenti di idrogeno altrettanti equivalenti di cloro, bromo ecc. si aggiungeranno al suo nome, o a quello dei composti che esso potrà formare ulteriormente, i nomi di *uni-clorico*, *bi-clorico* ecc. *uni-bromico* ecc., come pel tipo precedente, e al dissotto delle formole di questi composti si porrà il simbolo della sostanza sostituita, o di ciascuna delle sostanze che possono concorrere a tal sostituzione, coi corrispondenti esponenti. Così l' etere ordinario, in cui questo radicale è unito ad un atomo d'ossigeno prenderà il nome di *osseteno semplice*, e la formola ne sarà $O\overline{E}$. Questo corpo combinandosi cogli elementi dell' acqua $O\underline{H}$ forma l'alcool, di cui perciò la formola sarà $O\overline{E} + O\underline{H} = O^2\overline{E}\underline{H}$, e il nome sistematico *ossetidro doppio* (*oxethydrum duplum*). L' etere od osseteno semplice può inoltre combinarsi, come gli altri ossidi, coi diversi acidi, in maniera da formare composti analoghi agli ossi-sali, e che si sogliono chiamare *eteri composti*; i loro nomi si comporranno secondo le regole generali della nomenclatura de' corpi inorganici. Così il corpo conosciuto sotto il nome di *etere nitroso* di cui la formola è $O\overline{E} + \underline{Az}\,O^3 = O^4\underline{Az}\,\overline{E}$ prenderà il nome di *ossazeto quadruplo* (*oxazethum quadruplum*). A questa classe apparterrebbe pure il composto detto *olio di vino pesante*, se, come crede Dumas, esso non fosse

formato nel suo stato di purezza, che di un equivalente di etere ordinario e uno d'acido solforico; in tal caso gli sarebbe convenuto nella nomenclatura ricevuta il nome di *etere solforico* che volgarmente si dà all'etere semplice; e la sua formola essendo $O\bar{E} + SO^3 = O^4 S\bar{E}$, esso sarebbe nella nostra nomenclatura l' *ossulfeto quadruplo* (*oxysulphethum* od *osulphethum quadruplum*).

Questi eteri composti formati di un equivalente d' etere semplice e uno d' acido sono in generale neutri ai reattivi; ma l' etere semplice può anche combinarsi con più di un equivalente d'acido, e allora il composto ritiene le proprietà acide. Tale è per esempio l' acido detto *sulfovinico* od anche *etionico* (di cui si sono distinti due stati isomerici), in cui un equivalente d'etere ordinario sta unito a due equivalenti d'acido solforico, e di cui perciò la formola è $O\bar{E} + O^6 S^2 = O^7 S^2 \bar{E}$; esso sarà, secondo la nostra nomenclatura, l' *ossulfeto settidoppio* (*oxysulphethum* od *osulphethum septi-duplum*). Quest' acido può poi unirsi o all'acqua o alle diverse basi: coll'acqua esso forma il composto $O^7 S^2 \bar{E} + O\underline{H} = O^8 S^2 \bar{E}\underline{H}$, che si dovrà chiamare *ossulfetidro otto-doppio* (*oxysulphethydrum* o *osulphethydrum octo-duplum*); e quanto alle combinazioni colle basi, quella per esempio colla potassa $O^7 S^2 \bar{E} + OPo = O^8 S^2 \bar{E} Po$ prenderà il nome di *ossulfetopoto otto-doppio* (*osulphethopotum octo-duplum*).

Per altra parte l' etilo o radicale dell' etere, ossia il nostro eteno $\bar{E}$, può anche unirsi con un equivalente di cloro in vece dell' ossigeno, e forma allora il così detto cloruro di etilo od etere idroclorico $\underline{Cl}\,C^4 \underline{H}^5 = \underline{Cl}\,\bar{E}$ (che alcuni considerano come un idroclorato d' etereno $C^4 \underline{H}^4 + \underline{Cl}\,\underline{H}$) il quale sarà per noi il *cloreteno semplice* (*chlorethenum simplex*).

Nell' etere ordinario ossia osseteno semplice ad alcuno dei cinque equivalenti d' idrogeno, od anche a tutti, possono surrogarsi altrettanti equivalenti di cloro. Il composto di questo genere il più anticamente conosciuto è quello in cui tale sostituzione cade su due equivalenti soltanto d' idrogeno, onde

risulta il così detto etere clorato o clorurato $O\underline{Cl}^2C^4\underline{H}^3$, a cui noi dovremo assegnare la formola $O\underset{\underline{Cl}^2}{\overline{E}}$, e il nome di *osseteno semplice bi-clorico*. Ma più recentemente si ottenne anche l'intiera eliminazione dell'idrogeno per mezzo del cloro, donde si ha il composto detto *etere perclorato*; la formola ne sarà $O\underset{\underline{Cl}^5}{\overline{E}}$, ed il nome *osseteno semplice cinque-clorico*. Si noterà del resto che questo composto non contenendo più idrogeno potrebbe riguardarsi come ricaduto nella nomenclatura ordinaria dei corpi inorganici, colla formola $O\underline{Cl}^5C^4$, nel qual caso esso dovrebbe chiamarsi *oclocarbo uni-cinque-quadruplo*. Questi eteri clorati possono poi anche unirsi ai diversi acidi per formare eteri composti, corrispondenti a quelli dell'etere ordinario, e che prenderanno i nomi stessi di questi coll'aggiunta degli epiteti *bi-clorico* e *cinque-clorico*, mentre alle loro formole si sottoporranno i simboli $\underline{Cl}^2$ e $\underline{Cl}^5$ indicanti le sostituzioni.

Queste sostituzioni possono aver luogo nel cloruro d'etilo, ossia cloreteno, non altrimenti che nell'osseteno, cioè nell'etere ordinario od ossido d'etilo; così si avrà per esempio il composto $C^4\underline{H}^3\underline{Cl}^2 + \underline{Cl} = C^4\underline{H}^3\underline{Cl}^3$ di cui noi dovremo scrivere la formola $Cl\underset{\underline{Cl}^2}{\overline{E}}$, e che prenderà il nome di *cloreteno semplice bi-clorico*.

Zeise ha fatto conoscere sotto il nome di *mercaptan* un composto intieramente analogo all' alcool, ma in cui lo zolfo fa la stessa funzione che in questo fa l' ossigeno. Così mentre l' alcool si è considerato come composto d' etere e d' acqua $C^4\underline{H}^5O + O\underline{H}$, il mercaptan può riguardarsi come formato dall'unione d'un corpo analogo all' etere $C^4\underline{H}^5S$ coll' idrogeno solforato $S\underline{H}$. Riferendo questi composti alla serie dell' eteno il corpo $C^4\underline{H}^5S$ sarà indicato con $S\overline{E}$, e prenderà il nome di *solfeteno semplice*; e il mercaptan sarà $S\overline{E} + S\underline{H} = S^2\overline{E}\underline{H}$ e si chiamerà *solfetidro doppio* (*sulphethydrum duplum*). Ma in vece che l' etere ordinario può unirsi coi diversi acidi per

formare eteri composti, il suo analogo $S\overline{E}$ fa generalmente funzione d'acido, e si unisce con diversi solfuri, che prendono il luogo dell'idrogeno solforato $S\underline{H}$ del mercaptan, o che viene allo stesso; i diversi metalli possono surrogarsi all'idrogeno di questo, restando combinati col composto ipotetico $S^2\overline{E}$, che Zeise chiama *mercaptum*. Si potranno formare facilmente i nomi di questi diversi composti secondo i nostri principj. Si conoscono del resto anche eteri composti in cui all'ossigeno dell'acido, o dell'etere, o di amendue è sostituito lo zolfo, e di cui si formeranno i nomi in una maniera analoga.

Ho pur considerato nella mia prima Memoria come un radicale speciale, meritevole d'un nome a lui proprio, quello $C^4\underline{H}^3$ dell'acido acetico, che allo stato anidro è rappresentato dalla formola $C^4\underline{H}^3O^3$, e lo ho chiamato *aceno*. Anche in questo gruppo i tre equivalenti d'idrogeno sono suscettibili di essere eliminati per sostituzione da un ugual numero di equivalenti di altre sostanze. Ma questo composto $C^4\underline{H}^3$ è quello stesso a cui si riduce l'etereno o lampeno $C^4\underline{H}^4$ quando ad uno degli equivalenti d'idrogeno si fa sostituzione d'un altra sostanza, e potrebbe ammettersi che nell'acido acetico stesso questa sostituzione avesse avuto luogo per mezzo dell'ossigeno, cosicchè l'acido acetico dovesse considerarsi come $C^4\underline{H}^3O + O^2$, e ritenere così il tipo dei composti derivati dall'etereno; e tale è l'aspetto sotto cui l'acido acetico fu infatti riguardato da molti Chimici. Tuttavia siccome l'acido acetico dà luogo per sè solo ad una serie assai estesa di composti in cui si conserva il suo tipo, riterrò ancora questo gruppo particolare $C^4\underline{H}^3$ sotto il nome di *aceno*, e lo indicherò col simbolo $\overline{A}$.

L'acido acetico anidro $C^4\underline{H}^3O^3$ prenderà così la formola $O^3\overline{A}$, e il nome di *ossaceno triplo* (*oxacenum triplum*). L'acido acetico idrato $C^4\underline{H}^3O^3 + O\underline{H} = O^3\overline{A} + O\underline{H} = O^4\overline{A}\underline{H}$ sarà l'*ossacenidro quadruplo* (*oxacenhydrum quadruplum*). L'acetato di potassa $C^4\underline{H}^3O^3 + O\,Po = O^3\overline{A} + O\,Po = O^4\overline{A}Po$ sarà l'*ossacepoto quadruplo* (*oxacepotum quadruplum*), e nella stessa

maniera si formeranno i nomi degli altri acetati, abbreviando semplicemente in *ace* il nome di *aceno*. Una delle basi di queste combinazioni può anche essere l'etere ordinario, ossia il nostro osseteno semplice $O\bar{E}$, d'onde risulta l'etere acetico, ossia acetato d'ossido d'etilo $C^4\underline{H}^3O^3 + C^4\underline{H}^5O = O^3\bar{A} + O\bar{E} = O^4\bar{A}\bar{E}$; questo composto prenderà il nome di *ossaceneto quadruplo* (*oxacenethum quadruplum*).

Ma nell' acido acetico anidro ai tre equivalenti di idrogeno dell' aceno possono sostituirsi tre equivalenti di cloro; si ha così il composto detto *acido cloracetico*, di cui la formola è $C^4\underline{Cl}^3O^3$; questa diverrà secondo la nostra notazione $O^3\underset{\underline{Cl^3}}{\bar{A}}$; e il nome ne sarà *ossaceno triplo tri-clorico*. Allo stato di idratazione quest' acido viene ad avere per sua formola $C^4\underline{Cl}^3O^3 + O\underline{H} = O^3\underset{\underline{Cl^3}}{\bar{A}} + O\underline{H} = O^4\underset{\underline{Cl^3}}{\bar{A}}\,\underline{H}$, e dee quindi prendere il nome di *ossacenidro quadruplo tri-clorico*. Il cloracetato di potassa sarà $O^3\underset{\underline{Cl^3}}{\bar{A}} + O\,Po = O^4\underset{\underline{Cl^3}}{\bar{A}}\,Po$, e si chiamerà *ossacepoto quadruplo tri-clorico*, e così si formeranno anche i nomi degli altri cloracetati. Tra i cloracetati può anche annoverarsi l'etere cloracetico, ossia cloracetato d'ossido d'etilo $O^3\underset{\underline{Cl^3}}{\bar{A}} + O\bar{E} = O^4\underset{\underline{Cl^3}}{\bar{A}}\,\bar{E}$, a cui converrà il nome di *ossaceneto quadruplo tri-clorico*. Questa formola e il nome corrispondente dovranno poi modificarsi quando l'etere che si unisce all'acido acetico sia esso medesimo clorurato, cioè quando a due degli equivalenti d'idrogeno dell'eteno in esso contenuto, od anche a tutti cinque, siano sostituiti altrettanti equivalenti di cloro; nel primo caso per esempio il numero degli equivalenti di cloro sostituiti nel composto essendo cinque in tutto, cioè tre nell'aceno dell'acido, e due nell'eteno dell'etere, la formola sarà $O^4\underset{\underline{Cl^5}}{\bar{A}\,\bar{E}}$, e il nome *ossaceneto quadruplo cinque-clorico*.

L'acido acetico si forma, come è noto, dall'ossigenazione dell'alcool pel contatto dell'aria; ma con altri mezzi d'ossigenazione Liebig ha ottenuto dall'alcool un altro corpo, di cui la composizione può essere rappresentata dalla formola $C^4 H^3 O + \underline{H} O$; questa formola non differisce, come si vede, da quella dell'alcool $C^4 \underline{H}^5 O + \underline{H} O$, che per la perdita di due equivalenti d'idrogeno fatta dall'etere che vi è contenuto; quindi Liebig ha dato a questo composto il nome di *aldeide* (*aldehyde*), abbreviazione di *alcool disidrogenato*. L'aldeide poi per mezzo d'una nuova ossidazione al contatto dell'ossido d'argento si cangia ancora in un acido, che allo stato anidro si trova aver per composizione $C^4 \underline{H}^3 O^2$, e che fu da Liebig chiamato *acido aldeidico*. Quest'acido presenterebbe così un secondo grado d'ossigenazione d'un radicale $C^4 \underline{H}^3$ di cui l'ossido $C^4 \underline{H}^3 O$ si trova allo stato d'idratazione nell'aldeide. Regnault ha dato a questo radicale il nome di *aldeideno*. Ora la composizione di questo radicale $C^4 \underline{H}^3$ è appunto quella del radicale dell'acido acetico, che abbiamo chiamato *aceno*, e che abbiamo considerato come un tipo primitivo, nè abbiamo alcuna ragione di credere che questo radicale sia altrimenti costituito nell'aldeide, e nell'acido aldeico che nell'acido acetico $C^4 \underline{H}^3 O^3$; in quest'ultimo esso presenterebbe solo un grado di ossigenazione più elevato che nell'acido aldeico, cioè con tre atomi d'ossigeno in vece di due soltanto; il corpo contenuto allo stato di idratazione nell'aldeide sarà dunque per noi l'*ossaceno semplice*, l'acido aldeidico l'*ossaceno doppio*, e l'acido acetico, come sopra, l'*ossaceno triplo*, e sarà facile dedurne i nomi delle ulteriori combinazioni dei due primi con altri corpi, non altrimenti che ciò si è fatto per l'acido acetico. L'aldeide in particolare avrà per formola $O \overline{A} + O \underline{H} = O^2 \overline{A} \underline{H}$, e prenderà il nome di *ossaceuidro doppio*. Regnault ha chiamato *cloruro d'aldeideno* il composto che Laurent ha indicato col nome di *cloreteraso*, prodotto dall'azione del cloro sul gaz oleifico, col che si verrebbe a supporre che $C^4 \underline{H}^3$ abbia nell'aldeide e nell'acido

aldeidico la stessa costituzione che in questo composto che abbiamo riguardato con Laurent come derivato dall' etereno o lampeno $C^4\underline{H}^4$, per sostituzione d' un equivalente di cloro ad un equivalente d'idrogeno; se ciò fosse anche nell'aldeide si dovrebbe riguardare $C^4\underline{H}^3O$ come un simile derivato con sostituzione di un equivalente d' ossigeno ad uno d' idrogeno. Ma i motivi che ci hanno indotti a considerare, quanto alla nomenclatura, il radicale acetico $C^4\underline{H}^3$ come un tipo primitivo pajono applicabili anche ai corpi di cui quì abbiamo parlato.

Si ottiene poi dall' aldeide, per l' azione del cloro sopra di esso, un composto che non ne differisce che per la sostituzione di $\underline{Cl}^3$ ad $\underline{H}^3$, e di cui la composizione si trova per conseguenza $C^4\underline{Cl}^3O + O\underline{H}$; esso fu chiamato *cloral*. Se si vuole riferire al tipo dell'aceno, come derivato, la sua formola dovrà scriversi $O\underset{\underline{Cl}^3}{\overline{A}} + O\underline{H} = O^2\underset{\underline{Cl}^3}{\overline{A}}\,\underline{H}$, e il suo nome sarà *ossacenidro doppio tri-clorico*.

Si può anche ottenere dall' alcool, con un' azione ossigenante, un altro composto detto *acetal*, di cui la formola elementare secondo Liebig sarebbe $C^8\underline{H}^9O^3$. Si potrebbe concepire la composizione rappresentata da questa formola in diverse maniere. Liebig ha fatto osservare che essa potrebbe considerarsi come formata di quelle dell'etere ordinario e dell'aldeide $C^4\underline{H}^5O + C^4\underline{H}^3O + O\underline{H}$: se si ammettesse quest' idea, la formola dovrebbe scriversi $O\overline{E} + O\overline{A} + O\underline{H} = O^3\overline{A}\,\overline{E}\,\underline{H}$, e l' acetal dovrebbe chiamarsi *ossacenetidro triplo*. Secondo un' analisi più recente di Stas la composizione dell' acetal puro sarebbe però alquanto diversa, cioè $C^{12}\underline{H}^{14}O^4$ e potrebbe rappresentarsi come risultante dall'unione di un equivalente d'aldeide con due equivalenti d' etere in vece d' un solo.

Del resto si scorge da quello che finquì abbiamo detto sulle tre serie del lampeno, dell' eteno e dell' aceno esservi alcun chè d' arbitrario nella scelta di quella di esse a cui debbano riferirsi alcuni dei composti di cui abbiamo parlato. Nulla impedirebbe di ridurre queste tre serie, come da altri

si è fatto, in una sola di cui il tipo comune portasse il nome di etereno od eteno, purchè si cangiassero convenientemente le formole e i nomi dei composti; ma mi è sembrato che l'ammissione dei tre tipi separati potesse contribuire a diminuire la confusione nelle denominazioni di un così gran numero di composti diversi non aventi per nocciuolo comune che il gruppo di carbonio C^4.

Vi sono tre altri radicali carbo-idrici in cui un gruppo di due atomi di carbonio C^2 si unisce a uno, due o tre equivalenti d'idrogeno per formare i composti $C^2\underline{H}$, $C^2\underline{H}^2$, $C^2\underline{H}^3$, che possono prendersi per tre tipi diversi, e dar luogo, colla sostituzione di cloro od altre sostanze, ad uno o più dei loro equivalenti di idrogeno, a tre serie di corpi analoghe a quelle $C^4\underline{H}^3$, $C^4\underline{H}^4$ e $C^4\underline{H}^5$ di cui ci siamo or ora occupati. Questi tre tipi sono stati da molti ridotti ad un solo tipo $C^2\underline{H}^2$ da cui gli altri fossero derivati per sostituzione, o per addizione d'idrogeno e d'altri elementi, e che fu chiamato *metileno* nella stessa maniera che i tre tipi precedenti sono stati riferiti al solo tipo dell'etereno $C^4\underline{H}^4$. Io non avea dato nella prima Memoria alcun nome particolare al radicale $C^2\underline{H}^2$ come quello di cui non si conosce una serie molto estesa di composti; ma avea chiamato *metilo* o *meteno*, ed in composizione *meto* il composto $C^2\underline{H}^3$, e *formeno*, o *formio* e *formo* il composto $C^2\underline{H}$. Il primo di questi composti, allo stato d'ossido $C^2\underline{H}^3O$ forma il così detto *etere metilico*, che fu anche chiamato *ossido di metilo*; e quest'ossido unito agli elementi dell'acqua $O\underline{H}$ costituisce l'alcool metilico, ossia il composto detto *spirito di legno*, il quale è così all'etere metilico ciò che l'alcool propriamente detto è all'etere ordinario. Si è però da altri considerato l'etere metilico come $C^2\underline{H}^2 + O\underline{H}$, e lo spirito di legno come $C^2\underline{H}^2 + 2O\underline{H}$, ed è ciò che ha dato luogo ad ammettere come tipo in questi composti il radicale ipotetico $C^2\underline{H}^2$ a cui si è dato il nome di *metileno*, e di cui l'etere metilico sarebbe un idrato, e l'alcool metilico un bi-idrato. Quanto al composto $C^2\underline{H}$ io l'ho considerato

come il radicale dell' acido formico, di cui la formola, allo stato anidro è $C^2\underline{H}O^3$, e l' ho perciò chiamato *formeno*: questo radicale ha, come si vede, la stessa relazione al composto $C^2\underline{H}^2$, che l' aceno $C^4\underline{H}^3$ ha al lampeno od etereno $C^4\underline{H}^4$, cioè ne differisce per un equivalente d' idrogeno di meno. Si potrebbe però anche considerare l' acido formico come $C^2\underline{H}O + O^2$, e riferire il composto C^2H^2O al tipo $C^2\underline{H}^2$ in cui ad un equivalente d'idrogeno sia sostituito un equivalente d' ossigeno, appunto come l' acido acetico poteva riguardarsi quale $C^4\underline{H}^3O + O^2$, e riferirsi così l' aceno al tipo del lampeno. Credo però più conveniente per ragioni analoghe a quelle indicate per l' eteno e l' aceno, di ritenere i due tipi separati del *meteno* e del *formeno*; rappresenterò il primo col simbolo $\overline{M}$, e il secondo con $\overline{F}$, e dai loro nomi si dedurranno quelli dei composti da loro derivati o per sostituzione, o per ulterior combinazione con altri corpi nella maniera indicata per gli altri tipi che abbiamo precedentemente considerati. Così l' etere metilico avrà la formola $O\overline{M}$, e prenderà il nome di *ossimeteno semplice* (*oxymethenum simplex*) e lo spirito di legno o alcool metilico $O\overline{M} + O\underline{H} = O^2\overline{M}\underline{H}$ si chiamerà *ossimetidro doppio* (*oxymethydrum duplum*). I nomi degli eteri metilici composti, cioè delle combinazioni dell' etere metilico ossia ossimeteno semplice coi diversi acidi si formeranno in un modo affatto analogo a quello indicato per gli eteri composti etilici.

Quanto all' acido formico la sua formola allo stato anidro sarà $O^3\overline{F}$, e il nome *ossiformeno* od *ossiformio triplo* (*oxyformium triplum*); allo stato idrato $O^3\overline{F} + O\underline{H} = O^4\overline{F}\underline{H}$ ne sarà la formola, e *ossiformidro quadruplo* (*oxyformhydrum quadruplum*) il nome. I nomi dei formiati si otterranno in una maniera simile a quella degli acetati. Analoga poi alla composizione dell' acido formico è quella del *cloroformio triplo*, già conosciuto sotto il nome di *cloroformio*, $\underline{Cl}^3C^2\underline{H} = \underline{Cl}^3\overline{F}$.

In tutti questi composti ad uno o più equivalenti d'idrogeno potranno sostituirsi equivalenti di cloro o d'altre sostanze, e ciò si esprimerà nelle formole mettendovi sotto i simboli

di questi coi loro esponenti, e nei nomi aggiungendovi gli epiteti relativi a tali sostituzioni, come *uniclorico*, *biclorico* ecc., *unibromico*, *uniclo-bibromico* ecc.

Al tipo $C^2\underline{H}^2$ sono stati riferiti da alcuni l'acido ossalico e l' ossido di carbonio per sostituzione dell'ossigeno all' idrogeno, con aggiunta, quanto al primo, di un atomo d'ossigeno di più; ma non veggo necessità di sottrarre questi composti, considerati isolatamente, dal dominio della nomenclatura generale.

In generale i gruppi formati di un numero determinato d'atomi di carbonio possono dar luogo ciascuno a tre radicali o tipi carbo-idrici diversi e quindi a tre serie di composti organici, che potrebbero anche ridursi ad una sola. Uno di questi tipi è quello in cui il gruppo di carbonio è unito ad un numero di equivalenti di idrogeno uguale a quello degli atomi di carbonio, un altro in cui questo numero di equivalenti di idrogeno è superiore d' un' unità, e un terzo in cui esso è inferiore d'un'unità a quel numero degli atomi di carbonio. Così per esempio il gruppo C^{10} di carbonio potrebbe formare tre tipi primitivi, $C^{10}\underline{H}^{10}$, $C^{10}\underline{H}^{11}$, $C^{10}\underline{H}^{9}$, che sarebbero per questo gruppo analoghi al lampeno, all' eteno e all'aceno del gruppo C^4. Così può riferirsi al gruppo $C^{10}\underline{H}^{11}$ il composto $C^{10}\underline{H}^{11}O + O\underline{H}$, che da altri fu anche riferito al tipo $C^{10}\underline{H}^{10}$ scrivendone la formola $C^{10}\underline{H}^{10} + O^2\underline{H}^2$; esso è un liquido ottenuto dalla distillazione del prodotto della fermentazione dei pomi di terra, unitamente all'alcool ordinario, e che fu perciò detto *olio di pomi di terra*. La composizione ne è, come si vede, analoga a quella dell' alcool, potendosi esso considerare come un idrato del composto $C^{10}\underline{H}^{11}O$, e questo come un ossido del radicale $C^{10}\underline{H}^{11}$, epperciò come un etere relativamente a questo radicale, non altrimenti che l'etere ordinario è un ossido del radicale $C^4\underline{H}^5$. Questo composto fu quindi chiamato *alcool amilico*, e il composto $C^{10}H^{11}O$ *etere amilico*, mentre *amilo* fu detto il radicale stesso $C^{10}\underline{H}^{11}$, o *amileno* il radicale $C^{10}\underline{H}^{10}$, quando ad esso si è riferito il composto $C^{10}H^{11}O$ riguardandolo come $C^{10}\underline{H}^{10} + O\underline{H}$, cioè come un

idrato di $C^{10}\underline{H}^{10}$. Questo nome di amilo o d' amileno fu dedotto da quello dell' amido o fecola (*amylum*) da cui questi composti traggono origine; esso non è forse il più conveniente per questo radicale, potendo facilmente confondersi in composizione col nome di altri corpi affatto diversi, molto a quello rassomigliante. Ma stabilito il nome che si voglia attribuire al corpo $C^{10}\underline{H}^{11}$, se ne potranno facilmente dedurre i nomi de' suoi derivati e delle sue combinazioni in una maniera affatto analoga a quella indicata per la serie dell' eteno.

Ma oltre i composti idrocarbonici assoggettati alla condizione indicata i gruppi di carbonio formati d'un numero determinato di atomi possono anche unirsi a un numero di equivalenti di idrogeno pur determinato, ma affatto diverso da quello degli atomi di carbonio, e costituire così diversi tipi o radicali primitivi suscettibili anch' essi di modificazione per sostituzione di uno o più equivalenti di altre sostanze a quelli dell' idrogeno, e di combinazioni con altri corpi. Alcuni di questi radicali possono trovarsi o negli oli naturali contenuti nelle sostanze organiche, sia semplicemente idrocarbonici, sia ossigenati, o in quelli che da esse si traggono per decomposizione prodotta col calore o con altri mezzi; altri possono concepirsi come esistenti nei diversi acidi vegetali, cioè uniti ad una quantità sufficiente d' ossigeno per dar loro le proprietà acide che a questi appartengono. Converrebbe fare un trattato compiuto di chimica organica per istabilire questi diversi tipi, e dedurne tutte le diverse serie di composti che debbonsi riferire a ciascuno di essi, entrando in quelle discussioni a cui potrebbe dar luogo la scelta dei diversi radicali che debbonsi considerare come primitivi o come derivati. Mi limiterò quì ad indicarne alcuni come esempi d' applicazione dei principj della nostra nomenclatura.

Tra i radicali contenuti nelle sostanze oleose ci servirà d' esempio la naftalina, di cui già si è parlato nella prima Memoria, notabile pel gran numero di sostituzioni di cloro e di altre sostanze di cui essa è suscettibile, e che Laurent

principalmente ci ha fatto conoscere. Questa sostanza è una di quelle che si traggono dalla scomposizione del carbon fossile col fuoco; il nome di naftalina non è forse esente da ogni obbjezione, potendosi esso, e la sua abbreviazione in nafto (*naphthum*) già proposta da Laurent, dar luogo a confusione con altre sostanze oleose più anticamente indicate con simile nome. Riterrò però questo nome, dandogli solo, quando è isolato la terminazione in *eno* più usitata pei radicali idrocarbonici, *nafteno*. Sarà facile di trasportare quello che diremo dei nomi de' suoi composti e de' suoi derivati a qualunque altro nome si volesse attribuirgli. La formola adottata da Laurent per la naftalina o nafteno è $C^{20}\underline{H}^{8}$ quando si prende per C, come quì abbiamo fatto per tutto, il peso atomico 0, 75 di quello dell'ossigeno; ma se si ammettesse questa formola, poichè Laurent ha trovato che essa sarebbe suscettibile di perdere anche mezzi equivalenti d' idrogeno, con sostituzione di mezzi equivalenti di altre sostanze, come ho già accennato nel P. S. della mia prima Memoria, si dovrebbero introdurre nelle formole de' suoi derivati, e negli epiteti indicanti tali sostituzioni aggiunti ai loro nomi, numeri funzionarj, contro al principio generale che ci siamo proposti di seguire nella nostra nomenclatura, di ridurre sempre la composizione atomica ai più piccoli numeri intieri per cui essa si possa esprimere. Si eviterà questo inconveniente raddoppiando la formola del nafteno, e prendendo così per suo equivalente $C^{40}\underline{H}^{16}$; quindi i mezzi equivalenti delle sostanze da sostituirsi divengono equivalenti intieri, e in generale i numeri rappresentanti gli equivalenti sostituiti dovranno tutti raddoppiarsi. Ciò posto io riferirò quì la serie di tutti i composti che si possono derivare da questa formola colle sostituzioni di un numero successivamente crescente di equivalenti di cloro ad altrettanti di idrogeno, quali Laurent gli ha osservati o supposti, o in istato libero, o in istato di combinazione con altre sostanze estranee al tipo. Ai nomi formati secondo il nostro principio generale relativo alle sostituzioni, aggiungerò le formole dei composti e i nomi

ultimamente per essi proposti da Laurent; nelle formole indicherò con $\overline{N}$ il composto $C^{40}\underline{H}^{16}$.

Nafteno (*naphtenum*) $C^{40}\underline{H}^{16}$. Naftalina, *naphtum*. L. Ve n' ha un composto isomero a cui fu dato il nome di *paranaftalina*.

Nafteno uni-clorico	$C^{40}\underline{H}^{15}\underline{Cl} = \genfrac{}{}{0pt}{}{\overline{N}}{\underline{Cl}}$	*Chlonaphtane* L.	
—— bi-clorico	$C^{40}\underline{H}^{14}\underline{Cl}^{2} = \genfrac{}{}{0pt}{}{\overline{N}}{\underline{Cl}^{2}}$	*Chlonaphtase* L.	
—— tri-clorico	$C^{40}\underline{H}^{13}\underline{Cl}^{3} = \genfrac{}{}{0pt}{}{\overline{N}}{\underline{Cl}^{3}}$	*Chlonophtène* L.	Questo composto non pare essersi osservato da Laurent.
—— quadri-clorico	$C^{40}\underline{H}^{12}\underline{Cl}^{4} = \genfrac{}{}{0pt}{}{\overline{N}}{\underline{Cl}^{4}}$	*Chlonaphtèse* L.	Laurent ha osservato diversi isomeri di questo composto.
—— cinque-clorico	$C^{40}\underline{H}^{11}\underline{Cl}^{5} = \genfrac{}{}{0pt}{}{\overline{N}}{\underline{Cl}^{5}}$	*Chlonaphtine* L.	
—— sei-clorico	$C^{40}\underline{H}^{10}\underline{Cl}^{6} = \genfrac{}{}{0pt}{}{\overline{N}}{\underline{Cl}^{6}}$	*Chlonaphtise* L.	Anche di questo composto Laurent ha osservato più isomeri.
—— setti-clorico	$C^{40}\underline{H}^{9}\underline{Cl}^{7} = \genfrac{}{}{0pt}{}{\overline{N}}{\underline{Cl}^{7}}$	*Chlonaphtone* L.	
—— otto-clorico	$C^{40}\underline{H}^{8}\underline{Cl}^{8} = \genfrac{}{}{0pt}{}{\overline{N}}{\underline{Cl}^{8}}$	*Chlonaphtose* L.	Laurent lo ha osservato in tre stati isomeri.
—— nove-clorico	$C^{40}\underline{H}^{7}\underline{Cl}^{9} = \genfrac{}{}{0pt}{}{\overline{N}}{\underline{Cl}^{9}}$	*Chlonaphtalane* L.	Questo composto non pare essersi osservato da Laurent.
—— deci-clorico	$C^{40}\underline{H}^{6}\underline{Cl}^{10} = \genfrac{}{}{0pt}{}{\overline{N}}{\underline{Cl}^{10}}$	*Chlonaphtalase* L.	
—— undici-clorico	$C^{40}\underline{H}^{5}\underline{Cl}^{11} = \genfrac{}{}{0pt}{}{\overline{N}}{\underline{Cl}^{11}}$	*Chlonaphtalène* L.	
—— dodeci-clorico	$C^{40}\underline{H}^{4}\underline{Cl}^{12} = \genfrac{}{}{0pt}{}{\overline{N}}{\underline{Cl}^{12}}$	*Chlonaphtalèse* L.	

Laurent non ha trovato derivati dal nafteno in cui le sostituzioni andassero più oltre; ho indicato nel P. S. succitato il principio della sua nomenclatura per questi diversi derivati; ma si vede con qual facilità la rassomiglianza de' nomi li potrebbe far iscambiare l' uno coll' altro.

In vece del cloro possono anche sostituirsi agli equivalenti d' idrogeno nel nafteno equivalenti di altri corpi, per esempio del bromo; i nomi dei composti che ne risultano si formeranno nella stessa maniera. Così Laurent ha ottenuto il nafteno bi-bromico $C^{40}\underline{H}^{14}\underline{Br}^{2} = \genfrac{}{}{0pt}{}{\overline{N}}{\underline{Br}^{2}}$ da lui detto *Bronaphtase*;

il nafteno quadri-bromico $C^{40}\underline{H}^{12}\underline{Br}^{4} = \underset{\underline{Br}^{4}}{\overline{N}}$ che è il suo *Bro-naphtèse* ecc. Inoltre gli equivalenti sostituiti a quelli di idrogeno eliminati possono anche essere di due sostanze diverse, per esempio di cloro e di bromo. Laurent ha indicato i risultati di queste sostituzioni, preponendo al nome del nafteno colle diverse terminazioni sopra indicate i nomi abbreviati delle due sostanze, terminati da vocali diverse per esprimere il numero di ciascuna di esse; noi non avremo che a introdurre nell' epiteto aggiunto al radicale primitivo i nomi delle due sostanze sostituite, e le particelle numeriche ad esse relative. Così il composto $C^{40}\underline{H}^{11}\underline{Cl}^{4}\underline{Br} = \underset{\underline{Cl}^{4}\underline{Br}}{\overline{N}}$ che Laurent ha indicato col nome di *chlorébronaphtine* sarà per noi il *nafteno quadri-clor-uni-bromico* o semplicemente *quadri-clo-bromico*; il composto $C^{40}\underline{H}^{10}\underline{Cl}^{2}\underline{Br}^{4} = \underset{\underline{Cl}^{2}\underline{Br}^{4}}{\overline{N}}$ detto da Laurent *chlorabronaphtise* sarà il *nafteno biclo-quadri-bromico* ecc.

La sostanza sostituita all'idrogeno può anche essere l'ossigeno; così Laurent ha fatto conoscere il composto $C^{40}\underline{H}^{14}O^{2} = \underset{O^{2}}{\overline{N}}$, che egli ha indicato col nome di *naphtase*, e che avrebbe dovuto chiamare più rigorosamente secondo i suoi principj *oxynaphtase*; noi dovremo chiamarlo *nafteno bi-ossico.*

Finalmente Laurent ha trovato che nel nafteno, come in altri radicali carbo-idrici, poteva anche sostituirsi ad una parte dell' idrogeno un ugual numero di equivalenti di una sostanza composta, qual è l'acido iponitrico $\underline{Az}O^{4}$, ossia il nostro *ossazoto quadruplo*; in questo caso egli ha preposto al nome del nafteno, colle solite terminazioni esprimenti il numero degli atomi su cui cade la sostituzione, il nome abbreviato *ni.* Se si vuole assomigliare a tale riguardo l'acido iponitrico ad una sostanza semplice, potremo anche noi indicarlo per abbreviazione col nome *nitreno*, o in composizione *nitro* o *ni*, e aggiungere al nome della sostanza in cui se ne fa la

sostituzione gli epiteti *uni-nitrico, bi-nitrico* ecc. Ciò non pare però necessario, potendosi sempre (astrazion fatta dalla disposizione particolare delle molecole componenti trà loro) riguardare come sostanza sostituita il solo azoto, mentre l' ossigeno che con esso formerebbe l' acido iponitrico resterà all' infuori del tipo, come un altro componente. Così il *ninaphtase* di Laurent $C^{40}\underline{H}^{14}(\underline{Az}^{2}O^{8}) = O^{8}C^{40}\underline{H}^{14}\underline{Az}^{2} = O^{8}\overline{N}_{\underline{Az}^{2}}$ prenderà il nome di *ossinafto ottuplo bi-azotico*: il *ninaphtèse* di Laurent $C^{40}\underline{H}^{12}(\underline{Az}^{4}O^{16}) = O^{16}C^{40}\underline{H}^{12}\underline{Az}^{4} = O^{16}\overline{N}_{\underline{Az}^{4}}$ quello di *ossinafto sedecuplo quadri-azotico* ecc. Nella stessa maniera potranno formarsi i nomi di quei derivati del nafteno, in cui Laurent ha trovato per sostanza sostituita l' acido solforoso ecc.

Tutti questi composti possono altronde combinarsi col cloro, o con altre sostanze all' infuori del tipo, e Laurent ne ha osservati in particolare diversi cloruri; i nomi se ne formeranno secondo i principj della nomenclatura generale, aggiungendo sempre l' epiteto relativo alle sostituzioni che possono aver luogo nel radicale primitivo.

Non parlo dell' acido naftalico e delle sue modificazioni, perchè il numero di atomi di carbonio contenuti nel suo radicale essendo diverso da quello del nafteno, esso non può riferirsi a questo tipo.

Tra gli acidi di cui si possono prendere i radicali per tipi carbo-idrici arrecherò come esempio l' acido benzoico. La sua composizione allo stato anidro essendo $C^{14}\underline{H}^{5}O^{3}$, si avrà per un tipo o radicale fondamentale il composto $\overline{C}^{14}\underline{H}^{5}$, che potrà chiamarsi *benzeno* o in composizione *benzo*, e che si indicherà nelle formole col simbolo $\overline{B}$; così l' acido benzoico prenderà il nome di *ossibenzo triplo*, e la formola ne sarà $O^{3}\overline{B}$. Allo stesso tipo potranno poi riferirsi il composto detto *benzoilo* $C^{14}\underline{H}^{5}O^{2} = O^{2}\overline{B}$ che sarà l' *ossibenzo doppio* e l' olio di mandorle amare, che fu considerato come un idruro di benzoilo $C^{14}\underline{H}^{5}O^{2} + \underline{H}$, e che si sarebbe anche potuto riguardare

come $C^{14}\underline{H}^5O + O\underline{H}$, cioè come un idrato dell'ossido $C^{14}\underline{H}^5O$, ma che noi indicheremo colla formola $O^2\overline{B}\underline{H}$, e dovremo chiamare *ossibenzidro doppio* (*oxybenzhydrum duplum*). L' acido benzoico idrato $C^{14}\underline{H}^5O^3 + O\underline{H} = O^4\overline{B}\underline{H}$ sarà l' *ossibenzidro quadruplo*. Il benzoato di potassa $C^{14}\underline{H}^5O^3 + O\,Po = O^4\overline{B}\,Po$ si chiamerà *ossibenzopoto* od *obenzopoto quadruplo*; e nella stessa maniera si formeranno i nomi degli altri benzoati.

Non si dovrà poi confondere questo benzeno $C^{14}\underline{H}^5$ col radicale $C^6\underline{H}^3$ a cui Mitscherlich ha dato il nome di *benzino*, e che non deducendosi dall' acido benzoico, che in una maniera indiretta, e con cangiamento del numero degli atomi di carbonio, dovrà indicarsi con qualche altro nome, che vi si riferisca più immediatamente.

Gli acidi detti *grassi* si distinguono pel gran numero di atomi di carbonio e d' idrogeno che essi contengono ne' loro radicali. Laurent si è formato a loro riguardo una teoria, secondo la quale il loro radicale primitivo sarebbe sempre composto di un numero uguale di equivalenti di carbonio ($C=0,75$) e di idrogeno $\underline{H}$, ma diverso da un acido all' altro, e in cui ad alcuni degli equivalenti dell' idrogeno fossero sostituiti altrettanti equivalenti d' ossigeno, con aggiunta poi di uno o più atomi d' ossigeno estranei al tipo, per formare l' acido anidro. Così nell'acido stearico anidro, di cui la composizione è immediatamente rappresentata secondo l'analisi di Laurent (alquanto diversa da quelle che prima di lui se ne aveano) dalla formola $C^{34}\underline{H}^{33}O^3$, uno dei tre atomi d'ossigeno dovrebbe considerarsi come sostituito ad un equivalente $\underline{H}$ d' idrogeno, senza il che il suo radicale sarebbe $C^{34}\underline{H}^{34}$, onde egli scrive la formola di quest' acido $C^{34}\underline{H}^{33}O + O^2$. Non credo conveniente di complicare la nomenclatura conformemente a questa supposizione, e mi sembra più naturale prendere per radicale il composto stesso $C^{34}\underline{H}^{33}$ quale si presenta nell' acido unito all' ossigeno; così chiamando questo radicale $C^{34}\underline{H}^{33}$ *Stearo*, e indicandolo col simbolo $\overline{St}$, la formola dell' acido stearico anidro sarà $O^3\overline{St}$, ed esso porterà il nome di *ossistearo triplo*

(*oxystearum triplum*). L'idrato di quest'acido, avente per formola $C^{34} H^{33} O^3 + O H = O^3 \overline{St} + O \underline{H} = O^4 \overline{St} \underline{H}$ prenderà il nome di *ossistearidro* od *ostearidro quadruplo*, e si formeranno pure secondo le regole della nomenclatura generale i nomi de' suoi sali. L'analogo si dica degli altri acidi grassi.

Anche i composti vegetali neutri, come lo zucchero, la gomma ecc. potranno fornire radicali idro-carbonici speciali a cui essi potranno riferirsi, ma la scelta di questi radicali darà necessariamente luogo a diverse discussioni particolari, dietro le quali soltanto si dovrà stabilire la loro nomenclatura nella maniera che parrà più semplice e più razionale. In generale la nomenclatura de' corpi organici da noi proposta ammette, per la formazione dei tipi, considerazioni sulla maniera la più naturale di concepire la composizione de' corpi, da cui è indipendente la nostra nomenclatura generale, senza che però si pretenda con ciò di assegnare la loro vera costituzione.

Per alcuni di questi composti si potrebbe dubitare se essi debbano riferirsi ad un radicale immediato ed unico, o riguardarsi come formati dall' unione di due altri composti appartenenti a tipi diversi. Così per esempio si è osservato che la formola esprimente la composizione dello zucchero di canne anidro $C^6 \underline{H}^5 O^5$ può scomporsi in due termini distinti, $C^2 O^4 + C^4 \underline{H}^5 O = 2 C O^2 + C^4 \underline{H}^5 O$, cioè in due equivalenti d'acido carbonico e un equivalente d'etere ordinario; e questa maniera di concepire la composizione dello zucchero avrebbe anche in suo favore il fatto che lo zucchero in soluzione nell' acqua si scompone realmente, con addizione degli elementi dell'acqua, per mezzo della fermentazione, in acido carbonico ed alcool, cioè in acido carbonico, etere ed acqua. Se si volesse conformare la nomenclatura a quest' idea, la formola dello zucchero anidro dovrebbe scriversi $C^2 O^4 + O \overline{E} = O^5 C^2 \overline{E}$, e il nome ne sarebbe *ocarbeteno cinque-doppio* (*ocarbethenum* o *oxycarbethum quinque-duplum*). Ma si potrebbe anche riferire immediatamente lo zucchero ad un radicale $C^6 \underline{H}^5$, a cui dovrebbe darsi un nome speciale, e di cui esso sarebbe

un ossido; tanto più che la composizione $2CO^2 + C^4\underline{H}^5O$ è pur quella che appartiene ad un acido analogo all' acido sulfovinico, considerato allo stato anidro, e che non ha alcuna somiglianza di proprietà collo zucchero.

Nei corpi organici che oltre al carbonio e all' idrogeno contengono azoto, sembra conveniente per la nomenclatura di considerare come radicali primitivi i composti di un numero determinato di questi tre elementi, e di dar loro nomi speciali come a sostanze semplici, le quali possono poi unirsi all' ossigeno e ad altri corpi, o subire anche sostituzioni di altre sostanze ad una parte del loro idrogeno, ritenendo il loro tipo. Ho già arrecato nella 1ª Memoria come un esempio di questi radicali quello comune alla cinconina e alla quinina tra gli alcali vegetabili. Io avea preso per questo radicale $C^{20}\underline{Az}\underline{H}^{12}$, ammettendo che esso si trovasse riunito ad un solo atomo d'ossigeno nella cinconina e a due nella quinina, conformemente alle analisi di Regnault di questi due alcali. La composizione $C^{20}\underline{Az}\underline{H}^{12}O^2$ è pur quella assegnata da Liebig alla quinina; ma quanto alla cinconina, la sua formola, secondo l'analisi di Liebig, sarebbe stata $C^{20}\underline{H}^{11}\underline{Az}O$, cosicchè il suo radicale avrebbe differito da quello della quinina per un atomo d'idrogeno di meno. Laurent più recentemente ha confermato il risultato di Liebig quanto all' idrogeno della cinconina, ma con C^{19} invece di C^{20} pel carbonio, ed ha pur trovato che la formola della quinina stessa dovea ridursi a $C^{19}\underline{Az}\underline{H}^{11}O^2$, cosicchè l' identità dei due radicali ne sarebbe ristabilita; ma questo radicale comune sarebbe $C^{19}\underline{Az}\underline{H}^{11}$ in vece di $C^{20}\underline{Az}\underline{H}^{12}$. Per altra parte Regnault ha fatto osservare che la composizione dei sali di questi due alcali conduceva a raddoppiarne la formola, ed anche Laurent ha adottato questo raddoppiamento, cosicchè la formola della cinconina diviene $C^{38}\underline{Az}^2\underline{H}^{22}O^2$, e quella della quinina $C^{38}\underline{Az}^2\underline{H}^{22}O^4$; quindi anche il radicale comune dovrà prendersi $C^{38}\underline{Az}^2\underline{H}^{22}$. Indicando questo radicale col simbolo $\overline{Ci}$ e dandogli il nome di *cincono* o *cinco*, la cinconina sarà $O^2\overline{Ci}$ e prenderà il nome

di *ocincono* od *ossicinco doppio* (*oxycinchonum duplum*), e la quinina $O^4\overline{Ci}$, ed avrà il nome di *ossicinco quadruplo*. Da questi nomi si dedurranno facilmente, secondo le regole generali della nostra nomenclatura, i nomi dei sali che hanno queste sostanze alcaline per basi. Così per esempio la formola del solfato di cinconina considerato allo stato anidro essendo, secondo Laurent, $C^{38}\overline{Az^2}\,\overline{H^{22}}\,O^2 + SO^3$, essa diverrà, secondo questa notazione, $O^2\overline{Ci} + O^3S = O^5S\overline{Ci}$, e il nome ne sarà *ossulcinco* od *ossulcincono quadruplo*. Nella stessa maniera si formeranno i nomi degli altri alcali organici e de' loro composti, quando ne sia bene stabilita la composizione, dopo che si sarà assegnato un nome speciale al composto carbo-idro-azotico che si crederà dover prendere pel loro radicale. Laurent ha anche ottenuto alcuni risultati di sostituzione parziale di cloro e di bromo all' idrogeno nella cinconina, ed altri alcali organici ne sarebbero senza dubbio suscettibili.

L' analogo si dica degli acidi organici contenenti azoto, come l' acido urico, l' acido ippurico ecc., e delle sostanze azotate neutre come l' albumina, la fibrina, la gelatina, l' indaco ecc., se non che sarà ancora più difficile in queste sostanze, che in quelle semplicemente carbo-idriche, il decidersi sul composto che in esse si debba prendere per radicale primitivo; le discussioni occorrenti a tale riguardo non potrebbero esser l' oggetto che d' un lavoro generale sulla nomenclatura de' corpi organici, di cui quì abbiamo proposte le basi. Vi sono del resto alcuni di questi radicali già generalmente ammessi, con nomi speciali, che nulla impedirebbe di adottare.

Nella prima Memoria ho fatta menzione di due radicali composti che, sebbene uscenti in certo modo dal dominio della chimica organica, si possono anche indicare con nomi speciali, come se fossero sostanze semplici, conformemente all' uso già ricevuto; questi due radicali sono formati l' uno di carbonio e d' azoto, l' altro di azoto e d' idrogeno. Il primo di essi è il *cianogeno* o *ciano* $C^2\overline{Az}$; l' introduzione di questo radicale

nella nomenclatura non presenta alcuna difficoltà, e i nomi delle sue combinazioni colle altre sostanze si formeranno facilmente secondo i nostri principj generali. L' altro è l' *ammonio* $\underline{Az}\,\underline{H}^4$, sull' ammessione del quale non pare esservi nè anche alcun dubbio, stante il gran numero di composti di cui esso può riguardarsi come parte, facendovi funzione di un corpo semplice. Così i sali ammoniacali propriamente detti sono ora generalmente considerati come sali che hanno per base l'ossido di questo radicale, $O\,\underline{Az}\,\underline{H}^4$ ossia $O\,\overline{Am}$, indicando col simbolo $\overline{Am}$ il composto $\underline{Az}\,\underline{H}^4$; e sarà facile formare i nomi di questi sali e di qualunque altra combinazione dell'ammonio, secondo i nostri principj generali, abbreviando ove d' uopo in composizione il nome *ammonio* in *ammo*; avremo così l'*ossammonio semplice* $O\,\overline{Am}$, il *clorammonio semplice* $\underline{Cl}\,\overline{Am}$, l' *ossulfammonio* od *ossulfammo quadruplo* $O^3 S + O\overline{Am} = O^4 S\,\overline{Am}$, ecc. Ma il nome d' *ammonio* fu originariamente dedotto da quello d' *ammoniaca* che si era dato anteriormente al composto $\underline{Az}\,\underline{H}^3$, che si era dapprima riguardato come la base dei sali ammoniacali, e nella supposizione che questo composto formasse anche da se solo un radicale distinto; gli si dovrebbe ora assegnare un altro nome da quello diverso per evitarne la confusione coll' ammonio, ed io ne avea proposto uno (*sapreno*) pel caso che se ne fosse riconosciuta la necessità. Per altra parte si è anche più recentemente considerato come un radicale distinto nelle combinazioni, e meritevole d' un nome particolare il composto $\underline{Az}\,\underline{H}^2$, ed esso fu chiamato *amidogeno* od *amido*; io non avea creduto nella 1ª Memoria dover adottare questo radicale nella nomenclatura; ora però si sono sì fattamente moltiplicate le sostanze di cui esso pare far parte senza cangiar di tipo, che l' introduzione ne è divenuta indispensabile; ma il nome di *amido* tratto anch' esso dalle lettere iniziali d'*ammoniaca* dee necessariamente cangiarsi; propongo quello di *adeno* (che si potrà anche abbreviare in *ado* in composizione), come già si è ammesso per rappresentarlo il simbolo $\overline{Ad}$ in vece del simbolo $\overline{Am}$ con cui si indica l'am-

monio. Laurent ha poi fatto osservare che l'ammoniaca $\underline{Az}\,\underline{H}^3$ può considerarsi come un composto di $\underline{Az}\,\underline{H}^2 + \underline{H}$, e come tale introdursi nelle combinazioni in cui esso non passa allo stato d'ammonio $\underline{Az}\,\underline{H}^4$; non occorrerà più quindi dargli un nome speciale; essa prenderà il nome di *adenidro semplice*, e la sua formola sarà $\overline{Ad}\,\underline{H}$; sotto questa forma esso può combinarsi agli acidi e ai sali, non altrimenti che l'acqua $O\,\underline{H}$, da cui esso non differisce che per l'adeno sostituito all'ossigeno nell'unione coll'idrogeno. Laurent chiama gli acidi in questo stato acidi *amidati*; se per esempio l'acido solforico SO^3 venisse ad unirsi immediatamente cogli elementi dell'ammoniaca $\underline{Az}\,\underline{H}^3 = \overline{Ad}\,\underline{H}$, ne risulterebbe il composto $S\,O^3 + \overline{Ad}\,\underline{H} = O^3\,S\,\overline{Ad}\,\underline{H}$ che Laurent chiamerebbe *acido solforico amidato* e che noi dovremmo chiamare *ossulfadidro triplo* (*osulphadhydrum triplum*). Questo corpo del resto potrebbe anche considerarsi come $S\,O^2\,\overline{Ad} + O\,\underline{H}$, cioè come l'idrato d'un acido che differirebbe dall'acido solforico per la sostituzione di un equivalente di adeno ad uno d'ossigeno. Rose ha fatto conoscere una combinazione di acido solforico anidro cogli elementi dell'ammoniaca cioè di $\overline{Ad}\,\underline{H}$, ma in proporzione meno semplice che quella che abbiamo supposta; essa sarebbe di quattro equivalenti d'acido solforico e tre di $\overline{Ad}\,\underline{H}$, cosicchè la formola ne sarebbe $4\ SO^3 + \overline{Ad}^3 + \underline{H}^3 = O^{12}\,S^4\,\overline{Ad}^3\,\underline{H}^3$; egli ha chiamato questo composto *sulfammon*; noi dovremmo dargli il nome di *ossulfadidro dode-quadri-bis-triplo*. Laurent ha fatto osservare che esso potrebbe riguardarsi anche come un solfato a doppia base, cioè di amiduro d'idrogeno (adenidro) e di amiduro d'ammonio ($\overline{Ad}\,\overline{Am}$); poichè due degli equivalenti $\overline{Ad}\,\underline{H}$ possono considerarsi come $\overline{Ad}$, $\overline{Ad}\,\underline{H}^2 = \overline{Ad}$, $\underline{Az}\,\underline{H}^4 = \overline{Ad}\,\overline{Am}$, composto che noi chiameremmo *adenammo semplice*. Il sulfammon di Rose diverrebbe così $O^{12}\,S^4\,\overline{Ad}^2\,\overline{Am}\,\underline{H}$, e prenderebbe il nome di *ossulfadammidro dode-quadri-doppio*. Adottando questo nome di *adeno* l'ossamide, di cui abbiamo fatto cenno nella prima Memoria $O^2\,C^2\,\underline{Az}\,\underline{H}^2 = O^2\,C^2\,\overline{Ad}$ prenderà il nome di *ocarbadeno bis-doppio*, e nella stessa maniera si formeranno i nomi degli altri composti di cui l'adeno si concepisca far parte.

SOVRA UNA NUOVA O RARA SPECIE
DI PIANTA MALPIGHIACEA
MEMORIA

DEL SIG. PROFESSORE

CAV. GIUSEPPE MORIS

SOCIO ATTUALE

Ricevuta il 13 Novembre 1847.

Fra le Malpighiacee descritte nelle opere degli Autori, od esistenti nelle collezioni che vennemi fatto di consultare, come quelle dell' Erbario del De Candolle e del Museo di Parigi, quelle stesse che fan parte della Monografia dell'egregio Sig. Adriano di Jussieu (Monograph. des Malpigh. Paris 1843-1844), io non ne ho trovato alcuna cui abbia potuto riferire la specie della quale imprendo a trattare. Ella è questa indigena della nuova Granata, d' onde l' infelice nostro Bertero ne dirigeva esemplari al suo e mio Maestro il Professore Balbis di grata memoria. Tali esemplari in numero di due, l' uno in fiore, l'altro in frutto, con annessavi cartuccia sovra la quale leggesi scritto di carattere dello stesso Bertero « *Triopteris, Hiraea?* Mompox 1820 », conservansi presso l' erbario che già fu del Balbis, ed or dell' orto botanico di Torino. Da essi ho tolto la descrizione e la tavola che sottopongo al giudizio de' Botanici.

Alla descrizione poi ho aggiunto alcune brevi annotazioni concernenti i caratteri pe' quali o la specie potrà per avventura venir ad essere innalzata al grado di Genere, ovvero si avranno ad ampliare que' del *Tetrapterys*, cui ho intanto creduto doverla rapportare.

TETRAPTERYS ALLOPTERYS.

T. foliis ovatis, brevi acuminatis, basi ad latus nervi dorsalis utrinque glanduliferis, adultis glabratis; stipulis lanceolatis perexiguis, ad basim petioli utrinque ramo insertis, deciduis; corymbis plurifloris, axillaribus terminalibusque; pedunculis, ad medietatem infrave, tenuissime 1-2-bracteolatis; calicibus 8-glanduliferis; petalis staminibusque glabris; Samarae oblongae, glabratae alis lateralibus utrinque tribus-quinque (raro hinc binis), transversim obliqueve insertis, ligulaeformibus, subaequalibus, regulari serie ab ala dorsali aequidistantibus eamdemque superantibus.

DESCRIPTIO

Rami teretes, flexiles, inferne glabrati, superne pilosi, juniores virentes, adulti fusco-rubentes.

Folia petiolata, opposita, membranacea, ovata ovatove-elliptica, nonnulla ad basim obliqua, unciam unciam et semis et paullo ultra lata, sesqunciam uncias tres longa, juniora ad utramque paginam marginesque pilosa, adulta fere omnino glabrata, floralia, saltem suprema, caeteris minora, omnia margine integerrima, apice attenuata, breviter acuminata acutaque, ima basi paginae inferioris, ad latus utrumque nervi medii, glandula una alterave subrotunda, sessili praedita, nervo medio subtus prominente, lateralibus primariis prominulis, ascendentibus, subparallelis, ad folii marginem non pertingentibus, at paullo infra marginem arcuatim confluentibus, mox in minores, etiam confluentes, ad marginem usque divisis. Petioli lineam unam-quatuor ad maximum longi, pilis rufescentibus primum obsiti, mox fere glabrati, superne canaliculati, nonnullique verrucula aut glandula una alterave prominula medietatem versus instructi.

Stipulae utrinque ad imam petiolorum basim ramo, nec petiolo, insertae, liberae, triangulo-lanceolatae lanceolataeve,

acutae, perexiguae, paullo ultra dimidiam lineam fereve lineam longae, deciduae.

Ramuli floriferi ad superiorum foliorum axillas et terminales. Flores juxta superiorem partem cujusque ramuli floriferi pedunculati, racemum praebentes corymbosum aut corymbum simplicem, longitudine folia floralia inferiora aequantem iisdemve breviorem, floralia superiora nunc aequantem, nunc duplo ultrave superantem. Pedunculi ad bractearum axillas solitarii, bracteolis saepe binis, oppositis alternisve, medietatem versus aut infra, stipati, in pedicellum uniflorum abeuntes. Pedicelli nudi, pedunculis quibuscum articulantur triplo sextuplo longiores, apice nonnihil incrassati.

Bracteae bracteolaeque valde exiguae, triangulo-lanceolatae, lanceolataeve, acutae.

Calix quinquefidus, laciniis ovatis, acutiusculis obtusisve, altera (extima) eglandulifera, reliquis quatuor glanduliferis, glandulis ovalibus, majusculis, basim dorsalis laciniae faciei, ipsamque faciem dorsalem, pleraque parte, utrinque, occupantibus.

Petala quinque, hypogyna, albida (ex sicco) aut ochroleuca, glabra, calicis laciniis alterna, iisdemque duplo ultrave longiora, tenuiter unguiculata, limbo ovali obovatove, facie nonnihil concavo, margine integro obiterve dentato.

Stamina decem, alterna petalis opposita caeteris vix breviora, omnia fertilia calicemque vix superantia: Filamenta glabra, inferne dilatata imaque basi in annulum hypogynum invicem coalita: Antherae introrsae, cordato-ovales, biloculares, incumbentes, flavescentes, glabrae, juxta longitudinem cito dehiscentes; Connectivum dorsale, flavo-rufum, crassiusculum, apice antherarum loculos superans.

Ovarium ex ovellis tribus hirsutissimis, angulo centrali inter se coalitis, interna inferiori facie receptaculo triquetro-conico affixis. Styli tres, inter ovella exserti, rigiduli, liberi, glabri, staminibus paullo longiores, apice oblique subtruncati: stigmate laterali, flavido.

Fructus e samaris tribus subindeve, abortu, paucioribus. Samarae coriaceo-membranaceae, triquetro-compressae, oblongae, rufulae, nunc omnino glabratae, nunc pilis vix ullis sparsis obsitae, medio dorso in alam longitudinalem unicam, simplicem, latere utroque in alas, seu processus alaeformes, plures abeuntes; alae subcoriaceae, venosae, rufulae, nitentes; dorsalis seu longitudinalis oblonga, margine integra obiterve undulato-crenulata; laterales numero saepe utrinque quatuor, subindeve in altero ex lateribus tres, perraro, et quidem in unica ex mihi spectatis samaris, duae, in altero latere quatuor quinque (Samarae in utroque latere bialatae, nullae se mihi praebuere), transversim aut oblique insertae, ab ala dorsali aequidistantes, uniseriatae, nunc patentes invicemque fere parallelae, nunc superiores et inferiores praesertim ab intermediis divergentes, singulae lineares aut lineari-spathulatae, apice crenato-denticulatae integraeve, alam dorsalem superantes, invicem pariterque ad basim saepe divisae longitudineque subaequales etiamque latitudine, nisi duae, quod rarum, in unicam coalescant.

Semen oblongum, brevi acuminatum, glabrum, funiculo brevi, infra apicem, oblique appensum: ejus integumenta membranacea; extimum (testa) rufescens; intimum (endopleura) tenuissimum, aegre ab extimo sejungendum. Cotyledones crassae, inter se fere aequales, basi non biauriculatae, in aliis seminibus prorsus rectae, in aliis summo apice nonnihil inflexae. Radicula recta, supera, brevissima cum cotyledonibus sensim continua.

Plantae pili malpighiacei.

Frutex aut arbuscula.

Hab. in nova Granata, circa Mompox. Bertero!

Iconis explicatio.

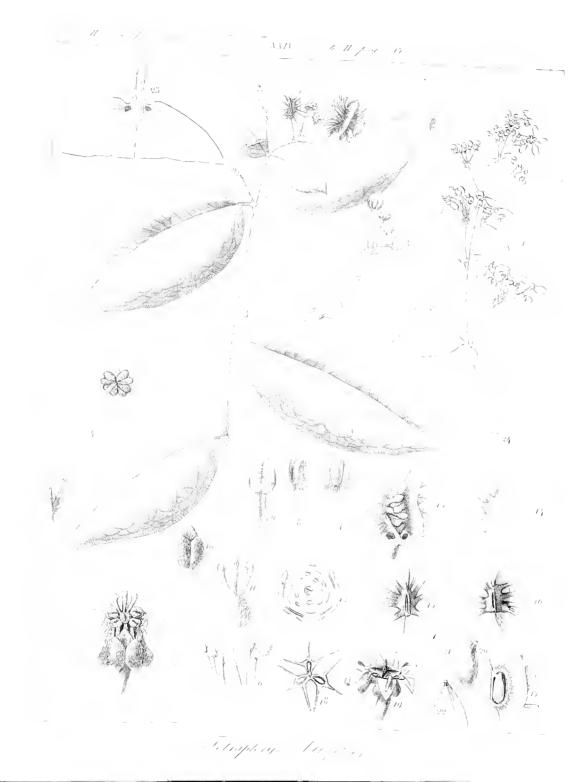
1. Ramus florifer: naturali magnitudine.
2. Ramulus axillaris, florifer (auctus); Stipulis infra petiolorum basim ramo insertis.

3. Ramus fructifer: naturali magnitudine.
4. Pedunculus, ad bracteae axillam, bracteolatus, florifer: valde auctus, perinde ac sequentia.
5. Flos.
6. Stamina; filamentis basi in annulum coalitis.
7. 8. 9. Stamina a facie postica, latere, et a facie antica.
10. Connectivum dorsale antherarum loculos superans.
11. Ovarium hirsutissimum et Styli.
12. Diagramma floris.
13. Pedunculus fructifer.
14. 15. 16. Samarae alarum lateralium numero variae.
17. Samara, detracta altera pericarpii parte, ut semen, funiculo brevi, infra apicem appensum adspiciatur.
18. Fructus sectio transversa.
19. Receptaculum floris calice et staminum filamentis stipatum.
20. Semen.
21. Embryo cum altera ex cotyledonibus.
22. Cotyledones et embryo.
23. Fragmentum folii, glandulis, ima basi, ad latus utrumque nervi dorsalis.
24. Pilus malpighiaceus.

OBSERVATIO.

Malpighiacea stirps descripta accedit ad *Tetrapterydem* ADR. JUSS. *Monogr.* et ENDLICH. *Gen.* magis quam ad aliud genus *pleuropterygieum*, ita tamen ut discrimina quaedam adnotanda sint.

A *Tetrapterydis* nempe sectione 1ª seu *Tetrapteryde genuina* ADR. JUSS. *Mon. Malpigh.* 2. p. 265. quacum habitu et inflorescentia congruit, differt carpellorum ala dorsali majuscula, cotyledonibus basi neutiquam biauriculatis. Cum ejusdem generis sectione 2ª seu *Pentapteryde* ADR. JUSS. l. c. p. 291. consentit ala carpellorum dorsali vera, etsi laterales non superante, praeterea cotyledonum forma; at recedit ramulis

1 2 3 24 9 8 7 13 14 10 11 12 15 16 6 18 19 22 21 20 17

floriferis haud contractis, et inflorescentia haud subsessili: ab utraque autem generis sectione differt alis lateralibus non quatuor at pluribus, regulari serie ab ala dorsali aequidistantibus, non inferioribus quam superioribus cristae aut alae dorsali propius insertis (vid. Adr. Juss. *Mon. Malpigh.* 2. p. 264.). Num idcirco stirps nostra ad eas aequiparanda penes quas, quemadmodum in *Tetrapteryde buxifolia* Cav., *paludosa* et *longibracteata* Adr. Juss. *Monogr.* cit. p. 285. 286. 287., Samarae, praeter quatuor alas primarias, appendicibus processibusve alaribus aut alis secundariis sunt praeditae? Sed enim allatis in speciebus, sive cristae, sive appendices alares, sive alae secundariae, vel interjectae deprehenduntur cristam inter dorsalem et alas laterales veras, vel tenuitate, forma, longitudine aut structurae indole ab alis primariis discrepant: in nostra autem samararum alae laterales omnes quacumque ratione spectentur, quocumque nomine appellentur, parem inter se et cum ala dorsali textus formam praebent, a nervis lateralibus folii carpellaris pariter procedentes, eamdem referunt insertionis rationem, eamdem faciem caeteraque, sic ut aliae aliis accessoriae vel secundariae haberi nequeant. Quare ut optimo jure *Allopterys* nostra *Tetrapterydi* generi accenseatur erunt ne ejusdem *Tetrapterydis* characteres generici, quod praesertim spectat ad alas carpellorum laterales, amplificandi? seu potius erit ne *Allopterys* ipsa genus per se, traditis characteribus a *Tetrapteryde* satis diversum? Equidem quibus datum fuerit processuum alarium alarumque lateralium modum, insertionem atque numerum in plurium *Tetrapterydum* samaris spectare, et cum illis *Allopterydis* nostrae conferre, iis judicium relinquo. Interea stirpem cujus praecipuas notas depromsi e paucis unici fructiferi speciminis carpellis, ad *Tetrapterydem*, donec plura innotescant, referendam esse putavi.

DI UN METODO

PER INTEGRARE ALCUNE EQUAZIONI DIFFERENZIALI NON LINEARI

NOTA

DEL SOCIO ATTUALE

PROF. GASPARE MAINARDI.

Ricevuta il 28 Febbrajo 1848.

Indicate con φ_1, φ_2, ψ_1, ψ_2 quattro funzioni di una variabile x, di una funzione y di essa e del suo coefficiente differenziale primo y', la integrazione della equazione

$$\varphi_1 \cdot \psi_2 = \psi_1 \cdot \varphi_2$$

si conseguisce talvolta coll'analisi seguente. Moltiplicata la equazione per una funzione M di x ed y, si decomponga nelle due

$$\varphi_1 = \mathrm{M}\,\psi_1, \quad \varphi_2 = \mathrm{M}\,\psi_2$$

e cavato da una $y' = \omega\,(x, y, \mathrm{M})$ si sostituisca nell' altra, onde ne venga $\mathrm{F}\,(x, y, \mathrm{M}) = 0$. Differenziata questa equazione rispetto ad x ne caveremo

$$\frac{d\mathrm{F}}{dx} + \frac{d\mathrm{F}}{dy}\,y' + \frac{d\mathrm{F}}{d\mathrm{M}}\left(\frac{d\mathrm{M}}{dx} + \frac{d\mathrm{M}}{dy}\,y'\right) = 0$$

ove posto nuovamente $y' = \omega$, ne deriva la equazione identica

$$\frac{d\mathrm{F}}{dx} + \frac{d\mathrm{F}}{dy}\,\omega + \frac{d\mathrm{F}}{d\mathrm{M}}\left(\frac{d\mathrm{M}}{dx} + \frac{d\mathrm{M}}{dy}\,\omega\right) = 0$$

la quale contenendo i coefficienti differenziali primi parziali dell' incognita M si decompone nelle due che seguono

$$\frac{d\mathrm{F}}{dx} + \frac{d\mathrm{F}}{dy}\,\omega + \frac{d\mathrm{F}}{d\mathrm{M}}\,\mathrm{M}' = 0, \quad y' = \omega\,(x, y, \mathrm{M}).$$

Combinando la prima di queste ultime equazioni alla

$F(x, y, M) = 0$ per eliminarvi la y; ovvero combinata la $F(x, y, M) = 0$ all' altra

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy}\omega + \omega\frac{dF}{dM}\cdot\frac{M'}{y'} = 0$$

onde eliminare la x, conseguiremo una nuova equazione differenziale contenente l'incognita M, il cui integrale determina questa funzione; eliminata la quale, mediante la equazione $F(x, y, M) = 0$, avremo nella risultante l'integrale completo della proposta equazione.

Applichiamo il metodo ad alcune questioni geometriche.

Si domandi la trajettoria ortotomica delle ellissi, o iperboli, omofocali? Riferite quelle linee alle due rette ortogonali in cui devono essere collocati i loro assi, indichiamo con $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ la equazione di una di quelle ellissi, supponiamo $a^2 - b^2 = c^2$ e la equazione differenziale della trajettoria sarà

$$1 - \frac{b^2 x}{a^2 y} y' = 0 \qquad \text{ossia} \qquad (1) \quad (x + yy')(xy' - y) = c^2 y'$$

che ricaviamo colla eliminazione delle varianti a, b dalle tre antecedenti equazioni. Moltiplicata per M la equazione differenziale (1), si decomponga nelle due

$$x + yy' = My', \quad M(xy' - y) = c^2$$

d' onde si trae $\quad (2) \quad c^2(M - y) + M^2 y = M(x^2 + y^2)$

e differenziando $\quad M'(c^2 + 2My - x^2 - y^2) = (M^2 + c^2)y'$.

Scritta la equazione (2) come segue

$$M(c^2 + 2My - x^2 - y^2) = (M^2 + c^2)y$$

combinata all' antecedente, ricaviamo $\frac{M'}{M} = \frac{y'}{y}$, onde $M = A.y$; essendo A la costante richiesta dalla integrazione. Avremo quindi l' integrale completo della proposta equazione (1)

$$\frac{Ax^2}{c^2(A-1)} - \frac{A}{c^2}y^2 = 1$$

il quale rappresenta un sistema di ellissi, o iperboli, omofocali.

Cerchiamo la equazione generale delle curve piane, di cui qualsivoglia tangente forma angoli egnali coi raggi vettori che partono da due punti dati? Indicata colla lettera a la distanza di quei punti, riportiamo le linee cercate a due assi ortogonali, uno dei quali passi pei punti dati, l' altro divida in due parti eguali la retta che li congiunge. La equazione delle linee sarà

$$\frac{y-xy'}{\sqrt{(x^2+y^2)}}=\frac{y-(x-a)y'}{\sqrt{(y^2+(x-a)^2)}},$$

ovvero
$$2y'(x^2+y^2)=(2x-a)(yy'^2+2xy'-y).$$

Introdotto in questa equazione il moltiplicatore M, decomposto il prodotto nei due fattori

$$My'=2x-a, \quad M(yy'^2+2xy'-y)=2(x^2+y^2)$$

ed eliminato y', si desume

$$(1) \qquad 2M(x^2+y^2)=y(2x-a)^2+2Mx(2x-a)-My^2.$$

Differenziata questa equazione, poi eliminato nuovamente y', caveremo

$$2M'(y^2-x^2+My+ax)=\frac{2x-a}{M}((2x-a)^2+M^2)$$

quindi scritta la equazione (1) come segue

$$2M(y^2-x^2+My+ax)=y((2x-a)^2+M^2)$$

da questa e dalla antecedente desumiamo

$$\frac{M'}{M}=\frac{2x-a}{My}=\frac{y'}{y} \qquad \text{quindi} \quad M=A.y$$

poi l' integrale cercato

$$A(A+2)y^2=(2x-a)^2+2Ax(x-a)$$

il quale rappresenta una curva conica avente i fuochi nei punti dati.

Proponiamoci di determinare le trajettorie oblique delle ellissi, o iperboli, omofocali? Ritenute le supposizioni del primo esempio, essendo

$$a^2yy'+b^2.x=n(a^2y-b^2xy')$$

la equazione differenziale della linea cercata, ed n la tangente dell' angolo d' incontro, siccome da questa desumiamo

$$a^2 = \frac{x(1+ny')}{x(1+ny')-y(n-y')}\,c^2, \qquad b^2 = \frac{y(n-y')}{x(1+ny')-y(n-y')}\,c^2$$

mediante la equazione $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ avremo

$$(1) \qquad [nx+y+y'(ny-x)]\,[x-ny+y'(nx+y)] = c^2\,(1+ny')\,(n-y').$$

Moltiplicata quest' ultima per M, caviamone le due

$$M(nx+y+y'(ny-x)) = c^2(n-y'), \quad x-ny+y'(nx+y) = M(1+ny')$$

delle quali, coll' eliminare y', si deduce

$$(nx+y-nM)\,(M(nx+y)-nc^2) = (M-x+ny)\,[\,(x-ny)\,M-c^2]$$

ossia

$$(x^2+y^2+c^2)\,M = x\,(c^2+M^2).$$

Differenziata questa equazione, e sostituiti nella risultante

$$y' = \frac{M-x+ny}{nx+y-nM}, \qquad x+yy' = \frac{n(x^2+y^2)+M(y-nx)}{nx+y-nM}$$

ne segue

$$c^2+M^2+2xMM' = (x^2+y^2+c^2)\,M'+2M\,\frac{n(x^2+y^2)+M(y-nx)}{nx+y-nM}$$

e perchè $x^2+y^2+c^2 = \frac{x(c^2+M^2)}{M}$, abbiamo

$$[M(c^2+M^2)+x(M^2-c^2)M']\,[n(x-M)+y] = 2nc^2M(x-M)+2M^3y$$

ovvero

$$(M^2-c^2)\,[n(x-M)\,(M+xM')+y(xM'-M)] = 0.$$

Si hanno quindi le due equazioni

$$n\,(x-M)\,(xM)'+yx^2\left(\frac{M}{x}\right)' = 0, \qquad My^2 = (x-M)\,(c^2-xM)$$

da cui

$$n\,(xM)'\sqrt{x-M}+\left(\frac{M}{x}\right)'.\,x^2\,M\sqrt{M}\sqrt{c^2-xM} = 0$$

cioè

$$n\,\frac{(xM)'}{(xM)^2\sqrt{\left(\frac{c^2}{xM}-1\right)}} + \frac{\left(\frac{M}{x}\right)'}{\sqrt{\left(1-\frac{M}{x}\right)}} = 0$$

la quale integrata fornisce

$$(2) \qquad \frac{n}{c^2}\sqrt{\left(\frac{c^2}{xM}-1\right)}+\sqrt{\left(1-\frac{M}{x}\right)}=A.$$

Siccome poi $y\sqrt{M}=\sqrt{x-M}\sqrt{c^2-xM}$, avremo

$$\frac{n}{c^2}y+x-M=A\sqrt{x}\sqrt{x-M}, \qquad x-M=\left(\frac{Ac\sqrt{x}\pm\sqrt{A^2c^2x-4ny}}{2c}\right)^2$$

$$y^2\left[4c^2x-\left(Ac\sqrt{x}\pm\sqrt{A^2c^2x-4ny}\right)^2\right]=$$

$$=\frac{Ac\sqrt{x}\pm\sqrt{A^2c^2x-4ny}}{2c}\left[4c^2(c^2-x^2)+x\left(Ac\sqrt{x}+\sqrt{A^2c^2x-4ny}\right)^2\right]$$

la quale ultima equazione è l'integrale completo della proposta.

Se poniamo $A=0$, per cui $M=x+\frac{ny}{c^2}$, ne deriva l'integrale particolare

$$\frac{n}{c^2}(y^2-x^2)+\left(1-\frac{n^2}{c^4}\right)xy+n=0.$$

Siccome è facile il risalire dalla equazione (2) alla (1), seguendo passo passo in ordine retrogrado l'analisi esposta, ometto la complicata verificazione dell'integrale trovato.

Il metodo d'integrazione, che propongo, talvolta ricade in quello di Hermann, il quale consiste nel differenziare la equazione da integrarsi. Sia data a cagion d'esempio la equazione $xy'^2+y=xy'$: introdottovi il moltiplicatore M, poi decomposta nelle due $y'=M$, $x(M^2-M)+y=0$: differenzieremo la seconda rispetto ad x, e posto in essa $y'=M$, si caverà $x(2M-1)M'+M^2=0$, quindi integrando

$x\,.\,M^2.\,e^{\frac{1}{M}}=A$ nella quale si sostituirà

$$M=\tfrac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}-\frac{y}{x}}$$

onde conseguire l'integrale cercato.

COME RIDURRE LO STUDIO DE' CONTAGI A SCIENZA REALE

MEMORIA

DEL SOCIO ATTUALE

DOTT. GIULIO SANDRI.

Ricevuta il dì 11 *Marzo* 1848.

1. Quale sia l' importanza de' contagi nell' universo, non è mestieri di perderci in parole a dimostrarlo; essendo pur troppo noto come questi esseri, quanto minuti, e impercettibili ai nostri sensi, altrettanto possenti in se medesimi, sia colle formidabili temporarie loro invasioni, sia col lento operare continuo, mietono o rendono grame a migliaja le vite; e col distruggere o gli uomini, o gli animali, onde gli uomini traggono il principale sostegno, o le piante che di questi e di quelli formano il nutrimento, divengono i più tremendi flagelli. Enti sì perniciosi meritan d'essere studiati nel miglior modo, nel modo che giunga a conoscerli; che fondato sopra retti naturali principj, dando luogo a legittime naturali conseguenze, ammetta un ragionar sodo e coerente, sbandito tutto il supposto, il quale, avendo solamente appoggio nell' immaginario e figlio essendo dell' apparenza, non fa che sempre più allontanare dal vero.

2. I contagi, come sa ognuno, sono certe cagioni d' infermità che si riproducono sempre le stesse, e ponno passare dall' uno all' altro individuo, come dall' una all' altra mano si trasmette un novo o dall' uno all' altro campo una semente, che pur contengono la ragione di cose le quali sempre si riproducon le stesse. Intorno alla loro natura ed origine varie supposizioni si fecero, che noi verremo qui brevemente accennando.

3. Avvisarono alcuni, che i contagi fossero figli della putrefazione. E quinci le esalazioni palustri, quelle de' luoghi chiusi poco ventilati contenenti sostanze escrementiccie o molti individui massimamente ammalati, quelle de' cadaveri in dissoluzione, e certe corruzioni di atmosfera ne furono accagionate. La quale idea può esser nata sì dal vedersi alle volte in simili circostanze sviluppare de' morbi che prendono molti ad un tempo, sì da una cotale apparente cognazione tra il putridume e il contagio accompagnato da sucide espulsioni, da morti e pronti corrompimenti. Ma considerata un po' attentamente, essa non si appoggia a verun fatto positivo; nè havvi altra cosa simile provata in natura, da cui possa partire soda induzione, non conoscendosi che dalla mera putrefazione tragga nascimento verun ente capace di riprodursi ed essere comunicato. E mancando quinci quest'opinione di competente natural appoggio, non ha nè men ciò che aver dovrebbe qual buona ipotesi, e cade interamente da se medesima.

4. Altri avvisarono che non v'abbia punto contagio morto; ma che il contagio sia sempre il prodotto della vita, l'effetto di un processo chimico-animale dell'organismo vivente posto in certe sinistre circostanze. Il quale avviso adottato da personaggi gravissimi e sostenuto con molto ingegno, non è privo di certa seducente apparenza; poiche in malati per incognite cause si vede sovente svilupparsi de' morbi che poi si trasmettono, vale a dire veri contagi. Ma rimirando più là, si discerne, che non vi essendo altri provati esempi in natura, che ammalati ossia disordinati organismi dieno origine a cose capaci di poi rigenerarsi e trasmettersi; nè la ragione potendo agevolmente comprendere come da tal disordine esse cose si possan formare; manca pur qui il natural convenevole appoggio, restando l' ipotesi una pura immaginazione.

5. Fu eziandio pensamento che i contagi non fossero altrimenti che veleni, onde il nome di *virus* alla sostanza loro infettante. Ed in fatti dall' un canto molta somiglianza ravvisasi fra gli uni e gli altri, sia nell' affligger alcuni un organo

od un sistema piuttosto che l' altro, o nell' operare in una specie d' animali e non nell' altra; sia ne' sintomi, e nella guisa di cagionare la morte; ond' è che in molte contagioni le accuse di avvelenamenti sempre vennero in campo, cominciando dalla peste di Atene e progredendo fino all' invasione dell' asiatico morbo che noi stessi vedemmo; al cui sopraggiugnere ne' varj luoghi si credeano dal volgo attossicati i pozzi, le fonti, le altre bevande ed i cibi. Ma dall'altro canto la somiglianza svanisce allorchè stringasi la comparazione; perciocchè i veleni propriamente detti operano sempre in proporzione della lor quantità, e i contagi anche nella più minima possono dare un pieno effetto: i veleni cominciano ad operare appena introdotti nell' organismo, e i contagi vi possono restar anche per lungo tempo affatto inerti, e produrre l' effetto quando o dovrebbero essere stati distrutti ed eliminati dal vivo organismo, od esser dovrebbe molto scemata dall' abitudine la sua sensibilità per essi. E finalmente i veleni non hanno punto la facoltà di riprodursi e moltiplicarsi, la quale è tanto propria de' contagi. Sicchè manca pur qui la vera ed essenziale somiglianza, su cui poter fondare valevole ipotesi.

6. Più seducente dell' ora detta sembra a prima giunta l' opinione che i contagi adoperino come il lievito delle fermentazioni; il quale applicato ad un' acconcia materia, le comunica la condizione stessa in cui egli si trova, e nelle debite circostanze produce pure altro lievito, come appunto il *virus* contagioso che, introdotto nella macchina, vi eccita morbo simile a quello onde provenne, generando anche altro *virus*. E questa opinione torna ancor più seducente trattata, come vedesi dall' acuto ingegno del celebre Liebig. Ma lasciando da parte il ricercare se nella macchina mentr' è vivente, nel sangue od altro umor circolante in essa, possano succedere vere fermentazioni, come nella morta materia tutta in balìa delle chimiche affinità: lasciando da parte il ricercare se tanti diversi lieviti e tante fatte di fermentazioni si possano dare,

quanti sono i differenti contagi degli esseri organizzati, osserviamo soltanto in primo luogo che il lievito è un corpo in iscomposizione, che imprime alle sostanze, in cui mettesi, tale sua condizione, tale suo moto; e trovandosi in atto di scomposizione, non può durare che pochissimo in tale stato: laddove i germi contagiosi durar ponno effettivi anche lunghissima pezza. Oltracciò il lievito vuole sempre essere proporzionato alla massa da fermentare; s' è scarso, non ne fermenta che la relativa porzione: e de' contagi, all' incontro, come fu detto dianzi, anche il più minimo atomo può bastare a compiere l' intero effetto. Senza di che, siccome fermentando la sostanza trasmutasi, e nuovo lievito si va formando, dovrebbonsi e trasmutare i fluidi animali e vegetabili, e non cessare la fermentazione finchè tutti non fossero trasmutati: la qual cosa non vedesi punto succedere ne' contagi. Il perchè nè men qui si trova la somiglianza essenziale, su cui ragionevole ipotesi poter fondare.

7. Molto analogo al precedente è il pensamento di quelli che dicono avvenir del contagio come d' un frutto marcio, il quale comunica l' infezione a tutti quelli cui tocca, allorchè sieno ben maturi; pensamento che pur non manca di sedurre alquanto a primo aspetto. Ma quand' anche pur fosse vero che il frutto sano col solo toccar il marcio si corrompesse, come quella del frutto non è che una putrida fermentazione, una materia in iscomposizione, che trasmette ad altro già preparatovi lo stesso suo movimento, la stessa sua condizione; vi sono pur qui le difficoltà sopraddette per la fermentazione. Ed oltre a ciò qui v' ha quella assai grande, che se ne' contagi si procedesse come pel frutto marcio, siccome in questo la corruzione va passando sempre gradatamente alla parte vicina, così sempre alla parte vicina passar dovrebbe il guasto contagioso. Nel vajuolo, per esempio, tutto sarebbe una pustola continuata senza veruno spazio intermedio noto; e la parte ultima ad ammorbare sarebbe ognora la più distante dal primo punto infettato. Siamo dunque ben lungi anche qui dall' avere ciò che a sana ipotesi si compete.

8. Come approssimando la fiamma a corpo che sia combustibile, la scintilla alla polvere, altra fiamma si accende, ed appiccasi il fuoco atto a trasmettersi in fin che trovi alimento; così fu immaginato potere addivenir de' contagi che pure si appiccano e si trasmettono. La somiglianza del contagio col fuoco regge benissimo in questo che si può vigilare perchè nè l' uno nè l' altro si appicchi; si ponno entrambi agevolmente estinguere finchè sono ristretti in brevi limiti, e difficile od impossibile torna il dominarli quando abbiano preso ampiamente piede; ponno esser entrambi devastatori; entrambi estendersi quinci e quindi secondo li porta la opportuna comunicazione, e durar fino a tanto che trovino pronti da invadere nuovi oggetti capaci di porger loro alimento: in tutto questo può l' uno all' altro venire paragonato. Ma dove discendasi a particolari caratteri, ben grande ne risulta la differenza. Unico è il fuoco e tutto incende ugualmente ciò che n' è suscettivo; e pressochè indefinito si è il numero degli speciali contagi che han tutti, per un rispetto o per l' altro, diverso procedimento: ed in oltre il fuoco non fa che distruggere senza rigenerare, e i contagi si rigenerano sempre e si moltiplicano: il fuoco brucia tostochè appiccato, e i contagi ponno rimanersene inerti dentro l'organismo anche per tempo assai lungo. Laonde nè meno qui si ritrova il fondamento di buona ipotesi.

9. Fuvvi pure chi volle che la contagion provenisse da uno speciale corpo gazoso, che alcuni credettero esser un ossido di azoto, il quale spiegasse l'azione sua deleteria sull'organismo vivente. La qual idea sarà forse nata dal vedere come assai corpi coll'unirsi all'ossigene divengono più o meno venefici. Ma oltre quello che detto abbiamo pe'veleni (N°. 5); oltre l' accennato pur dianzi, che tanti essendo gli speciali contagi che sopra i varj esseri organici operan diversamente, non si può ad essi assegnare un principio comune, deesi aggiungere in riguardo di questa opinione, che anche meramente supposto è il detto corpo malefico, non essendosene punto

dimostrata l'esistenza. Sicchè tale ipotesi è pure senza il dovuto sostegno.

10. Che che dir si possa contro ciò che abbiam qui toccato così di fuga, ci sembra che resti però sempre fermo il principale, che cioè le addotte ipotesi per l'uno o per l'altro motivo manchino di quel saldo appoggio su cui piantare buon argomento: poichè, trattandosi di cose naturali, è lecito di ragionare soltanto dietro la scorta di ciò che realmente esiste, di ciò che realmente succede in natura, cioè secondo le leggi di natura ben conosciute; e non si può nulla supporre che ad esse non sia conforme; altrimenti si va nell' immaginario e nello strano, e si risica di sempre più allontanarsi dalla verità, e distoglierne l' altrui attenzione.

11. Ma quale sarà dunque nel caso nostro la via sicura da battere? Quella che suolsi allorchè si brama imparar qualche cosa, cioè quella di passare gradatamente dal noto all'ignoto, ed in guisa, che il conosciuto di mano in mano serva di lume a quello che ancora non si conosce. I contagi sono esseri naturali, dunque deono diportarsi naturalmente. I contagi sono esseri che si riproducono sempre gli stessi: dunque per essi vuolsi prendere norma dagli altri esseri naturali noti consimili, che si riproducono sempre i medesimi. Dunque la dottrina de' contagi debbe avere il suo fondamento nella Storia naturale; dunque ad aver luce per essi vuolsi considerare il procedimento usato dalla natura per gli altri esseri che si vanno successivamente rigenerando, e massime per li più minuti, ai quali i contagi appartengono. Del quale procedimento non dispiacerà di veder qui per ciò breve cenno in quanto risguarda il nostro proposito.

Cenno sul procedimento di natura pe' germi cogniti.

12. Quell' infinita Sapienza, la quale si piacque di arricchire il nostro globo di tante fatte di esseri peculiari, che difficile impresa è solo tesserne il novero compiutamente, a

perpetuarne la durazione malgrado le continue distruzioni e le morti, non volendo che al successivo rifacimento alcun potere si avesse il cieco accidente, il quale in breve tutto avrebbe sconvolto e mutato, affidò intero il gran magisterio ad agenti certi e sicuri, i quali adoperassero sempre con precise invariabili norme. Ond' è che per gli enti i quali propriamente si formano dipendendo, come suol dirsi, da leggi fisiche e chimiche, detti *inorganici*, potenziò le minime particelle delle varie materie di tali singolari tendenze scambievoli da potersi congiungere, se fra se stesse, ognora in quelle forme determinate; e se con altre, anche soltanto in quel dato numero, e in quelle quantità stabilite: sicchè deono sempre necessariamente venirne corpi composti degli stessi elementi, e uniti o combinati nella stessa guisa e nelle medesime proporzioni.

13. E per gli esseri i quali propriamente nascono e dipendono da leggi vitali, chiamati *organici*, si commise il gelosissimo affare della perenne rigenerazione a germi specifici, dai quali, come da proprio progenitore, ognuno avesse per linea retta a discendere. Laonde l' uomo ebbe sempre a provenire dall' uomo, e furono grosse favole quelle che ne venisse pure talvolta dalle pietre e dalle formiche. Parimenti la vite non venne che dalla vite. E il medesimo è a dire degli altri animali e delle altre piante, ossia di tutti quegli esseri, i quali sempre si riproducono identici.

14. Siffatto provvedimento saggissimo di Natura fu dall' uomo, rispetto agli esseri che più lo colpivano, o per quelli che lo risguardavano più da vicino, avvertito fin da principio: ma per gli altri ei non vi pose troppo mente, se non quando in lui sorse il vero spirito indagatore dei naturali fenomeni. Ebbe egli allora a discernere che i vermi e gl' insetti non nascono dalla putredine o il loglio dal frumento. E scorgendo evidentemente i germi di tutte le specie che gli han visibili, all'affacciarsegli poi quinci o quindi nuovi individui, anzi che fantasticare sul come potesse quel luogo averli ingenerati, stimò doversi tenere per indubitato che da proprio lor germe anch' essi venissero, ivi recato quando o come si fosse.

15. Ma per le cose i cui germi all'occhio non apparivano, e che pure si riproducono sempre le stesse, come le muffe e le altre di simil taglia, benchè l'analogia in questo fatto accumunar le potesse alle altre, durava ciò non per tanto la persuasione o almeu la dubbiezza, che dall'umidore o da qualche altro accidentale agente si generassero, e il solo uso de' microscopj giunse a mettere poscia la cosa in piena luce. Nè solamente con tale soccorso conobbesi che anche esseri sì minuti da proprio germe sempre veniano; ma si discoperse pur lunga serie di altri molto più piccoli, e che venivano anch'essi costantemente da germe lor proprio. Anzi siccome le cose che sono più esili, più agevolmente confondonsi e si disperdono, e il serbarle ognora distinte maggior cura domanda; si vide che per mantenere pura e costante la successione di queste, il saggio provvedimento, a così dire, tornava ancor più necessario; e s'intese perchè a lor riguardo altre precauzioni si fossero pur usate, siccome quella di farne i germi assai duraturi, per cui ponno attender intatti il tempo propizio al loro sviluppo; e quella altresì di renderli copiosissimi; onde riesce impossibile che tutti vadano a male e rimangano inefficaci.

16. Quanto alla durazione sappiamo poter la vita in varj germi restar sospesa per tempo lunghissimo. Così, esempigrazia, la segala ebbe a germogliare fin dopo 140 anni (1); così atterrandosi antichi monumenti vidersi non di rado sorgere piante straniere ai terreni vicini, le cui ragioni erano ivi rimaste oppresse ed occulte (2); e sementi diseppellite con iscavi da luoghi in cui giaceano da secoli, si videro pur germogliare. Così una pietra, della quale non è dato assegnare l'origine, anche a' dì nostri pose in vista de' funghi, i cui semi in se accolse fin dalla sua formazione (3). Il che in

---

(1) Pollini. Elementi di Botanica. Tomo 1°, pag. 77.

(2) Id. pag 82-83

(3) Gallizioli. Elementi Botanico-Agrarj. Tomo 3°, pag. 522-523.

qualche guisa ci dice, che tali germi sono per se stessi quasi inestinguibili, purchè si avvengano in luogo acconcio alla loro conservazione; e che periscono o muojono solo per estrinseca forza, vale a dir per violenze od ingiurie che lor si facciano.

17. Contro alle quali violenze od ingiurie molti sono anche assai premuniti, potendo altri resistere a calore fortissimo e alla medesima bollitura, come quei delle muffe (1), e di parecchi infusorj (2); altri affrontare la stessa azion digestiva, e non che illesi, più atti uscirne e più pronti a svilupparsi (3); altri avere difesa nella estrema lor picciolezza, essendo cento e cento volte più minuti della più fina visibil polvere; e non mancando nè men di quegli esseri, come infusorj (4), ed alghe (5); che dopo lungo disseccamento riprendono vita al ricomparire del fluido propizio.

18. Per ciò che spetta alla copia de' germi, non solo è malagevole calcolare quanti possa fornirne un individuo in sua vita, ma spesso eziandio quello che può in una volta. E lasciando di rammentare quale mai v' abbia d' nova abbondanza in femine d' insetti e di pesci, quanto non è egli difficile numerare gli acini che dà una vite feconda in una vendemmia, e i granelli di una pianta di fico, o quelli d' un gelso. Nè anche i semi d'un raperonzolo o d'un *orchis morio* si furono bene potuti contare (6). E molto meno è possibile di ridurre a novero quelli del più delle crittogame, e di que' funghi massimamente che appellansi *gastronomici*, come i licoperdi, i quali risultano pressochè per intero da un sacco ripieno di esilissima polvere, che serve lor di semente. Direbbesi che qui venga meno la stessa immaginazione.

(1) Pollini. Op. cit. T. 2°, pag. 410-411.

(2) Pino. Elem. di Storia Naturale. Pag. 390-391.

(3) Sullo stato in cui entrano e si mantengono i germi contagiosi nell' essere organizzato. — Nota inserita nel 2° Volume delle Memorie del Veneto Istituto.

(4) Pino; luogo citato. Blumenbach, Manuel d' Histoire Naturelle. T. 2°, p. 4, 98.

(5) Meneghini. Organografia delle Alghe. Padova, 1838.

(6) Gallizioli. Op. cit. T. 1°, pag. 189.

19. Ed egli è pur a notare che moltissime generazioni, principalmente delle più minute, alla straordinaria copia de' germi congiungono prontissima riproduzione, essendo in istato di procreare quasi tosto dopo il loro sollecito nascimento. Così, per esempio fu computato che alcune parassite dannose alle piante si rigenerassero compiutamente in non più di 24 ore, un sol granello producendone 250 milioni (1). Anche la botrite del *calcino* de' filugelli alla immensa quantità di sementi unisce una facoltà riproduttiva assai rapida.

20. Ma tale essendo la copia de' germi, onde Natura si piacque arricchir suoi viventi, e sì celere la riproduzion di parecchi, egli è aperto che se avesse ognuno a prendere compiuto sviluppamento, non andrebbe guari che solo una specie riempir potrebbe tutta l' acqua, ed una tutta la terra; e quindi ad oppressione e sterminio di ogni altra, le sole due prepotenti dominerebbero l' intero globo, e finalmente non avrebbero nè anche più spazio pe' loro stessi individui. A mantener tra le specie la proporzione stabilita, il conveniente equilibrio, noi veggiamo che forse de' germi in complesso nè meno uno delle dieci migliaja effettivamente è produttivo. Ed in vero delle tante sementi che ogni anno porta un vegetabil selvaggio, poguam caso una quercia, benchè altrettanti punti vi sieno di suolo capaci a riceverle e dare loro sviluppo, o poche o nissuna sorger si vede in pianta novella.

21. E questo addiviene perchè all' effettiva rigenerazione due cose abbisognano, vale a dire la causa efficiente ch' è il germe proprio e l' acconcia opportunità, ossia il concorso di circostanze valevoli a dargli sviluppamento. L' una di queste cose mai non può far senza l' altra, e l' effetto necessariamente dipende sempre dall' unione di entrambe. Così, verbigrazia, se è vero che non si può avere la messe del frumento senza del seme, egli è vero non meno che il seme solo non basta

(1) Mémorial Encyclopedique et progressif des connaissances humaines. Juillet. 1834, pag. 197.

per darla; ma vuolsi quell'accozzamento di requisiti di suolo, di umidore, d'aria, di luce, di calore e siffatti, che al suo sviluppo e prospero germogliamento sono idonei e sufficienti.

22. Le opportunità ossia circostanze richieste allo sviluppo de' germi, da noi toccate in altro lavoro (1) possono variare moltissimo secondo la specie di questi, come ben conoscono in parte i Naturalisti. Conoscon essi, per cagion d'esempio, con quale industria ed insistenza le femine degl' insetti cerchino insinuare lor uova nel luogo peculiarmente adattato al nascere e prosperar della prole. Conoscono essi che non solo ogni specie di pianta può avere diversa fatta di parassito, ma che spesso anche le parti di essa ne ponno avere di proprj. Conoscono pure che i lor parassiti han le diverse generazioni d'animali, e che non solamente ponno questi variare da specie a specie, ma eziandio secondo l'organo, e secondo la parte di questo, secondo l'età, secondo lo stato o condizione in cui trovasi l'animale o l'organo stesso. Alla sola unione delle quali contingenze, e di tant' altre anche ignote, sta legato lo sviluppo di cotai germi.

23. E siccome per lo pieno concorso di tutte le particolarità requisite per ciascun germe può questo avere il suo compiuto sviluppamento, noi veggiamo per un lato che l'uomo col promuovere od impedir questo concorso, ove ciò sia in poter suo, agevola pure o diminuisce la produzione degli esseri utili ad esso o dannosi; e intendiamo per l'altro come, favorendosi il detto concorso alle volte anche naturalmente, alcuni esseri si moltiplichino in sì prodigiosa maniera, da recare, benchè piccoli o minimi, noja grave o sterminio ad altri più principali. Generalmente però la detta riunione di requisiti indispensabili allo sviluppo de' germi è, come si toccò pur dianzi (N°. 20, 21) nell' ordine naturale difficilissima.

24. Ma quantunque i mezzi stabiliti per la riproduzione sì raro in proporzione de' casi producan l'effetto, è però

(1) Sulla disposizione ai mali contagiosi; Cenno inserito nel 2° Vol. delle Memorie del Veneto Istituto.

indubitato che quando l' effetto producesi viene sempre da essi. Così, per usare dell' esempio citato, la quercia viene sempre da quercia, benchè sieno proporzionalmente sì poche le quercie che dai moltissimi frutti di una selvaggia, abbandonata a se medesima, si sviluppano. E molto errato n' andrebbe, e non ragionerebbe punto naturalmente chi, osservando come tante ghiande vadano a vôto, dicesse che dunque non sono le ghiande che producon la quercia. Nè più al vero si apporrebbe quegli che, udendo come la quercia abbia talvolta prodotto quercinole con sue sementi e talvolta con queste sementi non ne abbia prodotto, avesse a dire che la cosa dunque rimane in dubbio, essendovi ragioni per una parte e per l'altra, e che a metterla in chiaro voglionsi ripetere acconciamente le osservazioni; perciocchè tornar potrebbero queste, come le prime, alcune in favore e molte contrarie; e non sarebbe per ciò meno certo che la quercia sempre vien dalla quercia: il vero essendo che la via de' germi è la sola per cui si ottenga riproduzione; e che si ottiene questa soltanto quando vi si combinino tutte le opportunità ricercate; e che la frequenza o rarità dell'effetto è unicamente dovuta alla più o meno frequente combinazione delle medesime opportunità.

25. Nel procedere di Natura qui brevemente ricordato per gli esseri conosciuti che si riproducono sempre gli stessi, può aversi un ragionevole natural fondamento, onde argomentare per giusta analogia eziandio pe' contagi, che pure si riproducono sempre i medesimi; e dietro tal guida è dato scorgere la sconvenevolezza di tanti ragionari per essi comunemente usitati, alcuni de' quali noi qui toccheremo, lasciando ad altri, o per altro luogo, un esame più attento e minuto.

26. I fautori de' contagi spontanei a sostegno inconcusso di loro opinione sogliono dire che, come i contagi si formarono la prima volta, si potranno formare ancora, che quelle circostanze che una volta hanno ad essi dato origine, potranno darla anche adesso. E non s'accorgono che il medesimo si può egualmente ripetere per tutti gli altri esseri che si riproducono

sempre gli stessi: *come si formarono la prima volta si potran formare anche al presente.* Ma il fatto sta, che tutti gli altri esseri noti la prima volta si fecero come e quando piacque al Creatore, e poi si sono sempre riprodotti per mezzo di quel loro germe; nè sappiamo di alcuno, che la Natura ne lasci ad ogni tratto perir il germe per ricrearlo poi di bel nuovo. E molto meno sarebbe presumibile che sempre identico lo ricreasse in circostanze tanto svariate ed opposte, quali son quelle in cui si veggono apparir i contagi, e che per ciò furono anche, senza pensare più là, attribuite loro per cause. Il supporre adunque spontanei contagi non è ragionare naturalmente; è anzi un andar contro ad una delle più universali e più conosciute leggi della Natura. Per ammettere tale spontaneità, converrebbe prima con fatti certi, precisi, moltiplicati e uniformi mostrar chiaramente, come pe' contagi la Natura siasi piaciuta cangiar tenore, tener altro modo. Ma fino che cio non si faccia, tale ammissione sarà sempre appoggiata alla mera fallace apparenza, e rifiutata da chi ama ragionare sopra sodo natural fondamento.

27. A mera apparenza si appoggia eziandio chi vedendo insorgere quinci o quindi un contagio senza poter discoprire come siavisi portato il germe, lo crede senza più ivi formato; come alla semplice apparenza appoggerebbesi, nè ragionerebbe secondo le naturali cognizioni chi, scorgendo nuova pianta in un luogo, andasse fantasticando sul modo in cui avesse potuto formarvisi, e non ammettesse che vi si debba esser recato come o quando si fosse lo specifico germe (N°. 14.).

28. Ed è pur senza natural fondamento il credere che un contagio si muti in altro di essenza affatto diverso; poichè gli esseri naturali ponno benissimo alle volte prendere certa differenza di forma o di aspetto, ma non è provato di alcuno che in altro si cambii: e si trovò falso che il frumento degenerasse in loglio, o il riso in panicastrella come si pretendeva da taluni appoggiati anche a sperimenti. Il che mostra come gli sperimenti, che portano a risultati contrarj al praticato

generalmente dalla Natura, sieno sempre sospetti d' inesattezza e di fallacia.

29. Come veduto una volta che il mandorlo viene dal mandorlo, o il colombo dall' uovo, anche vedendo altri mandorli, altri colombi, si ritien fermamente che da mandorli, che da uova provengano, benchè la provenienza di questi non siasi veduta; così provato una volta che il contagio è contagio, cioè cosa comunicabile, e quinci viene da quello specifico germe, non è lecito, secondo i naturali dettami, assegnargli altre cagioni. Chi ragiona per tanto naturalmente non può attribuir varie cause efficienti ad un contagio; poichè degli esseri cogniti, che si riproducono ognora gli stessi, la sola causa efficiente è sempre il proprio germe.

30. E avendo noi osservato come germi naturali conosciuti possano durare moltissimo attendendo intatti ed inerti le opportunità del loro sviluppo (N°. 16, 17), si vede che non ragionano secondo natura quelli, che negano le lunghe delitescenze, specialmente di quei contagi che da tutti si ammette averla indeterminata, come l' idrofobia: imperciocchè se è indeterminata, se dipende quinci dal presentarsi delle circostanze opportune allo sviluppo, egli è chiaro che queste ponno tardare più o meno. Nè vale il dire che a lungo andar l' organismo dovrebbe distruggere tali germi infettivi; poichè i veri germi, che, sebbene assopiti, pure han vita, dall' organismo vivente non si distruggono (N°. 41), come abbiamo estesamente provato in altro lavoro (1).

31. Come a render effettivi i germi vuolsi il pieno concorso di tutte le circostanze richieste (N°. 20-23), onde avviene che mancando esso concorso tanti germi se ne rimangono senza effetto; così non ragionerebbe naturalmente chi, vedendo molti individui andar a tiro di prender un male senza prenderlo, volesse inferirne che non è contagioso. Per essere contagioso basta che si comunichi ad alcuno; e verificatasi

(1) Vedi la Nota 3ª, a pag. 231.

bene una volta la comunicazione, egli è tale per quanto i casi effettivi sieno rari in paragon dei possibili, come non cessa di venir sempre da specifico germe la quercia, sebbene un numero sì sterminato di ghiande di una selvaggia, abbandonata a se medesima, non producano nuovo germoglio (N°. 20.).

32. Un somigliante argomento vale per quelli che, vedendo tornar vane le inoculazioni di certi mali, ne rifiutano la contagione; poichè quando pur fosse necessario che un male per essere contagioso dovesse anche potersi inoculare, affinchè gl' innesti riescano molti requisiti richieggonsi e per la materia infettiva, e pel soggetto, e pel tempo e pel modo in cui praticarli; requisiti per lo più eziandio sconosciuti in opera di contagioni, per cui dee succedere che, più del consiglio, l' esito si trovi in balìa della sorte; e che possa anche uno sperimentatore ottenere ne' primi suoi tentativi ciò che l' altro non ottenne in tutta sua vita. Il quale non ragionerebbe quinci naturalmente se dai negativi suoi risultati volesse trar conclusione.

33. In altre materie essendovi fatti per l' una parte e per l'altra, prudenza vuole che si sospenda l'assenso, lasciando la cosa in dubbio finchè altri fatti uniformi e costanti l' abbian chiarita. Ma rispetto ai contagi un tal ragionare, ch' è pur sì frequente, può essere al tutto fallace. Qui provano i soli fatti positivi, e i negativi per numerosi che sieno non provan nulla, essendo già proprio dello stesso naturale procedimento il produrre l' effetto ora sì ed ora no (N°. 24); e pretende cosa contro natura chi vuole in ciò costanza di effetto. Così, per esempio, se vi son fatti che il mangiar cose provenienti da idrofobi animali comunicò l' idrofobia, egli è certo che il mangiar tali cose può comunicarla; e contro questa possibilità nulla valgono i negativi in cui il mangiar di esse cose non l'ebbe a comunicare. Così parimenti se vi son fatti che l' idrofobia ricevuta da un altro individuo si trasmise ad un terzo, egli è indubitato potersi trasmettere l' idrofobia ricevuta; e contro tale possibilità nulla provano i fatti negativi

in cui la trasmissione non avvenne. I fatti negativi, col loro numero in confronto dei positivi, potranno soltanto mostrare la maggior o minore probabilità od improbabilità del successo, ma non mai l'impossibilità sua. A mostrar questa dovrebbonsi pria confutare i casi positivi; ma finchè ciò non si faccia, la certezza della possibilità sempre rimane intatta.

34. E in proposito di tale confutazione osserviamo, non esser lecito a buon ragionatore l'addurre il pro ed il contro, ed appigliarsi poi all' uno senza ribattere l' altro; e molto meno è lecito il ribattere fatti asseriti da personaggi autorevoli di várj tempi e nazioni, torcendoli ad altra applicazione e sostituendovi supposizioni e mere congetture. Questo ragionare che si vede frequente massime a' giorni nostri per sostenere nuove dottrine rispetto a certi contagi, non solo non è ragionare naturalmente, ma nè anche logicamente.

35. E affinchè il ragionare torni logico e naturale, vuolsi pure considerar il contagio non in solo qualche particolare, ma sì bene in tutto il suo generale procedimento nelle varie circostanze, ne' varj luoghi, ne' varj tempi. Nè ad acquistare esatta e piena cognizione basta osservare questo o quel contagio individualmente, ma deesi con attenzione esaminare il complessivo andamento di tutti e quei molti che assalgono l' uomo, e quei moltissimi degli animali, e quelli eziandio delle piante; poichè l'un punto può servire di luce all'altro, e la vera scienza mai non si genera da singole idee distaccate; ma bensì dalla concatenazione e convenienza di tutte quelle che ad un tale oggetto appartengono.

36. Mostrato per così dire *a priori*, che il ragionar sui contagi deesi fondare sul procedere de' consimili esseri naturali già conosciuti, rifiutando tutte le ipotesi immaginate, e le opinioni che a tal procedere non si affanno; a rinforzar l' argomento si può mostrar anche *a posteriori* la somiglianza che passa effettivamente fra i contagi e gli altri esseri soprammentovati. Nel che fare però non intendiamo discendere nè a tutte, nè alle più minime particolarità di confronto, ma soltanto accennare così in generale alcuni de' punti più principali.

Somiglianza fra gli altri germi naturali e i contagi.

37. Gli altri germi si riproducono sempre essenzialmente i medesimi in guisa da formare unità non interrotta di specie, prescindendo da quelle svariate accidentali modificazioni che da parecchi motivi ponno dipendere. E così anche i contagi si riproducono sempre essenzialmente gli stessi formando propria special successione, prescindendo pure da quelle modificazioni che possono accadere per molte cause che non importa qui di accennare.

38. Gli altri germi ponno essere trasportati da luogo a luogo; il qual trasporto rendendo a un luogo comuni le produzioni che sarebbero proprie dell' altro, accumula in varj paesi le ricchezze che nelle varie parti del mondo resterebbero naturalmente divise. E parimenti i contagi si possono trasportare in varj paesi, rendendo con tale traslazione a varj paesi comuni que' mali che sarebbero stati proprj solamente di alcuni.

39. L' epoca del trasporto di altri germi in varie parti del mondo, ossia della loro introduzione in esse, è manifesta già dalle storie, che ce ne indicano anche talor la persona, onde l' introduzione si fece. E l' epoca dell' introduzion de' contagi in parecchi luoghi ci è pur conosciuta, come vedesi massimamente dalle cronache rispettive, e da chi ebbe a trattarne *ex professo*, additandocene alle volte anche il mezzo preciso.

40. Altri germi possono essere, anzi sono effettivamente in generale, trasportati senza che allignino su chi li porta, e senza quinci offenderlo punto per tal rispetto. Ed anche i contagi ponno essere trasportati e comunicati da chi non è da essi attaccato; per cui ci avverte anche il Sig. Brera (1), che i medici, i chirurghi e gl' infermieri sono mezzi di lor

(1) De' contagi; T. 1°, pag. 119.

diffusione. E non è già che in questo caso si avveri il contrario di quel detto *nemo dat quod non habet*, perciocchè si ha realmente il malefico seme che si ricevette, e si dà esso, e non la malattia.

41. Certe specie di esseri conosciuti, recati in altri paesi, crescono di vigore o di forme, trovandovi opportunità al loro prosperare più adatte: il majale, per esempio, condotto a Cuba, vi acquistò una grandezza assai maggiore. E non diversamente varj contagi coll' uscire del luogo nativo, in cui la natura avealì acconciati e posti in relazione col resto, e in cui sono talor forse anche inosservati o come ordinarie malattie endemiche, acquistano forza e fierezza, e si diportan più o meno da flagelli distruggitori.

42. Alcuni germi dopo aver fatto nel luogo d' introduzione un vivo sfoggio, ed avervi provato a meraviglia, vengono meno e non ponno durarvi bene; ed altri in vece vi si vanno adattando, e di forestieri diventano terrazzani. E il medesimo è de' contagi; alcuni de' quali dopo aver infierito, cessano quasi da se medesimi; ed altri vi persistono sempre anche dopo.

43. Restando nel luogo novello parecchi germi van perdendo delle virtù loro native. L' oppio, esempigrazia, che viene fra noi, è assai più debole di quello che viene dallo stesso papavero in Turchia, e le fiere che si moltiplicano in ischiavitù, colla successione delle generazioni si vanno ammansando. E del pari avviene di molti contagi, che nel luogo in cui si naturalizzano, sia per le successive trasmissioni, sia per circostanze locali, scemano di lor vigore o fierezza.

44. E le due proprietà suddette di acquistar nuova forza col mutare di luogo, e scemarla poi rimanendo nel luogo stesso, manifeste si veggono in que' contagi, come la peste umana, il colera, la febbre ungarica bovina ecc., i quali all' entrare in un paese uccidono quasi tutti quegl' individui che assalgono, indi scemano a poco a poco le vittime: ma trasportati in luogo novello riprendono il primo furore per poscia ammansarlo, e così progrediscono sempre serbando egual tenore.

45. Avvi de' germi, come di locuste, d' altri insetti distruggitori di selve, di prati o campagne, che, fatta una grande irruzione, alle volte scompajono a un punto, sia che termini il giro stabilito per allora di loro riproduzione, o manchi l' alimento sostenitore, od improvvisa circostanza gli uccida. E non altrimenti occorre di varj contagi, che, fatta quinci o quindi una scorrería più o meno lunga e letale, si veggono quasi a un tratto sparire, sia che l' una o l' altra delle cose ora dette qui pure abbia luogo, o manchi per avventura il pronto mezzo di comunicazione, quello nel quale possono allignare e svilupparsi; in che propriamente dimora la vita del contagio.

46. Certi esseri naturali, dalla natura stessa o dall' uomo, ponno in tutto o in qualche luogo distruggersi. E tacendo i tanti che si trovano fossili ed or più non vivono sopra terra, a ricordare sparizioni non troppo lontane citiamo il *cervus evryceros* che il Signor Prof. Catullo trovò che vivesse alcuni secoli sono (1); il *Didus ineptus* che il Sig. Blumenbach ci avverte aver vissuto a' tempi andati nell' Isola di Francia (2). E rammentiamo eziandio collo stesso Blumenbach qualmente in alcuni luoghi si sterminarono i passeri; e col medesimo e con altri pur ricordiamo che fu appieno distrutta la razza de' lupi in Inghilterra ed in Irlanda. Ed egualmente i contagi, dalla natura, o dall' uomo che il voglia da vero, si ponno in tutto o almeno in qualche luogo cessare, come si pratica spesso per le epizoozie, ed anche talvolta per certe epidemie. E in questo proposito si può allegar eziandio lo spegnimento della malattia detta *gemursa* che nasceva tra le dita de' piedi o sotto il mignolo, facendo gemere per lo dolore; e di quella specie di risipola maligna nomata *fuoco sacro, fuoco S. Antonio, o mal degli ardenti*, che menò altre volte tanta devastazione nelle Gallie; e del *sudor anglico o febbre sudatoria*,

(1) Terreni alluviali delle Provincie Venete. Padova, 1841.

(2) Manuel d' Histoire Naturelle. T. 1°. p. 256. 185. 122.

che in un certo periodo di tempo fece sentire sì spesso il suo furore all' Inghilterra (1).

47. Siccome alcuni germi han piccola durazione, e se non si riproducano od entrino nel mezzo loro appropriato appena maturati, periscono; in modo eguale molti contagi tosto si distruggono ove pronto non trovino il mezzo di riprodursi, l' acconcio che gli accolga per poi dar loro sviluppamento. E quinci pure veggiamo che il *pus* vajoloso se oltrepassi la sua maturità, diminuisce d' azione: e così anche nella febbre ungarica de' buoi la maggior attività dell' escrezione è sul principio; onde per gl' innesti si sceglie la materia che prima scola dal naso.

48. Ma colla debita riparazione, alcuni germi che altrimenti sarebbero in breve periti, possono anche allungare d'assai la vita loro (N°. 16.). E similmente contagiosi semi che da se stessi in poco tempo sarebbonsi dissipati od estinti, essendo chiusi in luoghi non ventilati, in casse, in sepolcri ec. poterono infettare anche dopo tempo molto considerevole.

49. La resistenza che alla distruzione oppongono i germi è assai varia. Per alcuni basta a guastarli un po' di umidità, di calore aumentato, di freddo sensibile ec.: ed altri la durano all' umido più insistente come alla maggior siccità, a gran calore, o a intensissimo freddo (N°. 17.). E il medesimo è de' contagi; alcuni de' quali, come la peste, par che si estinguano a 60 gradi di Reamur; ed altri resistono anche all' ebullizione, s' è vero che carni cotte comunicarono l' idrofobía e mali carbonchiosi; e che i Missionarj nel Canadà innestassero il vajuolo facendo bere una tazza di brodo, in cui si erano fatte bollire croste di pustole vajolose (2). E variar potendo secondo le specie la resistenza che i germi contagiosi offrono alla distruzione, si vede non essere troppo giusto il

(1) Astruc. Traité des Maladies vénériennes. Tom. 1°. pag. 31. Capuron; Dictionnaire de Médecine etc., alle voci *Gemursa* e *Snette*.

(2) Brera; Op. cit. Tom. 1°, pag. 185-186.

ragionare del Sig. d'Arboval nel suo pregevolissimo *Dictionnaire de Médecine et Chirurgie vétérinaires*, dove parlando del rantolo de' cani, *maladie des chiens*, vorrebbe trar argomento che non sia contagioso da ciò, che dicesi il luogo che ne fu infetto poterlo comunicar anche dopo essersi praticate le solite purgazioni; pretendendo egli quinci che il germe di qualsiasi contagio di qualsivoglia animale si debba estinguere collo stesso mezzo: « *Ce qui est vrai à l'égard d'une maladie dans* « *ce cas ne doit-il pas l'être à l'égard d'une autre dans le* « *même cas, quelque soit d'ailleurs l'éspece d'animal?* »

50. Avvi de' germi che posti in luoghi acconci alla loro conservazione pajono quasi inestinguibili, come altrove fu detto (N°. 16); o ponno almeno avere una durazione indefinita in attenzione delle circostanze proprie al loro sviluppo. E parimenti v' ha de' contagi, come la rabbia, il vajuolo, e può dirsi eziandio la migliare, i cui germi sembra che possano rimanere latenti finchè altro sconcerto, massime infiammatorio, venga a snidargli dai lor ripostigli e destarli a vita.

51. Alcuni esseri si diffondono agevolissimamente, come quei dell'*erigeron canadense*, quei di certi cerastj ec.; da' quali è quinci difficile il garantir i campi: ed altri in vece si propagano a stento, dovendosene prima talvolta anche ammollir il seme nell' acqua, indi piantarlo in quel peculiare terreno, alla tale profondità, nella tale esposizione ec. come le gaggie. Ed egualmente alcuni contagi diffondonsi con somma agevolezza, come il bubonico dell' uomo, il dalmatino od ungarico del bue, ed il cancro volante, da' quali non troppo facile è il preservarsi; ed altri abbisognano di un deciso tocco immediato od innesto, come l' idrofobía e il più de' mali carbonchiosi. Alcuni forse per questa loro difficoltà di propagarsi vanno avanzandosi lentissimamente, impiegando anche anni ed anni per recarsi da una città all' altra, come la migliare che impiegò tanto tempo a venire da Lipsia, e a' nostri giorni la vedemmo con tal lentezza passare da Verona a Vicenza, da questa a Padova, e da Padova finalmente a Venezia.

52. Certi germi si adattano a più climi e stagioni; ed altri sono sì particolari ad alcuni luoghi e tempi, che fuori di essi non saprebbero mostrarsi giammai. E così avvien de' contagi. La peste, per esempio, ha i suoi mesi, in cui, uscendo come par d' Etiopìa, comparisce in Egitto o in altre parti d' Oriente; e la febbre gialla, nata presso del mare, non usa mai allontanarsi gran fatto dalle rive di esso e penetrar entro terra: e così sembra far anche l' ottalmía contagiosa d' Egitto che infestò molti paesi marittimi sull' Adriatico e sul Mediterraneo, nè molto si dilungò dalla spiaggia (1).

53. Parecchi esseri massime parassiti non provano bene che sopra le tali specie di viventi. Così ogni specie d'animali suol avere i proprj pidocchi ed altri insetti: ed alcuni veggonsi sopra più specie, essendo men dilicati sulla scelta dell' alloggio e del cibo. E medesimamente i contagi per lo più sono proprj di questa o di quella specie di viventi; ma avvene anche di quelli, come l' idrofobìa, e de' carbonchiosi, che a molte specie si estendono.

54. Anche ne' particolari organi de' viventi ponno esservi parassiti lor proprj, come la fasciola epatica del fegato massime della pecora, le idatidi del cerebro ec., e le crittogame le quali non allignano che sopra certe parti della pianta, perchè ivi solo aver possono ciò che loro conviene. E del pari avvi contagi più proprj d' un tessuto che dell' altro; la rogna sceglie il dermoidale, la sifilide il linfatico e poi certe parti delle ossa, l' idrofobía il nervoso, la pertosse la pleura ec.

55. La stessa diversa età dell' individuo può portare speciali parassiti. Certe crittogame, per esempio *uredini* e *sferie*, amano la gioventù delle foglie; certi vermi, quella degli animali. E certi altri degli esseri ora detti aman piuttosto l' età avanzata. E del pari avvi contagi più proprj d' un' età che dell' altra. Varie tigne prediligono l' infanzia, la pertosse la gioventù; e così pure il rantolo de' cani, e gli strangoglioni

(1) Bodei. Questioni di Medicina. Milano, 1822. Tom. 2°. pag. 117.

del cavallo. La porrigine amiantacea ama gli uomini adulti; e in quésti è pur tenacissima la forforacea che prende le ciglia e la barba.

56. È proprio di molti germi il non potersi bene trovar insieme con altri, per cui si dice avere tra loro antipatía. Il sano fieno ossia lupinella, per esempio, non prova dove sieno altre erbe. Ed è pur frequente ne'contagi il non poter l'uno allignare ove un altro si trova in azione; il che massimamente addiviene se l' uno e l' altro sien tali da affliggere di preferenza lo stesso organo o lo stesso tessuto.

57. Alcuni germi, come sarebbero quei di una messe, sviluppandonsi abbondantemente in un luogo, vi esauriscono, per così dire, la suscettività per essi, e non vi provano bene di nuovo se non dopo un certo tempo, durante il quale ritorna essa suscettività. E sopra questo fatto specialmente si fonda il sistema delle rotazioni agrarie, che fanno succedere l' uno all' altro prodotto. E il medesimo è di molti contagi, massimamente acuti e febbrili; i quali scemano assai la capacità per essi, almanco per certo tempo, sia col modificare il tessuto rendendolo meno atto ad un novello identico assorbimento; o sia che tutta consumino quell' esca la quale poteva essere loro appropriata: e su questo si fondano le inoculazioni praticate a preservare in qualche guisa, e per qualche tempo da alcuni contagi.

58. I parassiti assalgono indistintamente soggetti deboli e soggetti robusti, come veggiamo tutto giorno tanto rispetto a quelli che affliggono l' uomo, quanto rispetto a quelli degli animali e delle piante. Ed egualmente i contagi attaccano individui d' ogni sorte, operando in essi come straniere materie o potenze nocive *sui generis*, non avendo propriamente per se stessi diatesi alcuna, ma potendosi associare all' una o all'altra di esse secondo portano le circostanze de'casi speciali. E se spesso veggonsi uniti ad un tumulto infiammatorio, egli è piuttosto l'effetto di momentaneo irritamento o reazione che una vera diatesi da essi ingenerata.

59. I noti germi non sono atti a riprodursi se non arrivati allo stato di maturità. E del pari i contagi non sogliono propagarsi che giunti a certo periodo, e generalmente quando hanno trascorso almeno due stadj. Così il vaccino, e il vajuolo tanto dell' uomo che delle pecore, divengono principalmente comunicabili al tempo della suppurazione delle pustole; il morbillo parecchi giorni dopo l' eruzione; il tifo petecchiale verso l' epoca della risoluzione; il cimurro de' cavalli quando comincia lo scolo dalle narici; e verso tal punto anche la febbre ungarica de' buoi. In sul principio non è contagiosa nè meno la peste. Donde la sana precauzione di segregare conducendo a' lazzaretti gli ammorbati appena se ne veggono i primi indicj, a impedire la diffusione del male.

60. Nè basta che gli altri germi sieno maturi per potersi riprodurre e moltiplicare; ma deono anche trovarsi nel loro stato d' integrità, senz' avere essenzialmente patito. E il medesimo è de' semi contagiosi, i quali se per qualche motivo sieno stati alterati, più non tornano effettivi, come vedesi nel vajoloso che abbia sofferto il contatto dell' aria, e nel vaccino che anche per pochi momenti abbia provato l'azione di questa e della luce.

61. Molti esseri, specialmente de' più minuti, producono una prodigiosa quantità di germi; ed alcuni sono anche forniti di pronta riproduzione (N°. 18, 19.). E questa sterminata quantità di germi, e questa prontezza di riprodursi osservasi pure in modo particolare ne'contagi, di che non vale recar esempio, essendo questo uno de' più distinti loro caratteri.

62. Come delle moltissime sementi prodotte da una pianta selvaggia, abbandonata a se stessa, benchè esistano altrettanti punti di suolo atti ad accoglierle, assai poche generalmente riescono effettive (N°. 20), così sovente addiviene de' contagi che si appicchino a pochissimi individui, sebbene molti vadano a tiro di prenderli (N°. 31.). Perchè, siccome all' effettivo sviluppo degli altri germi vuolci il pieno concorso delle relative circostanze (N°. 21, 23) che non suole esser frequente; così tale concorso abbisogna eziandio pe' contagi.

63. Ma per la ragione medesima, siccome avverandosi il detto concorso per gli altri germi in sommo grado, eglino si riproducono in quantità portentosa; del pari dove succeda ch' esso concorso di circostanze s' avveri pe' contagi, questi s'appiccano a maggior numero d' individui ed infuriano come veri flagelli.

64. Le circostanze richieste perchè un germe torni effettivo (che sono moltissime, come per esempio che sia maturo, nella sua integrità; che vada in sito atto ad accoglierlo, che vi si arresti non venendone distrutto da vento od acqua o simili cause; che vi penetri, giunga nel posto appropriato al suo sviluppo, e vi trovi ciò che per questo è necessario ec.) possono variare assai secondo la natura di esso (N°. 22.). E si veggono pure molto variare quelle de' contagi secondo la loro specie. Generalmente però favorevoli allo sviluppo degli altri germi sono l'umido e il caldo: e nell'umido e nel caldo veggonsi in generale provar molto anche i contagi.

65. Ond' è che come il freddo sospende o impedisce lo sviluppo degli altri germi; così esso scorgesi pur operare contro quel de' contagi, che con esso il più si mitigano, si assopiscono, e talvolta alcuni anche cessano.

66. Gli altri germi a svilupparsi impiegano un tempo vario secondo la lor natura, e secondo le circostanze volutevi: tempo che si allunga o si accorcia secondo il minore o maggior grado di queste. E non altrimenti i contagi secondo la lor natura mettono diverso tempo a svilupparsi; e lo allungano od accorciano secondo lo scarseggiare o l' abbondare delle circostanze richieste.

67. E come secondo la specie vario è pur il tempo che impiegano gli altri germi dallo sviluppo al pieno maturamento; essendo in alcuni (per esempio de' funghi) pochissimo, ed in altri assai considerevole: del pari i contagi altri sono atti a trasmettersi dopo breve intervallo di tempo, ed altri dopo un più lungo.

68. Parecchi esseri conosciuti sogliono percorrer il viver loro in tempo determinato, ed aver anche stadj ben definiti, come vedesi nel filugello. E così pure molti contagi percorrono ordinariamente i loro stadj in un numero di giorni più o meno fisso.

69. Non è dato di troncare il cominciato corso vitale degli altri esseri, se non uccidendoli. E del pari non è dato di troncar con rimedj il corso di molti contagi, perchè non trovossi mezzo di estinguerli senza distruggere anche l' organismo dell'animale o del vegetabile in cui si rinvengono. Che se di alcuni che non l' hanno determinato, come la scabbia e la sifilide, si può troncarlo; ciò appunto si ottiene con farmaci atti per la loro acrità, o per l' odore, ad uccidere altri viventi conosciuti, come vermi ed insetti.

70. Certi parassiti, come crittogame entofite, col riprodursi escono dal soggetto invaso; e gli uscitine germi riprodotti si disperdono e si distruggono, salvo que' pochi, a' quali incontri di fare invasioni novelle. E somigliantemente i contagi che hanno corso determinato, finito questo, abbandonano al tutto il già travagliato individuo, e dove il caso non porti che i germi loro servano ad altre invasioni, si dissipano e vengon distrutti.

71. Gli altri germi finchè sono provveduti di vita non si ponno distruggere dall'organismo, poichè il vivo organismo non vale a distruggere ciò ch' è vivente: ed è per questo che possono allignare diverse generazioni di vermi nello stomaco, negl' intestini degli animali, ed in altre lor parti; ed i semi vengono da certi uccelli rimandati cogli escrementi, e diffusi; e così pure da altri animali: anzi perchè meglio germoglino talor si consiglia di farli mangiare a qualche animale che colla masticazione non gli schiacci ed estingua. Ed egualmente il germe de' contagi se ne rimane illeso nell'organismo senza venirne punto intaccato; e non si distrugge se pria dal rimedio non venga ucciso, o dalla tumultuante forza vitale, già messa per questo combattimento alla più vigorosa prova, non venga cacciato.

72. È proprio de' germi l'avere due stati; l'uno d'inerzia o di assopimento, e l'altro d'azione in cui essi destansi a vita e si sviluppano. Il primo de' quali può durare più o meno secondo la varia specie del germe, la sua collocazione e le circostanze (N°. 16, 17.). Ed anche i contagi hanno un periodo in cui rimangono per entro la macchina oziosi ed innocui, ed un altro di azione in cui la perturbano; il quale può mostrarsi più o men sollecito o tardo secondo le circostanze e la specie medesima del contagio (N°. 66): onde si hanno le tanto diverse *delitescenze*. La più svariata delle quali ben conosciuta si è quella dell'idrofobia; e par vengon poi quelle della migliare, della scarlattina, del vajuolo ec.

73. Dall' addotto paralello, comunque in qualche parte si possa ravvisare imperfetto od inesatto, si vede la grande somiglianza di procedimento de' contagi cogli altri esseri naturali consimili; somiglianza che dice dover essere anch' essi veri enti naturali e mancare soltanto l' ultimo passo ossia l' atto di ravvisarli effettivamente per tali, imponendo a ciascuno un proprio nome, come s' impose agli altri oggetti della Storia naturale.

74. Il qual passo s'è pur cominciato, poichè fu scoperto l'autore della scabbia, diverso nell'uomo e nelle varie specie d' animali; di che si vede perchè il male dall' una non passi all' altra. Fu scoperto ultimamente, come annunciossi al Congresso scientifico di Venezia, anche l' acaro della lebbra in Norvegia. Fu scoperto l'autor del calcino ne' filugelli; l'autor della golpe del frumento; quello delle macchie nelle foglie del gelso; e pare eziandio quello dell' infezione delle radici di quest'albero; e quello del morbo delle patate. Sicchè dato è presumere che un' attenta insistente e regolata metodica osservazione con fini ed esatti microscopj condurrà a scoprire anche gli altri.

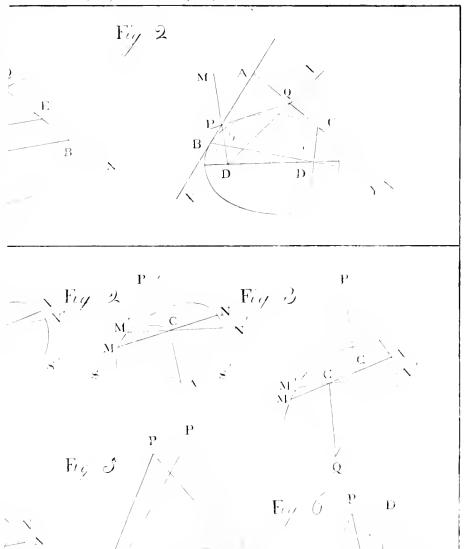
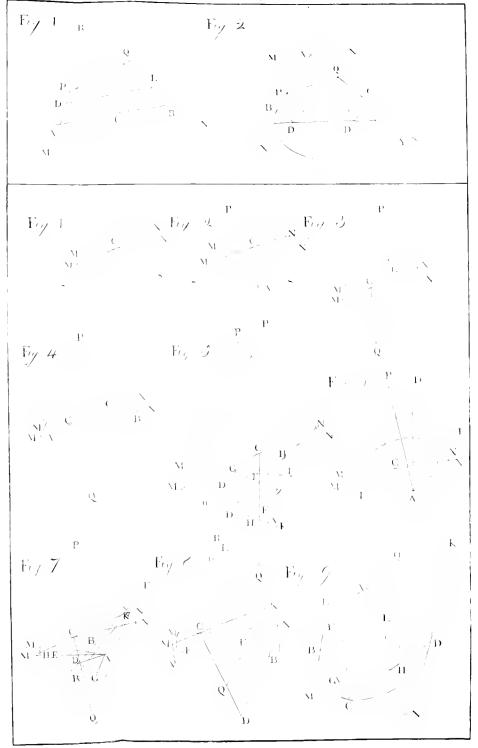
75. Il vero modo pertanto di riguardar i contagi si è quello di considerarli come esseri naturali che operin naturalmente, come altrettanti parassiti dell'uomo, di quell'animale

o di quella pianta, di quella parte, di quell'organo o sistema, di quell'età o situazione; i quali entrando per questo o quel mezzo, in questa o quella maniera nella macchina vivente, s' insinuano al luogo ad essi appropriato, e, presentandosi le acconce opportunità, vi si sviluppano, recando sconcerto proporzionato al loro guasto, e alla sensibilità dell' individuo e della parte od organo o sistema afflitto, e di quelli che trovansi in relazione diretta o indiretta con esso. Il contagio della golpe che per molte e diverse sperienze giungemmo a conoscere ne'suoi particolari (1) può chiarire pur bene questa dottrina.

76. Raccogliendo in breve i fili principali di questo discorso, da esso risulta che, abbandonate le mere supposizioni, fondando argomento soltanto su ciò ch' è provato in natura; e considerato quinci bene il procedimento dalla natura tenuto per gli altri esseri consimili i quali sempre si riproducono identici, confrontando con esso quello de' contagi preso nel loro complesso in tutte le generazioni de' viventi soggettevi, si mostra ch' essi contagi debbon essere veri enti, infesti parassiti: ed applicandovi di proposito l' attenta osservazione microscopica, si può anche effettivamente scoprirli. Tale e non altra ci sembra la via di ridur a scienza reale questo studio, che sebbene di tutti il più rilevante, sin ora fu in generale sì maltrattato, cioè trattato con argomenti estranei alla natura del pari che alla logica, almeno ne' varj punti che di fuga e così indigrosso quì abbiamo toccato.

(1) Sulla golpe del frumento. Memoria inserita nel Vol. 21° di quelle dell' Accademia di Agricoltura ec. di Verona.

Fig 2
M
A
Q
E
P
C
B
B
D
D
Y
P
Fig 2
Fig 3
P
N
M'
C
N'
M
S
S'
C
C
M
M
Q
P
P
P
Fig 5
Fig 6
P
D

Fig 1
Fig 2
Fig 1
Fig 2
Fig 3
Fig 4
Fig 5
Fig 7
Fig 8
Fig 9

OSSERVAZIONI
SU' METODI PROPOSTI DALL' ILLUSTRE LAGRANGE
PER LE CURVE INVILUPPI,
CON ALTRE RICERCHE AFFINI,

DEL SOCIO ATTUALE

CAV. VINCENZO FLAUTI.

Ricevuta il 23 *Giugno* 1848.

L' ellisse e l' iperbole sono le curve di contatto di quelle rette, che incontrandone due altre parallele tra loro, ne tagliano porzioni di costante rettangolo, da due punti in esse fissati. E questa proprietà di tali curve derivando immediatamente da quelle delle loro tangenti, gli antichi poterono però conoscerle. Ma essi non vi rilevarono del pari che quel rettangolo fosse un *massimo*; nè tampoco l' avvertirono i moderni dopo l' applicazione dell' algebra alla geometria, fino a che l' insigne Lagrange, penetrando col suo acuto ingegno nella famiglia de' problemi, che possono proporsi sulle tangenti, i raggi di osculo, ec. ec. ed in generale su' contatti delle curve, ne distinse due generi; l' un di essi diretto, che consiste in trovare alcuni elementi del contatto di un cert' ordine; ed osserva che dipendendo siffatta ricerca dall' analisi diretta delle funzioni, i problemi, che vi si rapportano sono sempre risolvibili analiticamente. Non però così nel genere *inverso*; nel quale si suppone esservi una relazione data tra alcuni di quelli elementi, e le coordinate x, y, con le funzioni derivate y', y'', ec.; e questa con la sostituzione delle espressioni generali degli elementi in x, y, y', y'', ec. diviene in conseguenza un' equazione derivata di un cert' ordine, la

di cui equazione primitiva in x, y sarebbe quella della curva cercata (1). Conducendo adunque siffatti problemi immediatamente ad equazioni derivate, la loro soluzione dee essenzialmente dipendere dall'analisi inversa delle funzioni; e va però soggetta a tutte le difficoltà ed imperfezioni di quest' analisi. Avverte egli però potersi anche per tal genere in alcuni casi riuscire direttamente per mezzo di considerazioni particolari, le quali, come esprimesi, meritano tanto maggiore attenzione, quanto che tengono a certe finezze di analisi, ch' è importante di conoscere; e tra questi casi indica quelli nei quali la relazione data esista tra gli elementi del contatto, senza che vi entrino a parte le coordinate x, y.

E come che ogni detto di quest' uomo veramente singolare l' è un principio di scienza da stabilirsi per massima, io ne trarrò per prima conseguenza che l' attenersi nell' uso dell' analisi moderna, in una qualche ricerca, ad un metodo più elementare, non sia da considerarsi lieve cosa ed indifferente; e che convenga talvolta deviare da' metodi generali per riuscire con maggior semplicità e più facilmente nella soluzione di un qualche problema, che intorno la geometria si versi. Del che sebbene non vi sia chi dissenta, pure mi giova averlo rilevato dal principe degli analisti, a fin di distruggere una impropria maniera di pensare in contrario, non ha guari inconsideratamente emessa da taluni nostri Professori.

Il Lagrange intanto per illustrare con un esempio la teorica, che imprende a sviluppare, si propone a risolvere il seguente problema: *Determinare la curva, in cui ciascuna tangente incontrando due ordinate a punti dati dell' asse (prodotte se bisogna), ne ascinda parti, che comprendano sempre lo stesso rettangolo.*

Il progresso dell' analisi del Lagrange è il seguente:

Sieno a, a' le ascisse de' due punti dati, e si rappresenti con

$$y = Tx + V$$

(1) Théorie des Fonctons analytiques n 122.

l'equazione generale alla tangente tra le coordinate rettilinee x, y; facendo in quest' equazione una volta $x = a$, ed un' altra $x = a'$, si avranno i due valori di y, il cui prodotto dev' esser costante per ipotesi; indicandolo adunque con k, si avrà tra gli elementi T, V la relazione

$$(\mathrm{T}a + \mathrm{V})(\mathrm{T}a' + \mathrm{V}) = k;$$

Ma è, com' egli avea fatto precedentemente rilevare,

$$\mathrm{T} = y', \qquad \mathrm{V} = y - xy'$$

(dinotando y' la funzione prima derivata di y); si avrà perciò l' equazione derivata del 1.° ordine

$$(y + (a - x)y')(y + (a' - x)y') = k,$$

di cui non sarebbe agevole di ottenere l'equazione primitiva, mediante i metodi ordinarj. Osserva però che se si prendano le funzioni prime di quell' equazione, si ha l' altra

$$(y + (a' - x)y')(a - x)y'' + (y + (a - x)y')(a' - x)y'' = 0$$

ch' è decomponibile nelle due

$$y'' = 0$$

$$(y + (a' - x)y')(a - x) + (y + (a - x)y')(a' - x) = 0$$

l' una del 2.°, l' altra del 1.° ordine.

Integrando la prima $y'' = 0$, si perviene immediatamente all' equazione

$$y = \mathrm{A}x + \mathrm{B}$$

e mostra esser questa l' integrale completo dell'equazione del 1.° ordine, ottenuta per la soluzione del problema. Eliminando poi y' tra la prima, e la seconda perviene all' equazione

$$(a - a')^2 y^2 + 4k(a - x)(a' - x) = 0$$

che riconosce come una soluzione singolare della stessa equazione del 1.° ordine, e prova esser questa propriamente quella, che risolve il proposto problema. Esprimendo per tanto la medesima l' ellisse o l' iperbole secondo che k sia positiva o

negativa, conchiude che l' una e l' altra di tali curve goda della proprietà richiesta nel problema. Quindi osserva che la stessa proprietà sia stata dimostrata da Apollonio nei suoi conici (42. III); ma soggiugne che l' analisi da lui recata ha il vantaggio di far vedere che quella si appartenga unicamente alle Sezioni Coniche.

Con tutto il rispetto, che merita quest' uomo singolarissimo mi permetterò osservare, che l' ultima asserzione è non solo inesatta, ma pur dannosa alla scienza; giacchè lo stesso otteneasi tanto dalla dimostrazione Apolloniana, quanto da altra che fusse condotta co' più elementari principj della moderna analisi, tal che quella che vedesi nella prop. XVI del Trattato analitico delle curve coniche pubblicato dal nostro Fergola fin dal 1814.

Che se il dubbio elevato da quel sommo Analista su di una dimostrazione condotta per le vie particolari della Geometria, o di questa all' analisi algebrica accoppiata reggesse, dubbia rimarrebbe similmente ogni altra dimostrazione per proprietà delle curve coniche; e la stessa Geometria elementare risulterebbe incerta, per vi si dover dimostrare che le proprietà del cerchio non possono ad altro soggetto appartenersi. Ma deesi riflettere che le dimostrazioni, le quali se ne recano, partendo dalla natura del soggetto, che in esse trasfondesi, rendono assolute ed incommunicabili ad altri le identiche proprietà, senza che queste in quello non s' immedesimino e s' identifichino. Altronde chi non conosce che da una data proprietà qualunque di una curva non può trarsi che una sola ed unica equazione, esprimente appunto la natura della curva stessa; e che perciò quella proprietà non possa in alcun modo convenire a curva di natura diversa?

Dopo aver disegnato in tal guisa il dubbio promosso dall' insigne Analista, farò riflettere che il vero divario, che v' ha tra il metodo da lui sviluppato per pervenire all' enunciata proprietà delle curve coniche, e la dimostrazione Apolloniana, o altre simili, consiste nello stesso divario, che v' ha

tra i metodi diretti di ricerca ed i metodi dimostrativi; e sotto questo aspetto la superiorità del suo metodo è incontrastabile; anche perchè la Geometria elementare e la Geometria analitica propriamente detta mancano di mezzi diretti per lo maneggio delle quistioni, cui si riferisce.

La teorica pertanto stabilita da Lagrange nei citati paragrafi è riassunta dall' illustre Autore nelle seguenti parole (§. 126 in fine) (1): « Segue da tutto ciò, che l' equazione « primitiva singolare di un' equazione del 1.° ordine rappre- « senta sempre la curva inviluppante di tutte le curve, che

(1) Una teorica di tanto rilievo, così luminosamente dichiarata in un libro, che ogni Analista ha certamente l' obbligo di conoscere, parrebbe che avesse già dovuto esser nota a tutt' i cultori della scienza; ma avviene altrimenti, e lo comprovano diversi articoli inseriti negli Annali di matematiche del Gergonne. Così nel vol. 8°, a pag. 368, corrispondente all' anno 1817, si legge una Memoria relativa ad un problema, ch' erasi negli Annali medesimi ripetutamente proposto, e concepito nei seguenti termini: *Qual è la curva inviluppo delle corde di costante grandezza iscritte ad una data Sezione Conica? Qual è il luogo del vertice dell' angolo mobile e variabile circoscritto alla stessa curva, di cui quella retta è la corda di contatto?*

L'Autore della Memoria prende ad occuparsi della sola prima parte del problema; e l' analisi da lui istituita il conduce ad una eliminazione tra 5 equazioni; ma sgomentato dai calcoli, e più di tutto dall' incertezza dei risultamenti, si arresta a questo punto, senz' aver potuto neppur nulla conchiudere intorno al grado dell' inviluppo, ch' ei cercava; e si rivolge a novella analisi. I nuovi ripieghi, cui ricorre, il guidano alla seguente equazione differenziale di 1.° ordine della curva, di cui trattasi

$$a^2 b^2 (dx^2 + dy^2) [(a^2 dy^2 + b^2 dx^2) - (y\,dx - x\,dy)^2] = c^2 (a^2 dy^2 + b^2 dx^2)^2;$$

ove a e b dinotano i semiassi dell' ellisse, sulla quale istituisce l' analisi; e c la metà della data corda. Ma a tal segno si arresta un' altra volta, così esprimendosi: « Il « s' agirait presentement de savoir quel est le plus facile de l' integration de cette « equation, ou de l' elimination à la quelle nous avions d' abord réduit le probléme », rimanendo così irrisoluta la quistione. Ma dopo la teorica stabilita da Lagrange quest' ultimo proposito non può non sorprendere, nulla essendo più facile dell' integrazione della precedente equazione. In fatti dividendo tutta l' equazione per dx^4, e messo $\frac{dy}{dx} = p$, la medesima cangiasi in

$$a^2 b^2 (1 + p^2) [a^2 p^2 + b^2 - (y - px)^2] = c^2 (a^2 p^2 + b^2)^2;$$

« possono essere rappresentate dalla sua equazione primitiva « completa, dando alla costante arbitraria tutt' i valori possi- « bili. » E questi principj medesimi son quelli, che anche attualmente convien seguire per ogni ricerca relativa a curve inviluppi; nè v' ha per quanto io sappia alcun vestigio di soluzioni di problemi di questo genere direttamente eseguite con le sole risorse della Geometria analitica.

---

e quest' equazione istessa, consideratavi la p come costante arbitraria sarà l' integrale completo della proposta. Eliminando poi la p tra l' equazione medesima, e la sua derivata rispetto alla stessa p, espressa da

$$a^2 b^2 (1+p^2)[a^2 p+x(y-px)]+pa^2 b^2[a^2 p^2+b^2-(y-px)^2]=2c^2 p(a^2 p^2+b^2)$$

si otterrà una soluzione singolare dell' anzidetta equazione differenziale, la quale darà la curva, che risolve il problema. Dall' ispezione di queste due equazioni è permesso solamente conchiudere, che l'eliminata in x, y, rappresentante la curva, di cui trattasi, non possa ascendere ad un grado superiore al 12°.

A questo risultamento può del resto, partendo sempre dalla teorica del Lagrange, pervenirsi in diverse altre guise, come appunto han fatto il Sig. de Gasparis e il Sig. Trudi; il primo in una Memoria già pubblicata nel fascicolo 32 del Rendiconto della R. Accademia delle Scienze di Napoli, e l'altro in un lavoro, che va tra poco a veder la luce.

Ma il Sig. Trudi ha di più, ripiegando ad altre considerazioni, definitivamente fissato il grado dell' inviluppo, ed ha provato che il medesimo sia una curva di 8.° ordine, dopo aver risoluto la seconda parte del problema, che da niun altro erasi trattata. Egli infatti ha trovato che il luogo del vertice dell' angolo mobile circoscritto ad una sezione conica, sotteso da una corda di costante grandezza, sia una curva di 4.° ordine, avente per equazione

$$m^2[y^2-l(nx+2m)][y^2+(nx+m)^2]=c^2[(nx+m)^2-ny^2]^2,$$

c esprimendo la metà della data corda, ed

$$y^2=2mx+nx^2$$

la data sezione conica. Esaminando l' equazione del 4.° ordine, si riconosce subito, che la curva, che essa rappresenta, abbia un *punto conjugato doppio* nel centro della sezione conica. Or la curva di contatto del 4.° ordine è precisamente la polare reciproca della curva del 4.° ordine; il suo grado adunque, secondo la bella teorica del Poncelet, sarebbe (V. Annali cit.) 4(4—1), ossia 12; ma l' esistenza di quel punto doppio deve, secondo lo stesso illustre Geometra (Giornale di matem. di Crelle, vol. 3.°), diminuire di 4 il numero 12; dunque infine *l' inviluppo delle corde di costante grandezza iscritte in una data sezione conica sarà una curva di 8.° ordine*. Se la sezione conica data sia parabola, l' inviluppo non sarà che una curva del 6.° ordine.

A me sembra però che non sia impossibile di sottoporre a metodi algebrici *elementari* anche le quistioni di tal natura; e non sarà forse ozioso il mostrare come possa, a mio modo, ottenersi siffatto scopo. Nè certo ora intendo di dare a tal proposito un metodo compiuto e generale, ma solo di additare un cammino plausibile da giugnere co' semplici mezzi della geometria analitica ai medesimi risultamenti, cui non evvi finora altra via da pervenire che usando teoriche più elevate.

Il metodo per tanto, ch' io propongo, si riduce in sostanza allo stabilimento preventivo delle condizioni di contatti, che possono corrispondere ai diversi casi, come appunto si pratica in altre ricerche di geometria analitica. Recherò qualche esempio a solo oggetto di chiarire quest' astratta indicazione; ma per non oltrepassare i limiti, che mi son prefisso, mi fermerò brevemente a considerare il più semplice de' casi.

Del resto il nostro Geometra Nicola Trudi, cui comunicava siffatte idee, ne ha già fatto felici applicazioni a quistioni difficili ed interessanti; e 'l suo lavoro, che comparirà tra poco nel VI Volume degli Atti della nostra Reale Accademia, comproverà semprepiù l' importanza del metodo, ch' io propongo, e che quì vedesi appena abbozzato. Ma eccomi più particolarmente all' assunto.

Una retta, che si muove in un piano con una legge assegnata, è, in generale tangente ad una certa curva, la quale è perciò l'inviluppo delle infinite posizioni, che può prendere quella retta secondo la legge del suo movimento. Data per tanto questa legge si cerca la natura della curva.

Per risolvere questa quistione è necessario premettere l'esame di quest'altra: *Data una retta ed una curva espresse rispettivamente dalle equazioni tra le coordinate rettilinee* x, y

$$y = Tx + V$$

$$\psi(x, y) = 0$$

qual è la relazione a doversi verificare tra i loro determinanti affinchè l' una sia tangente dell' altra?

Eliminando tra le due equazioni una delle variabili, y per esempio, si avrà l' equazione solo in x

$$\psi(x, Tx + V) = 0$$

le cui radici esprimeranno i punti d' incontro delle due linee. Basterà per tanto che due di queste radici sieno tra loro eguali, perchè la retta tocchi la curva. Supposto adunque che la condizione per l' eguaglianza di due delle radici della precedente equazione in x sia dinotata da (1)

$$\pi(T, V) = 0$$

si avrà in questa condizione la relazione cercata per lo contatto tra le linee proposte.

Ciò premesso, è manifesto che il grado della funzione $\pi(T, V)$ rispetto a T, V è essenzialmente dipendente dal grado e dal modo di composizione dell' equazione $\psi(x, y) = 0$. Sia m il grado di quest' ultima equazione, e supponghasi, per fissar le idee, essere n il grado della funzione $\pi(T, V)$; allora è manifesto che se la legge del movimento della retta $y = Tx + V$ sia espressa con una relazione tra T, V, come

$$\varpi(T, V) = 0$$

e si trovi che la medesima sia del grado n, converrà conchiudere che l' inviluppo di tutte le posizioni di quella retta sia una curva dell' ordine $m.^{esimo}$

In conseguenza per ciò che riguarda la determinazione dei diversi ordini d' inviluppi corrispondenti alle varie leggi di movimento della retta, la quistione sarebbe semplicemente

(1) Questa condizione, usando la notazione differenziale, equivale all' eliminata tra le due equazioni

$$\psi(x, Tx + V) = 0, \quad \frac{d \cdot \psi(x, Tx + V)}{dx} = 0,$$

ma è poi noto che la sua ricerca rientra nelle ordinarie teoriche algebriche.

ridotta a determinare i gradi delle rispettive relazioni in T, V, nascenti dalle condizioni di eguaglianza di due radici nelle equazioni, che risultano eliminando una delle variabili x, y tra l' equazione della retta e quelle dei varj ordini di curve. Altronde, valendosi del metodo dei coefficienti indeterminati, potrebbero poscia comporsi addirittura le equazioni stesse degl' inviluppi.

Ecco intanto l' applicazione di queste indicazioni al più semplice dei casi, cioè alle curve del 2.° ordine espresse dall' equazione generale

$$(a) \qquad ay^2 + 2bxy + cx^2 + 2dy + 2ex + f = 0.$$

Eliminando y tra quest' equazione e quella della retta, si ha l' equazione di 2.° grado in x

$$(aT^2+2bT+c)\,x^2 + 2\,(aTV+bV+dT+e)\,x + (aV^2+2dV+f) = 0,$$

le cui radici saranno eguali ove si verifichi la condizione

$$(aTV+bV+dT+e)^2 = (aT^2+2bT+c)\,(aV^2+2dV+f),$$

la quale sviluppata si riduce alla seguente equazione di 2.° grado in T, V

$$(b)\quad \left\{\begin{array}{l} (b^2-ac)\,V^2 + 2\,(ae-bd)\,TV + (d^2-af)\,T^2 \\ \qquad + 2\,(be-cd)\,V + 2\,(de-bf)\,T + (e^2-cf) = 0. \end{array}\right.$$

In conseguenza adunque di ciò che precede possiamo conchiudere, che *se la legge di movimento della retta,* $y = Tx + V$ *sia espressa mediante una relazione di* 2.° *grado in* T, V, *quella retta sarà continuamente tangente ad una curva di* 2.° *ordine,* la di cui equazione si comporrà come segue:

Trattandosi di una curva di 2.° ordine, la sua equazione in generale avrà la forma

$$(c) \qquad y^2 + 2\beta xy + \gamma x^2 + 2\delta y + 2\varepsilon x + \varphi = 0;$$

e la quistione riducesi a determinare i 5 incogniti coefficienti $\beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \varphi$. Sia

$$(d) \qquad AV^2 + 2BTV + CT^2 + 2DV + 2ET + F = 0$$

la data relazione in T, V, esprimente il movimento della retta; in virtù della formola (b) si avrà pure

$$(e)\quad \begin{cases} (\beta^2-\gamma)V^2+2(\varepsilon-\beta\delta)TV+(\delta^2-\varphi)T^2+2(\beta\varepsilon-\gamma\delta)V \\ \qquad +2(\delta\varepsilon-\beta\varphi)T+(\varepsilon^2-\gamma\varphi)=0\,; \end{cases}$$

e quindi paragonando i coefficienti di (e) con quelli dei termini analoghi di (d), si avranno per determinare le 5 incognite, le 5 equazioni di condizione

$$(f)\ \frac{\varepsilon^2-\beta\delta}{\beta^2-\gamma}=\frac{B}{A},\quad (g)\ \frac{\delta^2-\varphi}{\beta^2-\gamma}=\frac{C}{A},\quad (h)\ \frac{\beta\varepsilon-\gamma\delta}{\beta^2-\gamma}=\frac{D}{A},\quad (i)\ \frac{\delta\varepsilon-\beta\varphi}{\beta^2-\gamma}=\frac{E}{A},\quad (k)\ \frac{\varepsilon^2-\gamma\varphi}{\beta^2-\gamma}=\frac{F}{A}\,;$$

dalle quali si ricavano per le incognite i seguenti valori (1)

$$\beta=\frac{BD-AE}{B^2-AC},\quad \gamma=\frac{D^2-AF}{B^2-AC},\quad \delta=\frac{BE-CD}{B^2-AC},\quad \varepsilon=\frac{BF-DE}{B^2-AC},\quad \varphi=\frac{E^2-CF}{B^2-AC}$$

tutti di 1.° grado, e però unica è la curva inviluppo. Sostituendoli in (c), l'equazione di questo inviluppo, cioè della curva di 2.° ordine continuamente toccata dalla retta, le cui costanti T, V, verificano la relazione (d), sarà in fine

$$(l)\quad \begin{cases} (B^2-AC)y^2+2(BD-AE)xy+(D^2-AF)x^2 \\ \qquad +2(BE-CD)y+2(BF-DE)x+(E^2-CF)=0. \end{cases}$$

---

(1) Se volesse starsi alle regole comuni per giudicare del grado dell'eliminata in ciascuna delle 5 incognite, si andrebbe troppo lungi dal vero; come pure si perderebbe assai tempo e fatica per ottenere i loro valori seguendo i metodi ordinarj; e però non sarà superfluo che qui si mostri come possa compiersi l'eliminazione tra le 5 equazioni in modo semplice e spedito.

1°. Si moltiplichi (f) per β, e si sottragga dalla (h), si avrà $\quad A\delta=D-B\beta$.

2°. Si moltiplichi (g) per β, e si sottragga da (i), verrà $\quad B\delta=E-C\beta$.

Da queste due equazioni già possono ottenersi i valori di β e δ.

3°. Si moltiplichi (g) per ε, e si sottragga da (i) moltiplicata per δ, si otterrà in virtù di (f) $\quad B\varphi=E\delta-C\varepsilon$.

4°. La (h) moltiplicata per φ si aggiunga ad (i) moltiplicata per ε, risulterà in virtù di (k) $\quad F\delta=E\varepsilon-D\varphi$.

5°. Finalmente il prodotto di (i) per γ si sottragga dal prodotto di (k) per β, si avrà in virtù di (h) $\quad D\varepsilon=F\beta-E\gamma$.

Da queste cinque equazioni, che possono rimpiazzare le primitive, si ottengono poi facilissimamente i cinque valori scritti qui sopra.

Per mezzo di questa formola si avrà dunque immediatamente l' equazione della sezione conica, che può divenire inviluppo di qualche retta assoggettata a muoversi su di un piano con legge assegnata, tostochè si abbia espressa la legge mediante una relazione della forma (d).

Applicherò ora le precedenti formole a qualche esempio, ed in primo luogo riprenderò lo stesso problema trattato dal Lagrange, recato più innanzi. Ritenendo i medesimi simboli, ed avviando l'analisi nello stesso modo, si avrà egualmente

$$(\mathrm{T}a+\mathrm{V})(\mathrm{T}a'+\mathrm{V})=k$$

ossia $$\mathrm{V}^2+(a+a')\mathrm{TV}+aa'\mathrm{T}^2-k=0.$$

Poichè dunque la relazione in T, V esprimente la legge del movimento della retta ascende al 2.° grado, la curva cercata sarà del 2.° ordine. Per averne l'equazione basterà paragonare i coefficienti della relazione or trovata con quelli della formola generale (d), e si ha

$$\mathrm{A}=1,\quad \mathrm{B}=\tfrac{1}{2}(a+a'),\quad \mathrm{C}=aa',\quad \mathrm{D}=0,\quad \mathrm{E}=0,\quad \mathrm{F}=-k;$$

sostituendo questi valori nella formola (l), si avrà per l'equazione della curva attuale

$$(a-a')y^2+4kx^2-4k(a+a')x+4aa'k=0$$

identica a quella trovata da Lagrange.

Osserverò in questo punto che il teorema di geometria, che risulta da questo problema, è assai più generale, potendo enunciarsi come segue:

Sieno A, B (fig. 1.ª) *due punti fissi su due rette date di posizione* RM, RN, *ed una retta* PQ *le seghi per modo che il prodotto* AP × BQ *sia costante, sarà questa retta continuamente tangente ad una curva di 2.° ordine.* (1)

---

(1) Questa proprietà delle curve del 2.° ordine, non avvertita finora a quanto parmi, è stata da me pur recata sotto forma geometrica nell'ultima edizione del Trattato geometrico delle Curve coniche (Nota alla prop. XXII, lib. II.).

Rilevandone l'equazione con lo stesso metodo tenuto più sopra, si trova che la curva tocca le date rette in due punti D, E tali che DE risulta parallela ad AB; che il dato rettangolo risulta eguale a quello di RB in AD, o di RA in BE; e che il suo centro C cade nel mezzo di AB.

Risolverò per un altro esempio il seguente *Problema*: *Sieno dati due angoli* XAY, MDN (fig. 2.[a]) *l'uno fisso e l'altro mobile intorno al vertice* D, *e sia* PQ *la retta, che unisce i punti d' incontro dei lati dell' angolo fisso, e del mobile in una posizione qualunque. Si cerca la curva toccata da questa retta.*

Sol. Presi per assi coordinati i lati AX, AY dell'angolo fisso XAY che s' indichi con θ, dicasi φ l' angolo mobile MDN; α, β le coordinate del suo vertice D; x' la AP ascissa del punto P, ed y' la AQ ordinata del punto Q. Saranno

$$y-\beta=\frac{\beta}{\alpha-x'}(x-\alpha), \qquad y-\beta=\frac{\beta-y'}{\alpha}(x-\alpha)$$

le equazioni dei due lati dell' angolo mobile DM, DN; e però tenendo presenti le note formole per valutare le tangenti di angoli relativamente ad assi obbliqui, si avrà per la condizione del problema

$$\frac{\left(\frac{\beta}{\alpha-x'}\right)-\frac{\beta-y'}{\alpha}\Big)\operatorname{sen}\theta}{1+\frac{\beta}{\alpha-x'}\times\frac{\beta-y'}{\alpha}+\left(\frac{\beta}{\alpha-x'}+\frac{\beta-y'}{\alpha}\right)\cos.\theta}=\operatorname{tag}.\varphi.$$

Ciò posto sia come per lo innanzi

$$y=\mathrm{T}x+\mathrm{V}$$

l' equazione di PQ; facendovi una volta $x=0$, $y=y'$, ed altra volta $x=x'$, $y=0$, si ricaverà $y'=\mathrm{V}$, $x'=-\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{T}}$; e però sostituendo questi valori nella precedente condizione, e tolti i fratti, si avrà tra T, V la seguente relazione

$$\left\{\begin{array}{l}(\operatorname{sen}.\theta+\cos.\theta\,\operatorname{tg}.\varphi)\mathrm{V}^2+[\alpha(\operatorname{sen}\theta+\cos\theta\,\operatorname{tg}\varphi)+\beta\,\operatorname{tg}\varphi]\,\mathrm{TV}\\ \qquad-[\beta(\operatorname{sen}\theta+\cos\theta\,\operatorname{tg}\varphi)+\alpha\,\operatorname{tg}\varphi]\,\mathrm{V}+\operatorname{tg}\varphi\,(\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta\cos\theta)\mathrm{T}=0;\end{array}\right.$$

ch' è del 2.° grado; e perciò la curva cercata è del 2.° ordine.

Istituendo il solito paragone tra i coefficienti di questa relazione e quelli della formola (d), affin di comporre l'equazione della curva, si ha

$$A=\operatorname{sen}\theta+\cos\theta\operatorname{tg}\varphi,\qquad B=\tfrac{1}{2}[\alpha(\operatorname{sen}\theta+\cos\theta\operatorname{tg}\varphi)+\beta\operatorname{tg}\varphi],\quad C=0$$

$$D=-\tfrac{1}{2}[\beta(\operatorname{sen}\theta+\cos\theta\operatorname{tg}\varphi)+\alpha\operatorname{tg}\varphi],\quad E=\tfrac{1}{2}(\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta\cos\theta),\ F=0.$$

Ponendo dapprima *zero* in luogo di C ed F in (l), si ha

$$B^2y^2+2(BD-AE)xy+D^2x^2+2BExy-2DEx+E^2=0$$

e già si scorge che la curva debba esser toccata dagli assi coordinati; dappoichè messo eguale a *zero* una volta x, ed una volta y, si hanno i due risultati

$$B^2y^2+2BEy+E^2=0\ ,\qquad D^2x^2-2DEx+E^2=0$$

che sono entrambi quadrati perfetti; e però supposto essere sulla figura

$$\overline{AC}=-\frac{E}{B}=-\frac{\operatorname{tg}\varphi(\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta\cos\theta)}{\alpha(\operatorname{sen}\theta+\cos\theta\operatorname{tg}\varphi)+\beta\operatorname{tg}\varphi}\ ,\ \overline{AB}=\frac{E}{D}=-\frac{\operatorname{tg}\varphi(\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta\cos\theta)}{\beta(\operatorname{sen}\theta+\cos\theta\operatorname{tg}\varphi)+\alpha\operatorname{tg}\varphi}$$

saranno C, B i due contatti, e facilmente si scorge che questi due valori di AC, AB sien costruiti mediante le due rette DC, DB, formanti dall' uno e dall' altro lato di AD angoli eguali fra loro, ed all' angolo dato φ. Dopo ciò è chiaro che il punto D sia un fuoco della curva, e che DC, DB ne sieno due raggi.

Questa curva pertanto sarà *parabola, ellisse* o *iperbole* secondochè sia $(BD-AE)^2-B^2D^2$, ovvero $AE(AE-2BD)$ *eguale, minore* o *maggior di zero*. Sostituendo alle lettere A, B, D, E i loro valori scritti poc' anzi, quest' esame si troverà ridotto all' esame del segno della quantità

$$-\alpha\beta\operatorname{tg}\varphi(\operatorname{sen}\theta+\cos\theta\operatorname{tg}\varphi)(\operatorname{sen}^2\theta+\operatorname{tg}^2\varphi)(\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta\cos\theta);$$

o solo di $$-\alpha\beta\operatorname{tg}\varphi(\operatorname{sen}\theta+\cos\theta\operatorname{tg}\varphi),$$

giacchè gli altri due fattori sono necessariamente positivi.

Pel caso della parabola non potendo esser *zero*, nè α, nè β, nè $\operatorname{tg}\varphi$, converrà che sia $\operatorname{sen}\theta+\cos\theta\operatorname{tg}\varphi=0$; donde

si trae $\operatorname{tg}\varphi = -\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = -\operatorname{tg}.\theta$. Dunque la curva sarà parabola quando l' angolo mobile e 'l fisso sieno supplementi l' un dell' altro; e si ha però il seguente

TEOREMA.

Se si faccia passare un cerchio pei tre punti, in cui s' incontrano tre tangenti qualunque di una parabola, questo cerchio passerà pel fuoco.

La discussione della precedente condizione analitica pei casi dell' ellisse e dell' iperbole, sarebbe egualmente agevole; ma si rifletta che se si faccia in B l' angolo $ABb = XBD$, la retta Bb dovrà passare per l' altro fuoco, egualmente che la Cc formante in C l' angolo $YCc = ACD$. Dunque l' altro fuoco si avrà nel punto D' intersezione delle due rette Bb, Cc. Avuti in tal modo i due fuochi della curva, se ne avrà di seguito il centro e gli assi primarj, e potrà così descriversi.

Ma intanto è manifesto che se i punti D, D' cadano entrambi nell' interno dell' angolo XAY la curva sarà *ellisse*, come per l' opposto sarebbe *iperbole* ove i due punti D, D' si trovassero uno al di dentro, l' altro al di fuori di quest' angolo. Che se le rette Bb, Cc, anzichè incontrarsi, fussero parallele, si avrebbe allora di bel nuovo la *parabola*; e facilmente si scorge, che quest'ultima condizione ritorna all'altra poc' anzi accennata.

Dopo tutto ciò può enunciarsi il seguente

TEOREMA.

Se dal fuoco di una Sezione Conica si tirino due rette ai punti, in cui due tangenti qualunque sono incontrate da una terza tangente comunque condotta tra esse, quelle due rette comprenderanno un angolo costante, eguale alla metà dell' angolo compreso dai due raggi tirati dallo stesso fuoco ai contatti con le due prime tangenti.

Ignoro se questa interessante proprietà dei conici sia stata da altri avvertita; non ravvisandosi nè nei libri, che ci restano degli antichi, nè in altri Trattatisti di tali curve.

SOPRA

L' ANALISI LINEARE

PER LA RISOLUZIONE DEI PROBLEMI DI I.° GRADO

MEMORIA II. (1)

DEL SOCIO E *SEGRETARIO*

PROF. GIUSEPPE BIANCHI.

A proseguire e compiere la trattazione dell' Analisi lineare secondo i principj e sviluppi, che furono esposti nell' antecedente Memoria, dobbiam ora occuparci del caso in cui il numero delle incognite superi quello delle equazioni di condizione; il che faremo nel seguente

§. III.

Dell' Analisi lineare indeterminata.

25. Ritenuto m il numero delle incognite, sia $m-1$ quello delle equazioni esprimenti le condizioni tutte coi dati del problema. Una delle m incognite nel corrispondente problema determinato, per esempio la x_{m-1} si consideri indeterminata, e pongasi

$$s_0 - r_0 x_{m-1} = s'_0 \; ; \quad s_1 - r_1 x_{m-1} = s'_1 \; ; \quad s_2 - r_2 x_{m-1} = s'_2 \; ; \text{ etc.}$$

Avremo quindi le $m-1$ equazioni

$$(59) \quad \left\{ \begin{array}{l} a_0 \quad x_0 + b_0 \quad x_1 + \ldots\ldots + q_0 \quad x_{m-2} = s'_0 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_{m-2}\, x_0 + b_{m-2}\, x_1 + \ldots\ldots + q_{m-2}\, x_{m-2} = s'_{m-2} \end{array} \right.$$

(1) V. la Mem. I. nel T. XXII. parte matematica, pag. 184, della serie di questi Volumi.

dalle quali (§. I.) ricaveremo i valori

$$x_0 = \frac{A'}{V'}; \quad x_1 = \frac{B'}{V'}; \; \ldots\ldots \; x_{m-2} = \frac{Q'}{V'};$$

essendo A', B', ... Q' funzioni determinate razionali ed esplicite degli r, s delle equazioni (1) e della x_{m-1}, ma non contenendo V' alcuna delle s'. Perciò, qualunque sia la x_{m-1}, generalmente la V' non diviene mai zero, e cionullostante i valori di ciascuna delle $x_0, x_1 \ldots\ldots x_{m-2}$ sono tutti indeterminati dipendentemente dalla x_{m-1} che entra nelle A', B', ... Q'.

D' altra parte ammettendo, benchè non sia fra le condizioni date, anche l'ultima dell'equazioni (1), questo può farsi tenendo per arbitrarie le $a_{m-1}, b_{m-1}, \ldots\ldots, s_{m-1}$ che sono di numero $m+1$. Ora queste arbitrarie si prendano tali che ne vengano soddisfatte le $m+1$ equazioni A=0, B=0, ..., R=0, V=0. Da ciò ne viene ugualmente che ciascuna delle m incognite $x_0, x_1, x_2 \ldots\ldots x_{m-1}$ esprimesi colla forma indeterminata $\frac{0}{0}$, ed anzi è tale assolutamente qual dev' essere, e non già solo apparentemente, ossia per un fattor comune che sia $=0$. Dunque il problema indeterminato in questo caso, benchè non lasci conoscere alcuna delle $x_0, \ldots\ldots x_{m-1}$, richiede però, nel paragone col pienamente determinato che una parte dei coefficienti e nominatamente li $a_{m-1}, b_{m-1}, \ldots\ldots s_{m-1}$ soddisfino alle relazioni A $=0$, B $=0$, ... V $=0$: ossia dall'uno all'altro problema passa la differenza che nel determinato tutti i coefficienti, di numero $m(m+1)$, sono indipendenti fra loro e qualunque, mentre nell' indeterminato i coefficienti liberi sono di numero $(m+1)(m-1)$.

26. Abbiansi $m-2$ equazioni lineari ed m incognite, e consideriam indeterminate le x_{m-1}, x_{m-2}. Ne dedurremo

$$(60) \quad \left\{ \begin{array}{l} a_0 \quad x_0 + b_0 \quad x_1 + \ldots\ldots + p_0 \quad x_{m-3} = s''_0 \\ \vdots \\ a_{m-3}\, x_0 + b_{m-3}\, x_1 + \ldots\ldots + p_{m-3}\, x_{m-3} = s''_{m-3} \end{array} \right.$$

posto

$s''_0 = s_0 - r_0 x_{m-1} - q_0 x_{m-2}$; $s''_1 = s_1 - r_1 x_{m-1} - q_1 x_{m-2}$; etc.,

e dalle (60) $x_0 = \frac{A''}{V''}$; $x_1 = \frac{B''}{V''}$; etc.; $x_{m-3} = \frac{P''}{V''}$.

Si avrà pure in questo caso dalle (1)

$$x_0 = \frac{A}{V} = \frac{0}{0}; \quad x_1 = \frac{B}{V} = \frac{0}{0}; \ldots\ldots; \quad x_{m-3} = \frac{P}{V} = \frac{0}{0},$$

e il numero de' coefficienti indipendenti fra loro nelle (1) sarà $(m+1)(m-2)$, mentre gli altri di numero $2(m+1)$ si considerano arbitrarj. Una metà degli ultimi si ha dalle equazioni $A=0$; $B=0$; ....; $V=0$ come nel caso antecedente; ma di più ora può aversi eziandio dalle (59) $V'=0$, e avvertendo che V' non contiene alcuna incognita, laddove A', B',..., Q' contengon ciascuna la x_{m-1}, come A'', B'', ..., P'' contengon le x_{m-1}, x_{m-2} che non affettano V''.

27. Esteso il ragionamento ad $m-n$ equazioni ed m incognite, osserviamo che $m-n$ di queste si esprimeranno deducendole dalle equazioni

$$(61)\quad \left\{ \begin{array}{l} a_0 \quad x_0 + b_0 \quad x_1 + \ldots\ldots + h_0 \quad x_{m-n+1} = s_0^{(n)} \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_{m-n+1} x_0 + b_{m-n+1} x_1 + \ldots\ldots + h_{m-n+1} x_{m-n+1} = s_{m-n+1}^{(n)} \end{array} \right.$$

ove pongasi

$$s_0^{(n)} = s_0 - r_0 x_{m-1} - q_0 x_{m-2} - \ldots\ldots - i\, x_{m-n}; \quad \text{etc.};$$

e potremo aver sempre

$A=0$, $B=0$, ..., $R=0$, $V=0$; $V'=0$; $V''=0$; ....., $V^{(n-1)}=0$,

le quali serviranno a determinar un numero $m-n$ dei coefficienti arbitrarj delle (1), avendosi poi il numero de' coefficienti indipendenti $=(m+1)(m-n)$. Una parte infine dei coefficienti arbitrarj, di numero $m(n+1)$ rimane del tutto libera, e può prendersi a piacere, senza che ne venga però mai determinata alcuna delle m incognite.

28. Nelle cose dette racchiudesi generalmente l'analisi lineare indeterminata. Due sono dunque i modi di concepire la soluzione dei problemi di questo genere, soluzione che praticamente non può effettuarsi in alcuno; consistente l'uno di quelli in considerar ciascuna delle m incognite esplicitamente rappresentata dai valori $\frac{A^{(n)}}{V^{(n)}}$, $\frac{B^{(n)}}{V^{(n)}}$, col comune denominatore $V^{(n)}$ esplicita e nota funzione razionale dei coefficienti delle $m-n$ equazioni date; consistente l'altro in considerar ciascuna delle m incognite rappresentata dalla forma indeterminata e comune $\frac{0}{0}$, la quale venga somministrata dalle relazioni $A=0$, $B=0$, ..., $R=0$, $V=0$, ..., $V^{(n-1)}=0$, di numero $m+n$; ossia, ciò che è lo stesso, in assumere o formar arbitrariamente le n equazioni lineari non date, e assoggettando i coefficienti di esse, in numero $m+n$, alle indicate relazioni. Convien però confessare che questa seconda maniera di concepir la soluzione del problema indeterminato non è che una veduta analitica, giusta soltanto in generale e speculativamente: poichè quanto al modo concreto e particolare essa riesce vana, come in appresso riconosceremo, per la natura e forma dell' equazioni stesse $A=0$, $B=0$, etc., che non consentono la determinazione di alcuno dei coefficienti arbitrarj; laonde questi invece sono da ritenersi tutti nulli insieme colle introdotte n equazioni. E quindi l'unico modo di svolgere con ulteriori considerazioni e praticamente l'analisi lineare indeterminata riducesi al primo degli accennati.

29. Richiamiamo dalla (19) il valore di r^q, che è quello di V, da cui per le permutazioni si deducono quelli di R, Q, P, ..., B, A. E poichè ciascuna di tali quantità dev' essere $=0$ indipendentemente dai fattori comuni fra V e le A, B, ..., Q, R all' uopo di mostrarne indeterminata ciascuna incognita, così porremo

$$(62)\quad \left\{\begin{array}{l} V = (a,b,c,\ldots q,r) = (b,c,\ldots q,r)\,a_{m-1} - (a,c,\ldots q,r)\,b_{m-1} + \ldots \pm (a,b,\ldots q)\,r_{m-1} = 0 \\ R = (a,b,c,\ldots q,s) = (b,c,\ldots q,s)\,a_{m-1} - (a,c,\ldots q,s)\,b_{m-1} + \ldots \pm (a,b,\ldots q)\,s_{m-1} = 0 \\ Q = -(a,b,c,\ldots r,s) = -(b,c,\ldots r,s)\,a_{m-1} + (a,c,\ldots r,s)\,b_{m-1} - \ldots \mp (a,b,\ldots r)\,s_{m-1} = 0 \\ \vdots \\ B = \mp (a,c,\ldots r,s) = \mp (c,d,\ldots r,s)\,a_{m-1} \pm (a,d,\ldots r,s)\,c_{m-1} \mp \ldots \mp (a,c,\ldots r)\,s_{m-1} = 0 \\ A = \pm (b,c,\ldots r,s) = \pm (c,d,\ldots r,s)\,b_{m-1} \mp (b,d,\ldots r,s)\,c_{m-1} \pm \ldots \pm (b,c,\ldots r)\,s_{m-1} = 0 \end{array}\right.$$

col segno superiore per m dispari e coll'inferiore per m pari. Se fosse richiesto di determinare li $m+1$ coefficienti a_{m-1}, b_{m-1}, ... r_{m-1}, s_{m-1}, ne avremmo quì appunto m+1 equazioni lineari, e quindi saremmo in un caso di analisi determinata: ma di più in questo caso ciascuna delle $m+1$ equazioni manca di uno dei detti coefficienti, e perciò sarebbe questo un caso speciale di analisi lineare determinata. Avviene quì come se nell' equazioni (1) si avesse

$$a_0 = b_1 = c_2 = d_3 = \ldots\ldots = r_{m-1} = 0.$$

Osserviamo le conseguenze di tale ipotesi nell' equazioni (1). In questo caso notabilmente si semplificano tutte le formole della soluzione determinata e abbiamo (Mem. I. §. 9.)

$$(63)\quad \left\{\begin{array}{l} b^a{}_0 = a_1\, b_0 \\ b^a{}_1 = a_2\, b_0 \\ \vdots \\ b^a{}_{m-2} = a_{m-1}\, b_0 \end{array}\right.$$

dalle quali viene la relazione

$$\frac{b^a{}_0 + b^a{}_1 + \ldots + b^a{}_{m-2}}{b_0} = a_1 + a_2 + \ldots\ldots + a_{m-1}\,;$$

ed altre simili proprietà emergeranno dalle permutazioni per le $c^b{}_0$, $c^b{}_1$ .... $d^c{}_0$, $d^c{}_1$, etc. Si ha pure

$$(64)\quad \left\{\begin{array}{ll} (a,b) = a_1\, b_0\,; & (b,c,d) = (c,d)\, b_2 + (b,c)\, d_2\,; \\ (a,c) = a_1\, c_0 & \text{etc.} \\ (b,c) = -\, c_1\, b_0 & \\ (a,d) = a_1\, d_0 & (b,c,d,e) = (c,d,e)\, b_3 - (b,d,e)\, c_3 \\ (b,d) = -\, d_1\, b_0 & \qquad - (b,c,d)\, e_3\,; \\ \text{etc.} & \text{etc.} \end{array}\right.$$

30. Ad esempio siano le equazioni a tre incognite

$$b_0 x_1 + c_0 x_2 = s_0$$

$$a_1 x_0 + c_1 x_2 = s_1$$

$$a_2 x_0 + b_2 x_1 = s_2$$

e i valori di ciascuna incognita (Mem. I. §. 16.) si avranno tosto ridotti come segue

$$x_0 = \frac{c_0 s_1 b_2 - s_0 c_1 b_2 + b_0 c_1 s_2}{b_0 c_1 a_2 + c_0 a_1 b_2}$$

$$x_1 = \frac{s_0 c_1 a_2 - c_0 s_1 a_2 + b_0 c_1 s_2}{b_0 c_1 a_2 + c_0 a_1 b_2}$$

$$x_2 = \frac{b_0 s_1 a_2 + s_0 a_1 b_2 + b_0 a_1 s_2}{b_0 c_1 a_2 + c_0 a_1 b_2}.$$

E quì a digressione analoga mi risovviene l'elegante soluzione del problema nell'Algebra d'Eulero alli Numeri 619. 20. e 21; ove si abbian le equazioni in numero pari a quello delle incognite, ma con due incognite soltanto per ogni equazione e della forma

$$1.^{\circ} \left.\begin{array}{l} y + \frac{1}{a} x = n \\ x + \frac{1}{b} y = n \end{array}\right\} ; \quad 2.^{\circ} \left.\begin{array}{l} z + \frac{1}{a} x = n \\ x + \frac{1}{b} y = n \\ y + \frac{1}{c} z = n \end{array}\right\} ; \quad 3.^{\circ} \left.\begin{array}{l} u + \frac{1}{a} x = n \\ x + \frac{1}{b} y = n \\ y + \frac{1}{c} z = n \\ z + \frac{1}{d} u = n \end{array}\right\} ; \text{ etc.}$$

dalle quali si trae

$$\text{per due incognite} \left.\begin{array}{l} x = n \cdot \frac{ab - a}{ab - 1} \\ y = n \cdot \frac{ab - b}{ab - 1} \end{array}\right\} ; \quad \text{per tre} \left.\begin{array}{l} x = n \cdot \frac{abc - ac + a}{abc + 1} \\ y = n \cdot \frac{abc - ab + b}{abc + 1} \\ z = n \cdot \frac{abc - bc + c}{abc + 1} \end{array}\right\} ;$$

per quattro

$$\left.\begin{aligned} x &= n \,.\, \frac{abcd - acd + ad - a}{abcd - 1} \\ y &= n \,.\, \frac{abcd - abd + ab - b}{abcd - 1} \\ z &= n \,.\, \frac{abcd - abc + bc - c}{abcd - 1} \\ u &= n \,.\, \frac{abcd - bcd + cd - d}{abcd - 1} \end{aligned}\right\} ; \qquad \text{etc.}$$

e quindi per m incognite

$$x = n \,.\, \frac{abcd \ldots r - acd \ldots r + ad \ldots r - \ldots \pm ar \mp a}{abcd \ldots r \mp 1}$$

$$y = n \,.\, \frac{abcd \ldots r - abd \ldots r + abe \ldots r - \ldots \pm br \mp b}{abcd \ldots r \mp 1}$$

$$z = n \,.\, \frac{abcd \ldots r - abce \ldots r + abcf \ldots r - \ldots \pm cr \mp c}{abcd \ldots r \mp 1}$$

etc.

valendo il segno superiore per m pari e l' inferiore per m dispari. Eulero non va oltre i valori e le formole per tre incognite, lasciando per avventura che il lettore ne tragga o ne vegga tosto gli uni e le altre nel caso generale.

31. Per un caso anche più particolare di tre incognite al 1.° grado, e per una facile applicazione geometrica, siano le tre equazioni

$$(65) \qquad \left\{\begin{aligned} x + y &= a \\ x + z &= b \\ y + z &= c \end{aligned}\right\} ; \qquad \text{onde} \qquad \begin{aligned} x &= \frac{a + b - c}{2} \\ y &= \frac{a + c - b}{2} \\ z &= \frac{b + c - a}{2} \end{aligned}$$

e rappresentando con x, y, z tre differenti rette, se ne domandi il triangolo di data superficie $= s$.

Primieramente il triangolo sarà possibile e determinato per le (65), qualora però soltanto sia, com' è noto, la somma di due fra le x, y, z, in qualunque combinazione, maggiore della terza. Si ha diffatti

$$s = \frac{\sqrt{(a+b+c)(3a-b-c)(3b-a-c)(3c-a-b)}}{16} = \frac{\sqrt{(x+y+z)(x+y-z)(x+z-y)(y+z-x)}}{4},$$

valore di s che non può essere quantità reale, ove non sia positivo ciascuno dei fattori $x+y-z$, $x+z-y$, $y+z-x$; mentre se due di essi per la detta realtà si assumessero negativi, nascerebbe l'assurdo che uno dei lati, p. e. x, sarebbe ad un tempo $<z-y$ e $<y-z$, ossia di ugual segno le contrarie differenze, che è manifesta contraddizione.

Il triangolo in 2.° luogo, che abbia per lati le tre rette a, b, c, è sempre possibile, la somma di due lati, ossia ciascuna delle quantità $2x+y+z$, $2y+x+z$, $2z+x+y$ essendo evidentemente maggiore del terzo lato: e infatti si ha in questo caso

$$s = \frac{\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}}{4} = \sqrt{(x+y+z)\,xyz}\ ,$$

espressione di s in x, y, z assolutamente reale.

Che se in 3.° luogo pongasi

$$(66)\qquad \left\{\begin{array}{l} x-y=a' \\ x-z=b' \\ y-z=c' \end{array}\right.$$

il triangolo colle tre date rette a', b', c' è nullo di sua natura, poichè abbiamo

$$s = \sqrt{\frac{(x-y)(x-z)(y-z)(a'+c'-b')}{2}} = 0\ ,$$

e per essere dalle (66) .... $a'+c'-b'=0$: nel qual caso appunto le tre incognite x_0, x_1, x_2 del num. prec. acquistan la forma ed espressione indeterminata $\frac{0}{0}$, come tosto apparisce ponendo nei loro valori

$$b_0=a_1=a_2=+1\ ; \qquad c_0=c_1=b_2=-1\ .$$

E di vero abbiamo quì tre incognite, ma solo due equazioni diverse, la seconda delle (66) non distinguendosi dalla somma della prima e terza di esse.

Pertanto, raccogliendo, il triangolo, colle tre rette qualunque x, y, z per lati, è possibile o no secondo che abbiasi o no la somma di due di esse in ogni combinazione maggiore della terza; è però sempre possibile il triangolo che abbia per lati le rette $x+y$, $x+z$, $y+z$; ed all' opposto è sempre impossibile, come di superficie zero, il triangolo che abbia per lati le rette $x-y$, $x-z$, $y-z$. Di questa guisa mi sembra che debba estendersi e completarsi il noto e comune problema della Geometria più elementare.

32. Un altro esempio di equazioni lineari, che spettano all' analisi indeterminata, benchè il numero delle equazioni eguagli quello delle incognite, si ha nelle seguenti

$$(67)\qquad \left\{\begin{aligned} x+y&=cz\\ x+z&=by\\ y+z&=ax\,. \end{aligned}\right.$$

Facciasi $u=x+y+z$, e ne viene

dalla terza $\quad u=(a+1)x$; $\quad$ ossia..... $\quad x=\frac{u}{a+1}$

dalla 2.ª $\quad u=(b+1)y \quad\quad y=\frac{u}{b+1}$

dalla 1.ª $\quad u=(c+1)z \quad\quad z=\frac{u}{c+1}$.

Perciò sommando

$$u=u\left(\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}\right),$$

ossia $\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}=1$, da cui $c=\frac{(a+1)+(b+1)}{ab-1}$.

Questa relazione sussistendo fra i coefficienti a, b, c, si osservi che la 1.ª delle (67) è inclusa nelle altre 2.ª e 3.ª; cosicchè in tal caso non si ha propriamente che due equazioni fra le tre incognite, e il problema quindi è indeterminato di sua natura. Che se i tre dati a, b, c dovessero essere qualunque e indipendenti fra loro, il problema ne diverrebbe d' impossibile o nulla risoluzione, a meno che non fosse $u=x+y+z=0$.

E già questa equazione si verifica sempre, avendosi parzialmente $x=0$; $y=0$; $z=0$. Infatti per essere nelle equazioni del num. 16. (Mem. I.[a]) $s_0=s_1=s_2=0$, se ne trae $x_0=x_1=x_2=0$, e solamente ciascuna delle incognite diviene $=\frac{0}{0}$, quando sia $c=\frac{(a+1)+(b+1)}{ab-1}$. Perocchè fatto $c_0=-c$; $b_1=-b$; $a_2=a$; $a_0=a_1=b_0=b_2=c_1=c_2=1$, e ammessa la precedente relazione fra a, b, c ne risulta $=0$ il denominator comune delle incognite x_0, x_1, x_2, ossia nel nostro caso quello delle x, y, z. Dunque il problema « trovare tre numeri, le cui somme due a due siano multipli o summultipli dati del terzo » è indeterminato o impossibile e nullo. In generale un problema di analisi lineare apparentemente determinato diverrà indeterminato ogniqualvolta una o più delle m equazioni non è o non sono se non combinazioni delle altre equazioni, ossia sussistono identicamente con esse; il che avviene per una o più relazioni particolari che sussistano fra i coefficienti a_0, a_1, etc.; b_0, etc.; e questa conclusione è l' inversa dell' altra per la quale *speculativamente* riducemmo all' analisi lineare determinata i problemi della indeterminata.

33. Prendiam ora di nuovo a considerar le equazioni $A=0$, $B=0$, ..., $R=0$, $V=0$. Sono esse di numero $m+1$, quante cioè le arbitrarie a_{m-1}, b_{m-1}, ... r_{m-1}, s_{m-1}; e tuttavia non valgono a far conoscere alcuna di tali arbitrarie, attesa la mancanza in tutte di un termine noto $s_0^{(\prime)}$, $s_1^{(\prime)}$, ... $s_m^{(\prime)}$, funzione cioè determinata dei dati coefficienti a_0, a_1 .... a_{m-2}; b_0, b_1 ..... b_{m-2}; etc. E già per essere appunto $s_0^{(\prime)}=s_1^{(\prime)}.....s_m^{(\prime)}=0$, e dalla forma generale del valore di ciascuna incognita nell' analisi lineare determinata se ne ha sempre $a_{m-1}=b_{m-1}=.....=r_{m-1}=s_{m-1}=\frac{0}{V'}$. Quindi, come nel caso precedente (num. 32.) che ora generalizziamo, o deve porsi realmente $a_{m-1}=b_{m-1}=.....=r_{m-1}=s_{m-1}=0$; il che torna lo stesso di considerar nulla, termine per termine, l' equazione emmesima introdotta; o ciascuna delle dette arbitrarie a_{m-1}, etc. deve considerarsi

essa pure, al pari delle incognite $x_0, \ldots\ x_m$, come una indeterminata ed espressa da $\frac{0}{0}$ per la coesistenza dell' equazione $V'=0$, che è una relazione fra i coefficienti noti $a_0, a_1 \ldots\ a_{m-2}, b_0$, etc. Dunque anche nell' analisi lineare determinata, e vale a dire nell' equazioni (1) (num. 2. Mem. I.ª) mancando tutti i secondi membri, o avendosi $s_0 = s_1 = \ldots = s_{m-1} = 0$, sarà pure $=0$ il valore di ciascuna incognita $x_0, x_1, \ldots\ x_m$, e quindi per nullità di risoluzione il problema impossibile; fin che però i coefficienti dati $a_0, a_1, \ldots\ a_{m-1}, b_0$, etc., r_{m-1} siano tutti qualunque, ossia liberi e indipendenti fra loro. Conciossiacchè nel caso che tali coefficienti soddisfino all'equazione $V=0$, il problema invece riuscirà indeterminato per essere ciascuna incognita $=\frac{0}{0}$ assolutamente. Che se poi sussista la $V=0$, o anche sia nullo semplicemente un fattore di V non comune ad A, B, ..., R, senza che siano in pari tempo $=0$ tutti e ciascuno dei termini noti $s_0, s_1, \ldots\ s_{m-1}$, allora il problema è impossibile, non per nullità di risoluzione, bensì (num. 4. Mem. I.ª) per una specie di assurdità espressa dalla forma del valor infinito delle incognite.

34. Poichè dunque alla trattazione dell' Analisi lineare indeterminata nella generalità dei casi non può servire che il primo dei due metodi accennati al num. 28., ad esso è necessità ricorrere nella cercata soluzione dei relativi problemi. Contuttociò le formole dell' Analisi lineare determinata che ottenni e presentai nella Memoria I.ª giovan quì pure a racchiudere ed esprimère i procedimenti generali del calcolo e le relazioni delle quantità date e incognite. A dimostrar ciò incominciamo da un caso particolare, e sia quello di quattro incognite, fra le quali abbiansi da prima le tre seguenti equazioni:

$$(68)\quad \begin{cases} a_0 x_0 + b_0 x_1 + c_0 x_2 + d_0 x_3 = s_0 \\ a_1 x_0 + b_1 x_1 + c_1 x_2 + d_1 x_3 = s_1 \\ a_2 x_0 + b_2 x_1 + c_2 x_2 + d_2 x_3 = s_2 \end{cases}$$

Pongasi..... $s'_0 = s_0 - d_0 x_3$; $s'_1 = s_1 - d_1 x_3$; $s'_2 = s_2 - d_2 x_3$. E introdotti nelle (68) li s'_0, s'_1, s'_2, sciolgansi tali equazioni per le tre incognite x_0, x_1, x_2. Avremo (Mem. I.ª num. 16.)

$$x_2 = \frac{(a,b,s')}{(a,b,c)}; \qquad x_1 = -\frac{(a,c,s')}{(a,b,c)}; \qquad x_0 = \frac{(b,c,s')}{(a,b,c)}.$$

E sviluppando e riducendo col rimettere per li s' i rispettivi valori, si ottiene

$$(69) \quad \begin{cases} x_2 = \dfrac{(a,b,s)}{(a,b,c)} - \dfrac{(a,b,d)}{(a,b,c)} x_3 \\ x_1 = -\dfrac{(a,c,s)}{(a,b,c)} + \dfrac{(a,c,d)}{(a,b,c)} x_3 \\ x_0 = \dfrac{(b,c,s)}{(a,b,c)} - \dfrac{(b,c,d)}{(a,b,c)} x_3 . \end{cases}$$

In secondo luogo fra le stesse quattro incognite sussistano solamente le prime due (68) e facciasi

$$s''_0 = s_0 - c_0 x_2 - d_0 x_3; \qquad s''_1 = s_1 - c_1 x_2 - d_1 x_3.$$

Si ha $$x_1 = \frac{(a,s'')}{(a,b)}; \qquad x_0 = -\frac{(b,s'')}{(a,b)}.$$

Dalle quali equazioni, svolgendo i secondi membri e rimettendovi per li s'' i rispettivi valori, si ricava:

$$(70) \quad \begin{cases} x_1 = \dfrac{(a,s) - (a,c)x_2 - (a,d)x_3}{(a,b)} \\ x_0 = \dfrac{-(b,s) + (b,c)x_2 + (b,d)x_3}{(a,b)} . \end{cases}$$

E finalmente, qualora fra le quattro incognite non sussista che la sola prima delle (68), ne risulta immediatamente .... $x_0 = \frac{s_0'''}{a_0}$, ovvero

$$(71) \qquad x_0 = \frac{s_0 - b_0 x_1 - c_0 x_2 - d_0 x_3}{a_0}.$$

35. Raccogliamo da queste determinazioni che l' espressione o il valor esplicito di ciascuna delle incognite, scelte in egual numero a quello delle condizioni o equazioni del problema lineare indeterminato, si ha esso pure sotto forma

lineare; e vale a dire che ciascuna delle altre incognite e indeterminate vi si trova al primo grado e in termini di una sola dimensione. Inoltre si osservi che nel detto esplicito valore delle incognite, uguali in numero all' equazioni date, il termine noto altro non è che il valor dell' incognita rispettiva nel caso che il problema fosse determinato; il che naturalmente risponde al supporre eguale a zero ciascuna delle incognite eccedenti il numero delle equazioni, ossia che restano indeterminate. E i coefficienti di queste nel valore di quella sono essi pure quantità note ed esplicite, composte cioè dei dati del problema, deducendosi poi tostamente le medesime dal termine noto colla semplice permutazione degli s delle equazioni primitive nel rispettivo coefficiente che ivi ha l' incognita e indeterminata che si considera. Rispetto da ultimo ai segni osserviamo nelle (69), (70) e (71) che ogni termine affetto dalle incognite indeterminate è di segno contrario al termine noto: laonde concludiamo da tutte le circostanze e regole avvertite che la risoluzione di un problema lineare indeterminato si riduce sempre ad una o più equazioni della forma:

$$x_0 = \alpha - \ldots\ldots - \alpha^{(s,q)}\, x_{m-2} - \alpha^{(s,r)}\, x_{m-1}, \tag{72}$$

intendendo per $\alpha^{(s,r)}$, $\alpha^{(s,q)}$, ecc. il termine noto α del corrispondente problema lineare determinato, cangiativi rispettivamente li s nelli r, nei q, e così di seguito.

36. Benchè la conclusione precedente siasi dedotta dalla considerazione del caso particolare di quattro incognite, nondimeno essa è generale, ossia regge per m incognite ed un numero $m-n$ di equazioni lineari, e può esser dimostrata, come dicesi, *a priori*. Imperocchè facendosi dipendere nel modo praticato la soluzion del problema indeterminato da quella del determinato, esprimendo cioè ciascuna delle $m-n$ incognite pei dati del problema e per le n incognite rimanenti, è da riflettere che li $s^{(n)}$ o li s accentati sono funzioni lineari di queste ultime, come i valori $\frac{A^{(n)}}{V^{(n)}}$, $\frac{B^{(n)}}{V^{(n)}}$, etc. delle

prime sono funzioni lineari delli $s^{(n)}$; e quindi le $m-n$ incognite debbon essere funzioni lineari delle restanti n. D'altronde il valor esplicito di ciascuna delle $m-n$ dev' esser tale che, supposte $=0$ tutte e ciascuna delle n, ne risulti il valore del problema determinato e dedotto, nella stessa ipotesi, dall' equazioni date e di egual numero $m-n$: perciò il termine noto di ciascuna incognita non può essere che quello somministrato dalla corrispondente soluzione determinata e lineare, ove per la fatta ipotesi non entrano li s accentati. Ma egli è poi indifferente di prendere fra le $m-n$ incognite e determinabili le une anzichè le altre di tutte le m incognite del problema; e conseguentemente nel valore di ciascuna delle $m-n$, scelte in generale ad arbitrio, il coefficiente di ciascuna delle n indeterminate sarà tale da somministrar il denominatore del termine noto quando fosse $=0$ l' incognita principale e ne prendesse il posto l'indeterminata di cui trattasi; il che non importa che una semplice permutazione dei coefficienti dell'equazioni date nel numeratore del termine noto che realmente si considera. E riguardo infine ai segni egli è pur chiaro dal valore delli s accentati che i termini affetti dalle indeterminate n nell' espressione di ciascuna delle $m-n$ debbono tutti aver segno contrario a quello del termine noto.

37. Ciò dimostrato, sia ora nelle equazioni (1) (delle quali non ammettiam sussistere che le prime di numero $m-n$) k il coefficiente numerico dell' incognita $x_{m-(n+1)}$, e distinto al solito dall' una all' altra equazione coi numeri $0, 1, 2, \ldots. n-1$ al piede. Per le suesposte ragioni si avrà:

$$(73)\quad \left\{ \begin{aligned} x_{m-(n+1)} &= \frac{\pm(a,b\ldots.h,i,s)\mp[(a,b\ldots.i,l)x_{m-n}+\ldots.+(a,b\ldots.i,q)x_{m-2}+(a,b\ldots.i,r)x_{m-1}]}{(a,b\ldots..h,i,k)} \\ x_{m-(n+2)} &= \frac{\mp(a,b\ldots.h,k,s)\pm[(a,b\ldots.h,k,l)x_{m-n}+\ldots.+(a,b\ldots.k,q)x_{m-2}+(a,b\ldots k,r)x_{m-1}}{(a,b\ldots..h,i,k)} \\ &\vdots \\ x_1 &= \frac{\pm(a.c\ldots.i,k,s)\mp[(a,c\ldots.k,l)x_{m-n}+\ldots.+(a,c\ldots.k,q)x_{m-2}+(a,c\ldots.k,r)x_{m-1}]}{(a,b\ldots..h,i,k)} \\ x_0 &= \frac{\mp(b,c\ldots.i.k,s)\pm[(b,c\ldots.k,l)x_{m-n}+\ldots.+(b,c\ldots k,q)x_{m-2}+(b,c\ldots.k,r)x_{m-1}]}{(a,b\ldots..h,i,k)} \end{aligned} \right.$$

valendo il segno superiore per $m-n$ pari e l' inferiore per $m-n$ dispari. Tal è dunque il valore che hanno le incognite, in numero $m-n$ eguale a quello dell'equazioni date, espresso linearmente per le rimanenti n incognite e arbitrarie. E tale per conseguenza è la risoluzione del problema lineare indeterminato e più generale, non trattandosi in questo che di esprimere appunto alcune qualsivogliano delle incognite pei dati del quesito e per le altre incognite che necessariamente e per le sole equazioni di condizione restan libere a poter prendere ogni valore. Una siffatta risoluzione mancava, per quanto io mi sappia, e non trovasi esposta da veruno degli Autori e libri di analisi algebrica elementare, nè poteva essa raggiungersi fuor che derivandola come abbiam fatto dalla soluzion esplicita e generale del problema lineare determinato. Egli è questo pertanto un altro vantaggio delle generali formole (Mem. I.ª num. 16.) che porgono il valore di m incognite da un egual numero di equazioni e costituito dai coefficienti di queste con semplicissima e determinata legge; ed ora egli è pur manifesto che tutte le soluzioni dell' Analisi lineare, siano cioè di problemi o determinati, o piucchè determinati, o indeterminati scaturiscono, come da sorgente unica, e perciò si racchiudono nel solo teorema o principio che fu dimostrato al num. 2. Mem. I.ª

38. Allorchè nel problema lineare indeterminato le m incognite possano esser qualunque e non soggette ad altre condizioni fuori delle $m-n$ equazioni, per ciascuna delle n incognite arbitrarie il problema stesso può ricevere infinite soluzioni diverse, e quindi per tutte le n arbitrarie in generale, come apparisce dalle (73), il numero delle soluzioni sarà n volte infinito. Oltre però le condizioni intrinseche, onde legansi per equazioni le incognite ai dati, altre condizioni posson richiedersi, estrinseche e speciali, appartenenti cioè alle specie particolari delle quantità in questione, donde veramente non nasce alcun vincolo novello di equazione fra dati ed incognite, ma si restringon i valori possibili di queste entro

certi limiti dipendentemente dall'equazioni stesse del problema. Il numero delle soluzioni viene allora corrispondentemente limitato, e di leggieri pure il problema non ammette soluzione alcuna; il che però deve intendersi relativamente solo alle dette condizioni speciali. Riduconsi queste dalla comune degli Algebristi al caso che le incognite debban essere numeri interi, o positivi, o l'uno e l'altro insieme. Ciò non cangia evidentemente le altre condizioni e il numero $m-n$ delle equazioni che le esprimono; ma s'introduce in esse per l'aggiunta condizione un tale ostacolo e impedimento vicendevole fra le incognite, per cui, oltre al limitarsene il numero delle soluzioni, si esige altresì una particolare sagacità di metodi e di artifici nell'ottenerle; per lo che dice a ragione l'Eulero che « *cette partie de l'analyse sert beaucoup à aiguiser l'esprit des commençans et à leur donner de l'adresse dans le calcul.* » A procedere tuttavia colle debite avvertenze in questo soggetto di indagini tratteniamoci ancora in alcune considerazioni.

39. E primieramente a risolvere il problema lineare indeterminato e più generale colle incognite intere e positive si richiederebbe d'indagare e stabilire i rapporti che debbon sussistere fra i coefficienti delle $n+1$ incognite in ciascuna delle (73), o almeno in una di esse, per dedurne i criterj della possibile risoluzione e i limiti della medesima. Ho detto almeno in una di esse, poichè trovati i valori delle n incognite arbitrarie che rendon intera e positiva, per esempio, la x_0, è chiaro che la completa soluzione si otterrà da quelli soltanto de' precedenti valori delle n arbitrarie, che somministran numeri interi e positivi eziandio per ciascuna delle x_1, x_2, fino alla $x_{m-(n+1)}$. Convien però confessare che in tanta generalità di concetto e di rappresentazion algebrica delle quantità non è per avventura da sperare di giungere per questa via, comecchè la più conforme allo spirito e andamento dell'Analisi, allo scopo che sarebbe di risolvere direttamente coll'accennata condizion delle incognite intere e positive le equazioni (73) nel loro complesso, e di fissarne le

norme di applicazione ai casi e problemi particolari. Egli è in vista di tale complicazione e difficoltà della soluzione diretta e generale che gli Analisti in questa parte del calcolo seguon tutti il metodo inverso, qual è di procedere dal particolare al generale. Primo di essi il Bachet di Meziriac pervenne di fatto a risolvere compiutamente l' equazion lineare a due sole incognite e coi coefficienti qualunque

$$ax - by = c \tag{74}$$

e il suo metodo, giudicato da Lagrange, che ne rivendicava la priorità, quanto ingegnoso e diretto, altrettanto elegante e generale, consiste nel derivar la soluzione della (74) dall'altra

$$ax - by = \pm 1$$

e determinando in questa il massimo comun divisore di a e b. Il Lagrange medesimo nel §. III. delle sue belle Annotazioni all'Analisi indeterminata d'Eulero presentando colla eleganza di lui propria la soluzione compiuta della (74) in numeri interi e positivi, dichiarava però di non averne cangiata in fondo la soluzione del Bachet. Ma di più fece il Ruffini, riuscito ad estendere il metodo di Bachet, variato di forma da Lagrange, ad un'equazione lineare con un qualunque numero d' incognite. Imperocchè, dimostrato che un' equazione

$$Ax + By = P \tag{75}$$

non può risolversi in numeri interi per x e y se i coefficienti A, B e P non abbiano un massimo divisor comune per cui ridurli a numeri primi fra loro, ed eseguitane la soluzione con questa condizione, il Ruffini con analogo procedimento risolve in numeri interi e positivi l' equazione

$$Ax + By + Cz = P, \tag{76}$$

indi l' altra

$$Ax + By + Cz + Du = P, \tag{77}$$

sempre che o tutti i coefficienti A, B, C, etc., P abbian un massimo divisor comune, o almeno fra il massimo divisor

comune di A, B e i coefficienti successivi C, P si trovi un fattore parimente comune. Ed è pur chiaro dalle operazioni praticate e dai risultamenti ottenuti, ossia per induzione, che il processo medesimo è applicabile per la chiesta soluzione ad un'equazione lineare di un numero qualunque $n+1$ d'incognite, e perciò ad una delle nostre (73), per esempio alla prima, posta sotto la forma

$$(78) \quad \left\{ \begin{array}{c} (a, b \dots h, i, k)\, x_{m-(n+1)} \\ \pm [(a, b \dots i, l)\, x_{m-n} + \dots + (a, b \dots i, r)\, x_{m-1}] \\ = \pm (a, b \dots h, i, s) . \end{array} \right.$$

Avvertasi di più che quì anzi abbiamo i coefficienti A, B delle due prime incognite ridotti algebraicamente ai minimi termini per la scomparsa del massimo divisor comune (Mem. I. num. 14.); per lo che algebraicamente la (78) è risolvibile in numeri interi e positivi. Cionondimeno quando vengasi a caso pratico e particolare, cioè a valori numerici di A, B, se questi non siano aritmeticamente primi fra loro e restando interi gli altri coefficienti C, D, P della (78), la soluzione richiesta sarà impossibile. Dipoi sussiste sempre la difficoltà che, risoluta pure la (78) non è sciolto ancora il problema lineare indeterminato e generale, che richiede la soluzion complessiva delle (73), e non di una sola, in numeri positivi ed interi.

40. Scegliamo ad esempio le tre equazioni numeriche a quattro incognite, proposte da Ruffini (Alg. element. num. 159. pag. 171.), che tacendone la soluzione le offre allo studioso per esercizio e come applicazione del suo metodo ai varj casi. Sono esse le seguenti:

$$(79) \quad \left\{ \begin{array}{r} 30x + 20y + 50z + 15u = 375 \\ 84x + 105y + 14z + 49u = 364 \\ 264x + 48y + 30z + 21u = 669 . \end{array} \right.$$

Si ha la soluzione della prima in numeri interi e positivi dal soddisfare al complesso e a ciascuna ordinatamente delle condizioni:

$$(80)\quad \left\{\begin{array}{lll} x = t - 5z - 2r\,; & q < 37\frac{1}{2}\,; & \\ y = 5z - t + 3r & \quad > 25 & z < \frac{t-2r}{5} \\ u = 75 - 2q & r < \frac{t}{2} & \quad > \frac{t-3r}{5}\,. \\ t = 3q - 75 & \quad > 0 & \end{array}\right.$$

Fra i limiti di q se ne ottengono 63 soluzioni differenti, che sottopongo in una tabella, e possono verificarsi corrispondendo una soluzione ai valori di ciascuna riga orizzontale.

q	t	r	u	z	y	x
29	12	3	17	1	2	1
30	15	2	15	2	1	1
30	15	4	15	1	2	2
31	18	5	13	1	2	3
31	18	6	13	1	5	1
32	21	5	11	2	4	1
32	21	6	11	1	2	4
32	21	7	11	1	5	2
33	24	4	9	3	3	1
33	24	5	9	2	1	4
33	24	6	9	2	4	2
33	24	7	9	1	2	5
33	24	8	9	1	5	3
33	24	9	9	1	8	1
34	27	3	7	4	2	1
34	27	4	7	3	0	4
34	27	5	7	3	3	2
34	27	6	7	2	1	5
34	27	7	7	2	4	3
34	27	8	7	2	7	1

q	t	r	u	z	y	x
34	27	8	7	1	2	6
34	27	9	7	1	5	4
34	27	10	7	1	8	2
35	30	2	5	5	1	1
35	30	4	5	4	2	2
35	30	6	5	3	3	3
35	30	7	5	3	6	1
35	30	7	5	2	1	6
35	30	8	5	2	4	4
35	30	9	5	2	7	2
35	30	9	5	1	2	7
35	30	10	5	1	5	5
35	30	11	5	1	8	3
35	30	12	5	1	11	1
36	33	3	3	5	1	2
36	33	5	3	4	2	3
36	33	6	3	4	5	1
36	33	7	3	3	3	4
36	33	8	3	3	6	2
36	33	8	3	2	1	7
36	33	9	3	2	4	5
36	33	10	3	2	7	3
36	33	10	3	1	2	8
36	33	11	3	2	10	1
36	33	11	3	1	5	6
36	33	12	3	1	8	4
36	33	13	3	1	11	2
37	36	4	1	5	1	3
37	36	5	1	5	4	1
37	36	6	1	4	2	4
37	36	7	1	4	5	2
37	36	8	1	3	3	5
37	36	9	1	3	6	3
37	36	9	1	2	1	8
37	36	10	1	3	9	1
37	36	10	1	2	4	6
37	36	11	1	2	7	4
37	36	11	1	1	2	9
37	36	12	1	2	10	2
37	36	12	1	1	5	7
37	36	13	1	1	8	5
37	36	14	1	1	11	3
37	36	15	1	1	14	1

Per la seconda equazione (79) debbono adempirsi le relazioni

$$(81)\quad \left\{\begin{array}{lll} x = 5r - t\ ; & q < 26\ ; & \\ y = t - 4r & \quad > 0 & r < \frac{t}{4} \\ t = 52 - 7u - 2q & u < \frac{52 - 2q}{7} & \quad > \frac{t}{5}\ . \\ z = 3q + 7u - 52 & \quad > \frac{52 - 3q}{7} & \end{array}\right.$$

e queste somministrano soltanto le tre soluzioni in numeri interi e positivi che seguono:

1.ª	$q = 11$;	$t = 9$;	$r = 2$;	$u = 3$;	$z = 2$;	$y = 1$;	$x = 1$
2.ª	$= 16$	$= 13$	$= 3$	$= 1$	$= 3$	$= 1$	$= 2$
3.ª	$= 18$	$= 9$	$= 2$	$= 1$	$= 9$	$= 1$	$= 1$.

E da ultimo per la terza equazione (79), risolubile in numeri interi e positivi, avendosi da soddisfare al seguente complesso di condizioni

$$(82)\quad \left\{\begin{array}{lll} x = 2r - t\ ; & & \\ y = 6t - 11r & p < 111\tfrac{1}{2}\ ; & \\ t = 5q - v & \quad > 95\tfrac{4}{7} & r < \frac{6t}{11} \\ z = v - 4q & q < \frac{v}{4} & \quad > \frac{t}{2} \\ v = 7p - 669 & \quad > \frac{v}{5} & \\ u = 223 - 2p & & \end{array}\right.$$

ne risultano le sei soluzioni diverse che quì presento:

1.ª	$p = 106$;	$v = 73$;	$q = 18$;	$r = 9$;	$u = 11$;	$z = 1$;	$y = 3$;	$x = 1$
2.ª	$= 107$	$= 80$	$= 19$	$= 8$	$= 9$	$= 4$	$= 2$	$= 1$
3.ª	$= 108$	$= 87$	$= 20$	$= 7$	$= 7$	$= 7$	$= 1$	$= 1$
4.ª	$= 110$	$= 101$	$= 24$	$= 10$	$= 3$	$= 5$	$= 4$	$= 1$
5.ª	$= 110$	$= 101$	$= 25$	$= 13$	$= 3$	$= 1$	$= 1$	$= 2$
6.ª	$= 111$	$= 108$	$= 25$	$= 9$	$= 1$	$= 8$	$= 3$	$= 1$.

Allorchè dunque le tre equazioni (79) si prendono separatamente una dall' altra, come appartenessero a tre problemi differenti, ne abbiamo in tutto, a numeri positivi ed interi e col metodo di Ruffini, 72 soluzioni. Per una sola di queste, la sedicesima della prima equazione, abbiam trovato una delle quattro incognite, la $y = 0$. E quì osserviamo che il caso delle incognite nulle è compreso necessariamente nel metodo praticato, poichè la condizione delle quantità positive o negative espressa rispettivamente dal segno $>$ o oppure $<$ o include sempre di propria natura eziandio lo zero, che non è numero ma termine comune alla serie de' numeri positivi e a quella de' negativi; nè saprebbesi forse esprimere in calcolo generale o algebrico una quantità non < 0 ovvero non > 0 per escluderne lo zero. Quindi mi sembra una piccolissima inesattezza di linguaggio nel Ruffini (che pur era sì perspicace ed acuto nel rigor dell' idea e della parola) il dirsi da lui (Alg. num. 159. V. pag. 170-71) « che il numero delle soluzioni sarebbe stato maggiore, e si avrebbero ottenute queste ulteriori soluzioni, ponendo le espressioni, a cui le x, y, z, etc. si ugnagliano, non < 0. »

41. Che se le tre equazioni (79) dovessero sussistere insieme, come appartenenti allo stesso problema, facilmente ora vedrebbesi che tale problema non ammette soluzione a valori positivi ed interi; perocchè niuna delle tre soluzioni precedenti dell' equazione 2.ª è comune nel valor delle incognite ad alcuna di quelle dell'equazioni 1.ª e 3.ª Ma se ogni volta che un problema lineare indeterminato conduce a più di una equazione dovesse cercarsene la soluzione a questo modo, risolvendo cioè separatamente ciascuna equazione e rilevando poscia fra tutte le possibili e separate soluzioni se alcuna ve n' ha di comuni, sarebbe indagine troppo lunga e faticosa. Le formole del mio metodo prestandosi alla risoluzion immediata del problema o caso complessivo risparmiano tale fatica, deducendosi da esse a colpo d'occhio nella specialità de' problemi, se questi ammettano o no la cercata soluzione a numeri

interi e positivi per le incognite. Così nell'esempio precedente, ossia conducendo il problema alle tre equazioni (79) sussistenti a un tempo, e queste conformandosi alle (68) del Num. 33., si ha la complessiva risoluzione di esse immediatamente dalle (69). Posto pertanto $x_0 = x$; $x_1 = y$; $x_2 = z$; $x_3 = u$; per semplificazione di calcolo divisa la prima delle (79) per 5, la seconda per 7 e la terza per 3, onde abbiasi

$$\begin{array}{lllll} a_0 = 6\,; & b_0 = 4\,; & c_0 = 10\,; & d_0 = 3\,; & s_0 = 75 \\ a_1 = 12 & b_1 = 15 & c_1 = 2 & d_1 = 7 & s_1 = 52 \\ a_2 = 88 & b_2 = 16 & c_2 = 10 & d_2 = 7 & s_2 = 223 \end{array}$$

e calcolati con questi valori numerici i coefficienti (a, b, c), (a, b, d), (a, c, d), (b, c, d), (a, b, s), (a, c, s) e (b, c, s), le (69) in questo caso diventano

$$(83) \qquad \begin{cases} 10348\,.\,z = 61922 - 1298\,.\,u \\ 10348\,.\,y = 14356 - 4816\,.\,u \\ 10348\,.\,x = 16576 - 1848\,.\,u \end{cases}$$

nella seconda delle quali si scorge tosto che al minimo valore intero e positivo di u, ossia per $u = 1$ il valore della y è già frazionario e che quindi esso non può mai divenir intero, impicciolendosi anzi coi valori crescenti di u. Dunque il problema complessivo dell'equazioni (79) non ammette soluzione di numeri interi e positivi per le sue quattro incognite. E così nell' addotto esempio toccasi con mano, che sebbene un problema lineare indeterminato possa ricevere un grandissimo numero di soluzioni particolari a valori positivi e interi delle incognite nelle sue singole equazioni, tuttavia nel complesso di queste può riuscir insolubile nella stessa condizione speciale delle incognite; e conchiudendosi il contrario nell'inversa proposizione, e val a dire che ogni soluzione complessiva di un problema lineare indeterminato a valori positivi ed interi delle incognite è sempre una soluzion particolare di ciascuna equazione di esso.

42. A fissare ora le idee sul modo analitico di concepire ed effettuare la risoluzione dei problemi di primo grado, indeterminati ma coi valori delle incognite interi e positivi, riflettiamo che il caso generale più semplice, come il più vicino all' Analisi lineare determinata, è quello di un numero $m-1$ di equazioni date, ritenuto sempre m il numero delle incognite x_0, x_1, etc., x_{m-1}. In questo caso la soluzion complessiva e coll' indicata condizione speciale si otterrà, ove sia possibile, da un numero $m-1$ di equazioni, a due sole incognite ciascuna, conformi alle (69), e considerate sussistere insieme, le quali potranno esprimersi dal sistema

$$(84)\quad \left\{\begin{array}{llll} A_0\, x_{m-2} & + A_1 & x_{m-1} & = V_0 \\ A_0\, x_{m-3} & + A_2 & x_{m-1} & = V_1 \\ \text{etc.} & & & \quad\text{etc.} \\ A_0\, x_0 & + A_{m-1} & x_{m-1} & = V_{m-2} \end{array}\right.$$

componendosi A_0, A_1, A_{m-1}, V_0, etc., V_{m-2} immediatamente e colla nota legge dai coefficienti numerici delle equazioni date. Similmente nel caso di $m-2$ equazioni del problema, si ha, per risolverlo complessivamente, un egual numero di equazioni a tre incognite, conformi alle (70), e che possono in generale rappresentarsi dal sistema

$$(85)\quad \left\{\begin{array}{llllll} B_0\, x_{m-3} & + B_1 & x_{m-2} & + A_1 & x_{m-1} & = S_0 \\ B_0\, x_{m-4} & + B_2 & x_{m-2} & + A_2 & x_{m-1} & = S_1 \\ \text{etc.} & & & & & \quad\text{etc.} \\ B_0\, x_0 & + B_{m-2} & x_{m-2} & + A_{m-2} & x_{m-1} & = S_{m-3} \end{array}\right.$$

e così di seguito, finchè per $m-n$ equazioni date si avrà un simile sistema di $m-n$ equazioni, ciascuna ridotte a contenere sole $n+1$ incognite, e saranno queste le (73). Notisi ancora che all' aumentare la difficoltà della soluzione col numero delle incognite nelle equazioni ridotte dall'uno all'altro caso, diminuisce o si semplifica successivamente la composizione dei coefficienti di tali equazioni; in guisa che li A_0, A_1, etc.

delle (84) sono men complicati dei B_0, B_1, etc. S_0 etc. delle (85); laonde il caso generale realmente più arduo e a coefficienti più semplici è quello di una sola data equazione con m incognite, qual è per quattro di queste il caso della (71).

43. Finalmente vediamo pure un esempio di una soluzione complessiva, facilitata dalle nostre formole, e prendiamolo nell' elegante problema d' Eulero (Elem. d' Algebra: Analisi indeterminata: Cap. II. num. 30.) in cui cercansi tre numeri positivi e interi, tali che moltiplicandone uno per 3, il secondo per 5, e il terzo per 7 abbiasi la somma dei prodotti = 560, e che di più moltiplicati rispettivamente pei quadrati di 3, 5 e 7 formino la somma dei nuovi prodotti = 2920. Si ha dunque a risolvere le due equazioni che sussistono insieme

$$(86)\qquad \begin{cases} 3x + 5y + 7z = 560 \\ 9x + 25y + 49z = 2920. \end{cases}$$

Riduconsi esse immediatamente alle due

$$(87)\qquad \begin{cases} (a, b)x_1 = (a, s) - (a, c)x_2 \\ (a, b)x_0 = -(b, s) + (b, c)x_2 \end{cases}$$

e fatto in queste $x_2 = z$; $x_1 = y$; $x_0 = x$; e composti coi dati delle (86) i coefficienti (a, b), (a, c), (b, c), (a, s), (b, s), se ne ha tosto

$$(88)\qquad \begin{cases} 5y = 620 - 14z \\ 3x = -60 + 7z \end{cases}$$

nelle quali a colpo d'occhio rilevasi che z dev'esser multiplo insieme di 3 e di 5, ossia di 15. Ma per la prima delle (88) y comincia a divenir negativo da $z = 45$. Dunque avremo due sole soluzioni che saranno

1.ª per $z = 15$	. . . .	2.ª per $z = 30$
$y = 82$		$y = 40$
$x = 15$		$x = 50$

al qual noto risultamento ci ha condotti, non la così detta *Regula cœci*, bensì la facile applicazione di un'Analisi diretta e generale.

RICERCHE RELATIVE ALLE CURVE INVILUPPI

MEMORIA

DI EMMANUELE FERGOLA

Presentata dal Socio Cav. Vincenzo Flauti
e approvata dal Socio e Segretario Prof. Giuseppe Bianchi.

Tra le ricerche che presentano degli ostacoli al Geometra v' ha senza dubbio quei problemi che riguardano curve inviluppi, ostacoli in vero nascenti non da difetto di teoriche, ma da difficoltà di calcolazioni; queste però sono spesso gravissime, mentre il più delle volte si va incontro ad eliminazioni imbarazzanti le quali adombrano o quasi nascondono i veri risultamenti, da che le teoriche rimangono inabili ed infruttuose. E per darne un solo esempio ricorderò il problema in cui si cerca l' inviluppo delle corde di costante grandezza iscritte in una data curva; nel qual problema, ancorchè voglia questa curva limitarsi a quelle del second' ordine, pure per lunga pezza, a malgrado i tentativi di molti geometri, non venne fatto di riconoscere il grado dell' inviluppo, che solamente da poco tempo un nostro geometra, partendo da estranee considerazioni rinvenne dell' ottavo grado. Non ostante però le difficoltà di tali ricerche il Sig. Magnus, distinto analista di Berlino, mostrò (1) che era sempre possibile determinare il punto di contatto tra l' inviluppo e la retta mobile che lo genera, mediante costruzioni più o meno semplici; e con un giudizioso maneggio di alcune formole differenziali, egli riescì a compiere eleganti soluzioni ai quattro seguenti problemi:

(1) *Gergonne. — Annales de mathématiques*; Vol. XVI.

1°. *Determinare il punto di contatto dell' inviluppo delle corde d' una curva piana qualunque, che tagliano da essa segmenti di costante grandezza con una di tali corde.*

2°. *Determinare il medesimo punto di contatto, quando tutte le corde debbono tagliare dalla curva archi eguali.*

3°. *Determinare lo stesso punto allorchè le corde sono di grandezza costante.*

4°. *Determinare il medesimo contatto assoggettando le corde ad esser tali, che le due tangenti applicate agli estremi di ciascuna di esse comprendano angoli eguali.*

Or io, nell' applicare le formole e il metodo del Magnus ad altri problemi dello stesso genere, mi avvidi che un tal metodo sovente mena a calcoli sì prolissi ed intralciati da sgomentare la pazienza dell' analista; che però mi rivolsi a vedere se era possibile di pervenire per altra via alla costruzione di quei punti di contatto, nè durai gran fatica a convincermi, potersi questo scopo raggiungere in un modo più semplice col soccorso della pura Geometria, come potrà vedersi dall' applicazione che io farò dell' analisi geometrica a parecchi esempj, non esclusi quelli del Magnus. Ai nuovi che aggiungo applicherò benanche il calcolo algebrico, perchè più chiaramente apparisca quanto il metodo da me seguito renda facili le soluzioni dei problemi, che formano l' oggetto della presente Memoria.

§. 1. In una curva piana qualunque SS' (fig. 1ª.) s'immagini una corda muoversi con una determinata legge; dalle infinite posizioni che essa può prendere si ha un sistema di corde tangenti un' altra curva, che può chiamarsi l' *inviluppo* della corda mobile. Or è da notarsi che il punto di contatto dell' inviluppo con ciascuna corda si ha nella intersezione di questa corda con quella che tiene, se così può dirsi, la posizione seguente, in somma nella intersezione di due corde vicinissime; mentre la curva inviluppo altro in fatti non è, che il poligono di numero infinito di lati picciolissimi, risultante

dall' incontro continuo di ciascuna corda con quella che immediatamente la segue. Siano pertanto MN, M'N' due posizioni contigue della corda mobile; il loro punto d' intersezione C sarà il contatto dell' inviluppo con la MN. Or l' oggetto dei problemi che seguono essendo quello di determinare questo punto di contatto, è manifesto che tutto riducesi ad assegnare per via di geometriche costruzioni il punto C, cioè a dire l' intersezione delle due corde vicinissime MN, M'N'.

Problema I.

§. 2. *La corda* MN (fig. 1.ª) *sia assoggettata a troncare da una data curva piana segmenti eguali; si vuol determinare il punto del contatto* C.

Sol. Essendo picciolissimi gli archetti MM' NN', i due settori MM'C, NN'C si potranno considerare come due triangoletti rettilinei, che dovendo essere eguali, per la condizione del problema, ed avendo eguali gli angoli al vertice C, daranno MC.M'C=NC.N'C. Or per essere vicinissime le corde MN, M'N', le MC, NC sono eguali rispettivamente ad M'C, N'C (1); adunque si avrà $\overline{MC}^2=\overline{NC}^2$, ed MC=NC, donde risulta il seguente teorema:

L' inviluppo delle corde, che tagliano da una curva piana qualunque segmenti eguali, tocca ciascuna di queste corde nel suo punto medio.

Problema II.

§. 3. *Un angolo* AMN (fig. 2.ª) *di grandezza costante si muova con tal legge, che mentre il suo vertice rimane sul perimetro d' una data curva piana, un lato passi sempre per*

(1) A misura che impicciolisce l' angolo MCM', la somma degli angoli MM'C, M'MC tende a divenire eguale a due retti, e così i seni degli angoli medesimi tenderanno ad eguagliarsi al pari dei lati MC, M'C, che serbansi lo stesso rapporto di quei seni. Intanto ad evitare circollocuzioni noi diremo in generale che: *quando un triangolo ha un solo angolo infinitamente piccolo, debbono riputorsi eguali i seni degli altri due angoli, nonchè i lati che comprendono l' angolo infinitesimo.*

un punto fisso A; *si vuol determinare il punto del contatto* C *dell' altro lato col suo inviluppo* (1).

Sol. Si uniscano le AM, AM'. Dovendo essere eguali gli angoli AMC, AM'C, ne risulta che per i quattro punti A, C, M', M possa passare la circonferenza d' un cerchio. Or per essere vicinissimi i punti M, M' questo cerchio toccherà la curva, oppure la sua tangente nel punto M; dunque può conchiudersi il teorema che segue:

L' inviluppo delle corde d' una curva piana qualunque ciascuna delle quali sia lato d' un angolo mobile di costante grandezza, che abbia il vertice sulla curva, e l' altro lato passante per un punto fisso, tocca una qualunque di queste corde in un punto, che si determina descrivendo pel vertice dell' angolo mobile un cerchio che tocchi la tangente la curva nel vertice stesso, e che passi pel punto fisso; e questo cerchio taglierà la corda nel punto cercato.

Problema III.

§. 4. *Un angolo* AMN (fig. 2.ª) *di costante grandezza si muova in modo, che il suo vertice stia sul perimetro d' una data curva piana, a cui uno dei suoi lati debba esser continuamente normale; vuol determinarsi il punto del contatto* C *dell' altro lato col suo inviluppo* (2).

Sol. Considerando le posizioni vicinissime AMN, AM'N' dell' angolo costante, si vede che i lati AM, AM' essendo normali alla curva, debbonsi tagliare nel centro di curvatura A del punto M. È chiaro perciò che il punto del contatto C dell' altro lato dell' angolo mobile col suo inviluppo, potrà costruirsi come si è indicato nel problema precedente, sostituendo al punto fisso il centro di curvatura del punto M. Per questo caso essendo retto l' angolo PMA lo sarà anche l' angolo MCA; e perciò si avrà il seguente teorema:

---

(1) Si vegga la nota A.

(2) Veggasi la nota B.

Se un angolo mobile di costante grandezza abbia il vertice sul perimetro d' una curva piana qualunque, cui uno dei suoi lati debba essere normale; il punto di contatto dell' altro lato col suo inviluppo sarà il piede della perpendicolare abbassata su questo lato, dal centro di curvatura del vertice dell' angolo mobile.

Le soluzioni de' tre problemi che precedono, risultano semplicissime per la natura delle condizioni che determinano il movimento della corda, donde emerge l' inviluppo; ma complicandosi queste condizioni diverranno, in conseguenza anche men semplici le corrispondenti soluzioni, come in effetti si vedrà ne' problemi che seguono. Intanto potendo le quistioni di tal genere rapportarsi tutte ad un principio comune, che sarà pur valevole a rendere più semplici le loro soluzioni, abbiamo creduto di dichiararlo nel seguente

TEOREMA

§. 5. *Ritenute le supposizioni del* §. 1., *esprimano* MN, M'N' (fig. 3.ª) *due posizioni contigue di una corda iscritta in una curva piana qualunque* SS'; *dico che il rapporto dei due archetti infinitesimi* MM', NN' *sia assegnabile ed espresso da*

$$PM.MC : PN.NC,$$

essendo PM, PN *tangenti della curva nei punti* M *ed* N *estremità della corda.*

Dim. Per gli archetti infinitamente piccioli MM', NN' dovendo riputarsi rettilinei i triangoli MCM', NCN', si avranno le due analogie

$$MM' : MC :: \text{sen}\, MCM' : \text{sen}\, MM'C,$$

ed $$NC : NN' :: \text{sen}\, NN'C : \text{sen}\, NCN'$$

dalle quali ricavasi l' altra

$$MM' : NN' :: (\text{sen}\, NN'C : \text{sen}\, MM'C)\,(MC : NC).$$

Or essendo per ipotesi vicinissime le due corde MN, M'N', saranno eguali i seni degli angoli MM'C, M'MC, ovvero quelli

degli angoli $MM'C$, PMC; e per la stessa ragione si eguaglieranno i seni dei due angoli $NN'C$, PNC; si avrà perciò

$$MM' : NN' :: (\text{sen}\, PNC : \text{sen}\, PMC)(MC : NC),$$

ma sta $\qquad \text{sen}\, PNC : \text{sen}\, PMC :: PM : PN,$

sarà quindi $\qquad MM' : NN' :: PM . MC : PN . NC$

come erasi proposto a dimostrare.

§. 6. Si formi dalle PM, PN il parallelogrammo $MPNQ$; si avrà pure

$$MM' : NN' :: NQ . MC : MQ . NC;$$

ma, congiungendo QC, si ha

$$MC : MQ :: \text{sen}\, MQC : \text{sen}\, MCQ,$$

ed $\qquad NQ : NC :: \text{sen}\, NCQ : \text{sen}\, NQC;$

dunque $NQ . MC : MQ . NC :: \text{sen}\, MQC : \text{sen}\, NQC$; e quindi anche $MM' : NN' :: \text{sen}\, MQC : \text{sen}\, NQC$ (1).

Problema IV.

§. 7. *La corda* MN (fig. 3.[a]) *debba tagliare da una data curva piana archi eguali; si vuol determinare il punto di contatto* C.

Sol. Poichè dev' essere l' arco $MN = M'N'$; sarà anche $MM' = NN'$; dunque si avrà (§. 6.) $\text{sen}\, MQC = \text{sen}\, NQC$, e quindi l' angolo $MQC = NQC$. Risulta da ciò il seguente teorema:

L' inviluppo delle corde d' una curva piana qualunque, che sottendono archi eguali, tocca ciascuna di queste corde al punto ove essa è tagliata dalla bisecante dell' angolo compreso dalle rette tirate per i due suoi estremi parallelamente alle tangenti applicate nei medesimi estremi.

Il punto di contatto C si ottiene ancora bisecando l' angolo MPN con la retta PC', e poscia tagliando MC eguale ad NC'.

---

(1) Veggasi la nota C.

Problema V.

§. 8. *La corda* MN (fig. 4.ª) *debba avere una lunghezza costante; si vuol determinare il punto di contatto* C.

Sol. Si taglino sopra le CM, CN′ le parti CA, CB eguali alle CM′, CN rispettivamente. I due triangoli ACM′, BCN essendo isosceli, sarà l'angolo MAM′ = NBN′: di più dovendo essere NA = M′B, ed avendosi per supposizione MN = M′N′, sarà anche MA = N′B. Posto ciò i due triangoli AMM′, BNN′ danno

$$MM' : MA :: \mathrm{sen}\, MAM' : \mathrm{sen}\, MM'A,$$

ed $$N'B : NN' :: \mathrm{sen}\, N'NB : \mathrm{sen}\, NBN';$$

dunque si avrà $$MM' : NN' :: \mathrm{sen}\, N'NB : \mathrm{sen}\, MM'A.$$

Or poichè le MN, M′N′ sono due posizioni contigue della corda mobile, le M′A, NB debbono considerarsi come perpendicolari ad MN (1); abbassando dunque dal punto P sulla MN la perpendicolare PC′, i seni degli angoli N′NB, MM′A saranno rispettivamente eguali ai seni degli angoli NPC′, MPC′. S' avrà quindi

$$MM' : NN' :: \mathrm{sen}\, NPC' : \mathrm{sen}\, MPC'$$

e però (§. 6.) $$\mathrm{sen}\, MQC : \mathrm{sen}\, NQC :: \mathrm{sen}\, NPC' : \mathrm{sen}\, MPC';$$

ma sono eguali gli angoli MQN, MPN, dunque lo saranno anche i due MQC, NPC′, e QC dovrà essere parallella a PC′, ovvero perpendicolare ad MN. Da ciò risulta il teorema seguente:

L' inviluppo delle corde eguali in una curva piana qualunque tocca ciascuna di queste corde al punto ove essa è tagliata dalla perpendicolare abbassatale dal concorso delle rette tirate per gli estremi della corda parallelamente alle tangenti applicate nei medesimi estremi.

---

(1) Essendo M′A parallela alla bisecante dell' angolo M′CN, quando M′N′ tende a coincidere con MN, questa bisecante, e con essa la M′A, tenderà a divenire perpendicolare ad MN; lo stesso dicasi di NB.

Il punto di contatto C si ottiene ancora abbassando PC' perpendicolare ad MN, e poscia troncando MC eguale ad NC'.

Problema VI.

§. 9. *Un angolo mobile* MPN (fig. 5.ª) *di costante grandezza sia continuamente circoscritto ad una data curva piana; si vuol determinare il punto di contatto* C *sulla corda* MN, *che lo sottende.*

Sol. Ai punti M, M', N, N' della curva si tirino le normali MA, M'A, NB, N'B; saranno A e B i centri di curvatura corrispondenti ai punti M ed N. Si prolunghino le NB, N'B fino ad incontrare MA nei punti D ed U. Gli angoli MPN, M'P'N' dovendo essere eguali, lo saranno pure i loro supplementi MDN, M'D'N'; ed i due triangoli AD'U, BDU risultando simili, si eguaglieranno pure gli angoli MAM', NBN'. Dunque dovendo essere simili i due triangoli rettangoli MM'A, NN'B, si avrà

$$MM' : NN' :: MA : NB$$

donde risulta (§. 6.) $\quad \text{sen}\, MQC : \text{sen}\, NQC :: MA : NB.$

E di quì è manifesto come possa ottenersi in un modo semplicissimo il punto C. Intanto si formi il triangolo GTZ dai punti medj di MB, NA, AB; e dal punto H ove QC incontra MK condotta HL parallela ad NB, si tiri la congiungente KL. Avendosi

$$\text{sen}\, MQC : \text{sen}\, NQC :: MA : NB$$
$$:: GZ : TZ$$

e $\quad \text{sen}\, MQC : \text{sen}\, NQC :: HL : HK,$

starà $\quad GZ : TZ :: HL : HK.$

Quindi essendo eguali gli angoli GZT, LHK, perchè aventi i lati paralleli, saranno simili i due triangoli TGZ, KLH, e l'angolo GTZ sarà eguale ad HKL oppure ad HQL. Adunque dovranno essere simili anche i due triangoli QRF, ETF, e QE sarà perpendicolare a GT come lo è TR ad MQ. Si conchiude da ciò il teorema che segue:

Un angolo mobile d'invariabile grandezza essendo costantemente circoscritto ad una data curva piana, il punto di contatto dell'inviluppo di tutte le corde, che sottendono l'angolo mobile con una qualunque di esse, si otterrà colla seguente costruzione geometrica: sopra la corda come diagonale si formi un parallelogrammo i cui due lati siano le tangenti menate all'estremità della corda; poi sopra la medesima corda come lato si costruisca un quadrilatero i vertici del quale siano i centri di curvatura delle due sue estremità; finalmente pel vertice del parallelogrammo opposto al vertice dell' angolo circoscritto si conduca la perpendicolare alla retta che contiene i punti medj delle diagonali del quadrilatero. Questa perpendicolare taglierà la corda del contatto nel punto cercato.

PROBLEMA VII.

§. 10. *Due raggi vettori* AM, AN (fig. 6.ª) *tirati per un punto fisso* A *al perimetro d' una data curva piana debbano incontrarsi ad angolo di grandezza costante; vuol determinarsi il punto di contatto* C *sulla corda* MN (1).

Sol. Si uniscano le AM, AN, AM', AN'. Dovendo aversi le analogie

$$MM' : MA :: \text{sen}\, MAM' : \text{sen}\, MM'A,$$

$$NA : NN' :: \text{sen}\, NN'A : \text{sen}\, NAN',$$

sarà pure

$$(MM' : NN')(NA : MA) :: (\text{sen}NN'A : \text{sen}MM'A)(\text{sen}MAM' : \text{sen}NAN').$$

Ma essendo l'angolo $MAN = M'AN'$, risulta anche l'angolo $MAM' = NAN'$; dunque avrassi

$$(MM' : NN')(NA : MA) :: \text{sen}\, NN'A : \text{sen}\, MM'A.$$

Intanto poichè le due corde MN, M'N' sono vicinissime, i seni degli angoli MM'A, NN'A sono a riputarsi rispettivamente eguali ai seni degli angoli PMA, PNA; si avrà perciò

$$(MM' : NN')(NA : MA) :: \text{sen}\, PNA : \text{sen}\, PMA,$$

(1) Veggasi la nota D.

e di seguito (§. 5.)

$$(PM.MC:PN.NC)(NA:MA)::\text{sen }PNA:\text{sen }PMA,$$

donde si ha

$$PM\text{ sen }PMA:PN\text{ sen }PNA::MA.NC:NA.MC.$$

Ma è pure $PM\text{ sen }PMA = PA\text{ sen }PAM$,

$PN\text{ sen }PNA = PA\text{ sen }PAN$,

$NC:NA::\text{sen }NAC:\text{sen }NCA$,

ed $MA:MC::\text{sen }MCA:\text{sen }MAC$;

dunque anche $\text{sen }PAM:\text{sen }PAN::\text{sen }NAC:\text{sen }MAC$.

Di quì si deduce essere eguali gli angoli PAM, NAC, e quindi risulta il seguente teorema:

Se in una curva piana qualunque si tirino delle corde per modo che i raggi vettori condotti ai due estremi di ciascuna di esse per un punto fisso comprendano angoli eguali; il punto di contatto dell' inviluppo di queste corde con una di esse può determinarsi tirando pel punto fisso due rette egualmente inclinate alla bisecante dell' angolo compreso dai raggi vettori, e tali che una passi pel concorso delle tangenti applicate agli estremi della corda; l' altra di queste rette segnerà sulla corda il punto cercato.

Problema VIII.

§. 11. *Due raggi vettori* AM, AN (fig. 7.ª) *tirati per un punto fisso* A *al perimetro d' una data curva piana debbano essere sempre in un rapporto costante; vuol determinarsi il punto del contatto* C *sulla corda* MN (1).

Sol. Si taglino sopra le AM, AN le parti AH, AK eguali rispettivamente ad AM', AN'; dovrà aversi per la condizione del problema

$$AM:AH::AN:AK,$$

e quindi $MH:NK::AM:AN$.

---

(1) Veggasi la nota E.

Intanto i due triangoli MHM′, NKN′ danno le seguenti analogie

$$MM' : MH :: \text{sen}\, MHM' : \text{sen}\, MM'H,$$

ed $$NK : NN' :: \text{sen}\, NN'K : \text{sen}\, NKN',$$

da cui ricavasi

$$(MM' : NN')(AN : AM) :: (\text{sen}\, MHM' : \text{sen}\, NKN')(\text{sen}\, NN'K : \text{sen}\, MM'H).$$

Ora essendo picciolissimi gli angoli MAM′, NAN′, le M′H, N′K debbono riputarsi perpendicolari alle AM, AN; perciò saranno eguali i seni degli angoli MHM′, NKN′, ed applicando ai punti M, N le normali MR, NR, gli angoli MM′H, NN′K eguaglieranno gli angoli AMR, ANR. S' avrà quindi

$$(MM' : NN')(AN : AM) :: \text{sen}\, ANR : \text{sen}\, AMR,$$

e di seguito (§. 6.)

$$\text{sen}\, MQC : \text{sen}\, NQC :: AM\, \text{sen}\, ANR : AN\, \text{sen}\, AMR.$$

Ciò posto ne' due raggi vettori AM, AN si prendano le parti AE, AF eguali ad AN, AM; per i punti E ed F si tirino alle MR, NR le parallele ED, FD che s' incontrino nel punto D; ed in fine si tiri AD: l' ultima analogia ottenuta si cangerà nell' altra

$$\text{sen}\, MQC : \text{sen}\, NQC :: AF\, \text{sen}\, AFD : AE\, \text{sen}\, AED.$$

Ma abbassando AG, AB perpendicolari sopra le DE, DF, si ha

$$AF\, \text{sen}\, AFD : AE\, \text{sen}\, AED :: AB : AG$$
$$:: \text{sen}\, ADB : \text{sen}\, ADG;$$

dunque sarà pure $\text{sen}\, MQC : \text{sen}\, NQC :: \text{sen}\, ADB : \text{sen}\, ADG.$

Intanto essendo eguali gli angoli MQN, BDG, perchè i lati dell' uno sono perpendicolari a quelli dell' altro, saran pure eguali gli altri due angoli MQC, ADB, e dovrà essere QC perpendicolare ad AD, come QM lo è a DB. Quindi potrà dedursi il seguente teorema:

Se in una curva piana qualunque si tirino delle corde per modo che i raggi vettori tirati per un punto fisso A agli estremi di ciascuna di esse stiano in un rapporto costante,

l' inviluppo di queste corde tocca una di esse, la MN, *in un punto che si determina come segue. Tirati i raggi vettori* AM, AN, *si taglino sulle loro direzioni le parti* AE, AF *eguali ad* AN, AM, *e per i punti* E *ed* F *si tirino le perpendicolari* ED, FD *alle* PM, PN *rispettivamente; congiungendo il punto d' intersezione* D *di queste rette col punto* A, *ed abbassando su tal congiungente dal punto* Q *la perpendicolare* QC, *questa perpendicolare taglierà la corda* MN *nel punto cercato.*

PROBLEMA IX.

§. 12. *Le rette* MA, NB (fig. 8.ª) *che congiungono gli estremi della corda* MN *con due punti fissi* A *e* B *debbano essere parallele; vuol determinarsi il punto del contatto* C (1).

Sol. Si congungano le AM, AM', BN, BN'; dovranno aversi le analogie

$$MM' : MA :: \text{sen}\, MAM' : \text{sen}\, MM'A,$$

$$NB : NN' :: \text{sen}\, NN'B : \text{sen}\, NBN'.$$

Ma essendo AM, AM' parallele a BN, BN', risultano eguali gli angoli MAM', NBN'; dunque sarà anche

$$(MM' : NN')(NB : MA) :: \text{sen}\, NN'B : \text{sen}\, MM'A.$$

Ora poichè le AM, BN sono vicinissime alle AM', BN', i seni dei due angoli MM'A, NN'B eguaglieranno i seni dei due PMA, PNB, ovvero i seni degli angoli BNQ, AMQ; e però sarà

$$(MM' : NN')(NB : MA) :: \text{sen}\, AMQ : \text{sen}\, BNQ,$$

e quindi (§. 6.)

$$\text{sen}\, MQC : \text{sen}\, NQC :: AM\, \text{sen}\, AMQ : BN\, \text{sen}\, BNQ.$$

Intanto pe' punti A e B si tirino alle MQ, NQ rispettivamente le perpendicolari AE, BF, e le parallele AD, BD. Si avrà dalla precedente analogia

(1) Veggasi la nota F.

sen MQC : sen NQC : : AE : BF;

e poichè tirando DQ si ha

sen ADQ : sen BDQ : : AE : BF,

sarà conseguentemente

sen ADQ : sen BDQ : : sen MQC : sen NQC.

Ma abbiamo eguali gli angoli ADB, MQN, onde lo saranno altresì i due ADQ, MQC; e quindi QD starà per dritto con QC. Risulta da ciò il seguente teorema:

L' inviluppo delle corde d' una curva piana qualunque, descritte per modo che le congiungenti dei loro estremi con due punti fissi A *e* B *siano parallele, tocca una qualunque di queste corde, la* MN, *in un punto che si determina come segue. Si compia dalle tangenti* PM, PN *il parallelogrammo* PMQN, *e tirate per i punti* A *e* B *le* AD, BD *parallele alle* PN, PM *rispettivamente, se si unisca il punto d' intersezione* D *di queste rette col punto* Q, *questa congiungente taglierà la corda* MN *nel punto cercato.*

§. 13. In questa occasione indicherò il seguente teorema, che si riattacca alle cose precedenti.

In una data curva piana v *sia iscritto un poligono variabile di* m *lati con tal legge che questi siano sempre tangenti ad altrettante curve* v', v'', v''', v$^{\text{IV}}$ ec. *Considerando questo poligono in una qualunque delle sue infinite posizioni, si tirino per i suoi vertici le tangenti alla curva* v; *si avranno in tal modo due poligoni, l' uno iscritto a questa curva, l' altro circoscritto, i cui lati saranno divisi ciascuno in due segmenti nel punto di contatto corrispondente. Ora il prodotto di tutti i segmenti alterni del poligono circoscritto starà a quello dei rimanenti, come il prodotto dei segmenti alterni del poligono iscritto, presi nello stesso senso del primo prodotto, sta a quello degli altri segmenti.*

Così, se sia ABCD..... (fig. 9.$^{\text{a}}$) una delle infinite posizioni che può prendere il poligono variabile, conducendo

per i punti A, B, C, D..... le tangenti alla curva v di maniera che si abbia il poligono circoscritto KLMN...., dovrà stare

KA.LB.MC.ND: KD.NC.MB.LA:: AF.BG.CH.DE: AE.DH.CG.BF.

Se la curva v sia una sezione conica sarà il primo termine della precedente analogia eguale al secondo (1), e quindi anche il terzo eguale al quarto; ond' è che per tal caso il teorema precedente rimane modificato come segue:

Essendo iscritto in una sezione conica un poligono variabile di m *lati con tal condizione che questi vadano sempre toccando altrettante curve piane, il prodotto di tutti i segmenti alterni, in una qualunque delle infinite posizioni del poligono, sarà eguale al prodotto dei rimanenti.*

Il teorema enunciato offre il mezzo da costruire il punto di contatto dell' inviluppo del lato libero di un poligono variabile di m lati iscritto in una curva piana qualunque, e di cui $m-1$ lati siano tangenti ad altrettante curve date. Questa costruzione si rende più semplice qualora la curva in cui il poligono è iscritto sia una sezione conica; e se le curve toccate dai lati del poligono siano al numero di due, nel qual caso il poligono iscritto non è che un triangolo, si ha allora la stessa costruzione del punto di contatto data dall' illustre *Poncelet* nelle *Propriétés projéctives des figures*, pag. 323 (2).

---

(1) Veggasi — Carnot Géométrie de position, pag. 438.

(2) La costruzione di cui si tratta è la seguente: per i vertici degli angoli del triangolo iscritto adjacenti al lato libero si tirino due rette ai punti di contatto dei lati opposti; la congiungente del punto d' intersezione di queste rette col vertice dell' angolo opposto al lato libero, incontrerà il detto lato nel punto cercato.

NOTA *A*.

Il problema del §. 2., come pure gli altri dei §§. 7., 8., 9. sono stati risoluti dal Magnus in una sua Memoria inserita nel Tomo XVI degli *Annales de mathématiques*. L'andamento seguito da questo geometra è tutto diverso dal nostro, avendo egli derivate le sue soluzioni da talune formole che stabilisce sin da principio, e che quì appresso riporteremo, per mostrare come esse si possano applicare al problema del §. 3. ed agli altri che seguono. « Sia $y=\varphi(x)$ l'equazione d'una curva « piana qualunque riferita a due assi ortogonali. Siano inoltre « (α, β), (α', β') due punti comunque determinati su questa « curva, di maniera che si abbia $\beta=\varphi(\alpha)$, $\beta'=\varphi(\alpha')$; l'equa- « zione della corda che unisce questi due punti sarà

$$(\alpha'-\alpha)(y-\beta)-(\beta'-\beta)(x-\alpha)=\gamma=0.$$

« Supponendo che esista tra α ed α' una relazione data dall' « equazione $\mathrm{U}=0$, l'equazione dell' inviluppo di tutte le « corde $\gamma=0$ sarà il resultato dell' eliminazione delle cinque « quantità $\alpha, \beta, \alpha', \beta', \frac{d\alpha'}{d\alpha}$ tra le sei equazioni

$$\beta=\varphi(\alpha), \quad \beta'=\varphi(\alpha'), \quad (\alpha'-\alpha)(y-\beta)-(\beta'-\beta)(x-\alpha)=\gamma=0,$$

$$\left[y-\beta-(x-\alpha)\frac{d\beta'}{d\alpha'}\right]\frac{d\alpha'}{d\alpha}-\left[y-\beta'-(x-\alpha')\frac{d\beta}{d\alpha}\right]=\frac{d\gamma}{d\alpha}=0,$$

$$\mathrm{U}=0, \quad \left(\frac{d\mathrm{U}}{d\alpha'}\right)\frac{d\alpha'}{d\alpha}+\left(\frac{d\mathrm{U}}{d\alpha}\right)=\frac{d\mathrm{U}}{d\alpha}=0 \ (1).$$

« Ma se non vuol trovarsi che il punto di contatto di una « delle corde contenute in $\gamma=0$ con l'inviluppo, basterà eli- « minare $\frac{d\alpha'}{d\alpha}$ tra le due equazioni $\frac{d\gamma}{d\alpha}=0$, $\frac{d\mathrm{U}}{d\alpha}=0$, ciocchè « darà l' equazione

$$\left[y-\beta-(x-\alpha)\frac{d\beta'}{d\alpha'}\right]\left(\frac{d\mathrm{U}}{d\alpha}\right)-\left[y-\beta'-(x-\alpha')\frac{d\beta}{d\alpha}\right]\left(\frac{d\mathrm{U}}{d\alpha'}\right)=v=0,$$

(1) Tutto ciò si rileva facilmente dalla teorica sviluppata dall' illustre Lagrange nella *Théorie des fonctions analytiques*, rispetto alle curve inviluppi a pag. 192-198.

« e determinare in seguito i valori di x ed y, che soddisfano
« alle due equazioni $\gamma=o$, $v=o$ il che equivale a determi-
« nare il punto d' intersezione delle linee espresse da quest'
« equazioni medesime. Or siccome la prima è la stessa corda,
« così basterà di costruire l' altra, che si vede appartenere
« egualmente ad una retta, che taglierà in conseguenza la
« corda nel punto cercato. Questo prova in primo luogo, che
« l' inviluppo non può toccare la corda in più punti. Or
« l' equazione $v=o$ è soddisfatta, qualunque possa essere la
« relazione $U=o$, facendo nello stesso tempo

$$y-\beta=\frac{d\beta'}{d\alpha'}(x-\alpha)\ldots\ldots(l),\qquad y-\beta'=\frac{d\beta}{d\alpha}(x-\alpha')\ldots\ldots(l')$$

« dunque l'equazione $v=o$ è quella di una retta che unisce
« il punto cercato col punto d' intersezione delle due rette
« (l), (l'), punto che in seguito indicheremo con (s). Quanto
« alle rette (l), (l'), si vede che ciascuna di esse è la paral-
« lela tirata dall' una delle estremità della corda $\gamma=o$ alla
« tangente nell' altro estremo. »

Esposte queste formole passiamo ad occuparci del problema del §. 3. Si prenda a tale effetto per origine delle coordinate il punto fisso A; s' indichino con (α, β), (α', β') rispettivamente gli estremi M, N della corda; e si dinoti con t la tangente trigonometrica dell' angolo costante NMA. Dovrà essere pel caso attuale

$$\frac{\alpha'\beta-\alpha\beta'}{\alpha(\alpha'-\alpha)+\beta(\beta'-\beta)}-t=U=o$$

e quindi

$$\left(\frac{dU}{d\alpha}\right)=\frac{\left[\alpha\alpha'(\alpha'-\alpha)+\alpha\beta'(\beta'-\beta)+\beta(\alpha'\beta-\alpha\beta')\right]\frac{d\beta}{d\alpha}-\beta\beta'(\beta'-\beta)-\alpha'\beta(\alpha'-\alpha)+\alpha(\alpha'\beta-\alpha\beta')}{[\alpha(\alpha'-\alpha)+\beta(\beta'-\beta)]^2},$$

$$\text{e}\ \left(\frac{dU}{d\alpha'}\right)=\frac{(\alpha^2+\beta^2)\left[\beta'-\beta-(\alpha'-\alpha)\frac{d\beta'}{d\alpha'}\right]}{[\alpha(\alpha'-\alpha)+\beta(\beta'-\beta)]^2}.$$

Or nell' espressione generale di tang. CAM, che è

$$\frac{(\alpha'\beta-\alpha\beta')\left[\beta'-\beta-(\alpha'-\alpha)\frac{d\beta}{d\alpha}\right]\left(\frac{dU}{d\alpha'}\right)}{(\alpha^2+\beta^2)\left[\beta'-\beta-(\alpha'-\alpha)\frac{d\beta'}{d\alpha'}\right]\left(\frac{dU}{d\alpha}\right)+(\alpha\alpha'+\beta\beta')\left[\beta'-\beta-(\alpha'-\alpha)\frac{d\beta}{d\alpha}\right]\left(\frac{dU}{d\alpha'}\right)} \text{ (1)},$$

si sostituiscano i precedenti valori di $\left(\frac{dU}{d\alpha}\right)$, e $\left(\frac{dU}{d\alpha'}\right)$; s' otterrà in tal modo

tang. CAM =

$$\frac{(\alpha'\beta-\alpha\beta')\left[\beta'-\beta-(\alpha'-\alpha)\frac{d\beta}{d\alpha}\right]}{\left[\alpha\alpha'(\alpha'-\alpha)+\alpha\beta'(\beta'-\beta)+\beta(\alpha'\beta-\alpha\beta')\right]\frac{d\beta}{d\alpha}-\beta\beta'(\beta'-\beta)-\alpha'\beta(\alpha'-\alpha)+\alpha(\alpha'\beta-\alpha\beta')+(\alpha\alpha'+\beta\beta')\left[\beta'-\beta-(\alpha'-\alpha)\frac{d\beta}{d\alpha}\right]}$$

---

(1) Le coordinate x', y' del punto C essendo i valori di x ed y corrispondenti alle due equazioni $v=0$, e $\gamma=0$, si avrà

$$x'=\frac{\alpha\left[\beta'-\beta-(\alpha'-\alpha)\frac{d\beta'}{d\alpha'}\right]\left(\frac{dU}{d\alpha}\right)+\alpha'\left[\beta'-\beta-(\alpha'-\alpha)\frac{d\beta}{d\alpha}\right]\left(\frac{dU}{d\alpha'}\right)}{\left[\beta'-\beta-(\alpha'-\alpha)\frac{d\beta'}{d\alpha'}\right]\left(\frac{dU}{d\alpha}\right)+\left[\beta'-\beta-(\alpha'-\alpha)\frac{d\beta}{d\alpha}\right]\left(\frac{dU}{d\alpha'}\right)},$$

$$\text{ed } y'=\frac{\beta\left[\beta'-\beta-(\alpha'-\alpha)\frac{d\beta'}{d\alpha'}\right]\left(\frac{dU}{d\alpha}\right)+\beta'\left[\beta'-\beta-(\alpha'-\alpha)\frac{d\beta}{d\alpha}\right]\left(\frac{dU}{d\alpha'}\right)}{\left[\beta'-\beta-(\alpha'-\alpha)\frac{d\beta'}{d\alpha'}\right]\left(\frac{dU}{d\alpha}\right)+\left[\beta'-\beta-(\alpha'-\alpha)\frac{d\beta}{d\alpha}\right]\left(\frac{dU}{d\alpha'}\right)}.$$

Quindi la retta che unisce questo punto C con l' origine A delle coordinate, formerà con l' asse delle ascisse un angolo avente per tangente trigonometrica

$$\frac{\beta\left[\beta'-\beta-(\alpha'-\alpha)\frac{d\beta'}{d\alpha'}\right]\left(\frac{dU}{d\alpha}\right)+\beta'\left[\beta'-\beta-(\alpha'-\alpha)\frac{d\beta}{d\alpha}\right]\left(\frac{dU}{d\alpha'}\right)}{\alpha\left[\beta'-\beta-(\alpha'-)\alpha\frac{d\beta'}{d\alpha'}\right]\left(\frac{dU}{d\alpha}\right)+\alpha'\left[\beta'-\beta-(\alpha'-\alpha)\frac{d\beta}{d\alpha}\right]\left(\frac{dU}{d\alpha'}\right)};$$

ed essendo $\frac{\beta}{\alpha}$ quella dell' angolo che MA forma con lo stesso asse, dovrà essere

$$\text{tang. CAM}=\frac{\frac{\beta}{\alpha}-\frac{\beta\left[\beta'-\beta-(\alpha'-\alpha)\frac{d\beta'}{d\alpha'}\right]\left(\frac{dU}{d\alpha}\right)+\beta'\left[\beta'-\beta-(\alpha'-\alpha)\frac{d\beta}{d\alpha}\right]\left(\frac{dU}{d\alpha'}\right)}{\alpha\left[\beta'-\beta-(\alpha'-\alpha)\frac{d\beta'}{d\alpha'}\right]\left(\frac{dU}{d\alpha}\right)+\alpha'\left[\beta'-\beta-(\alpha'-\alpha)\frac{d\beta}{d\alpha}\right]\left(\frac{dU}{d\alpha'}\right)}}{1+\frac{\beta}{\alpha}\cdot\frac{\beta\left[\beta'-\beta-(\alpha'-\alpha)\frac{d\beta'}{d\alpha'}\right]\left(\frac{dU}{d\alpha}\right)+\beta'\left[\beta'-\beta-(\alpha'-\alpha)\frac{d\beta}{d\alpha}\right]\left(\frac{dU}{d\alpha'}\right)}{\alpha\left[\beta'-\beta-(\alpha'-\alpha)\frac{d\beta'}{d\alpha'}\right]\left(\frac{dU}{d\alpha}\right)+\alpha'\left[\beta'-\beta-(\alpha'-\alpha)\frac{d\beta}{d\alpha}\right]\left(\frac{dU}{d\alpha'}\right)}}$$

e riducendo si avrà l' espressione sopra scritta.

e riducendo il denominatore di questo fratto s' avrà

$$\text{tang. CAM} = \frac{(\alpha'-\alpha)\frac{d\beta}{d\alpha} - (\beta'-\beta)}{(\beta'-\beta)\frac{d\beta}{d\alpha} + (\alpha'-\alpha)}.$$

Ma quest' espressione è anche quella di tang. PMN, come facilmente può vedersi: dunque dovrà essere l'angolo MAC=PMN, e però il cerchio che passa per i punti A ed M, e tocca in M la MP passerà anche pel punto cercato C.

NOTA *B*.

Si dinotino con $(\alpha, \beta), (\alpha', \beta')$ gli estremi M, N della corda; e si chiami t la cotangente dell' angolo costante, ovvero la tangente trigonometrica dell' angolo PMN. S' avrà, per la condizione del problema

$$\frac{(\alpha'-\alpha)\frac{d\beta}{d\alpha} - (\beta'-\beta)}{(\beta'-\beta)\frac{d\beta}{d\alpha} + (\alpha'-\alpha)} - t = \text{U} = 0,$$

donde ricavasi

$$\left(\frac{d\text{U}}{d\alpha}\right) = \frac{\left[(\alpha'-\alpha)^2 + (\beta'-\beta)^2\right]\frac{d^2\beta}{d\alpha^2} - \left[\beta'-\beta-(\alpha'-\alpha)\frac{d\beta}{d\alpha}\right]\left(1+\frac{d\beta^2}{d\alpha^2}\right)}{\left[(\beta'-\beta)\frac{d\beta}{d\alpha} + (\alpha'-\alpha)\right]^2},$$

$$\text{e} \quad \left(\frac{d\text{U}}{d\alpha'}\right) = \frac{\left[\beta'-\beta-(\alpha'-\alpha)\frac{d\beta'}{d\alpha'}\right]\left(1+\frac{d\beta^2}{d\alpha^2}\right)}{\left[\beta'-\beta)\frac{d\beta}{d\alpha} + (\alpha'-\alpha)\right]^2}.$$

Sostituendo questi valori di $\left(\frac{d\text{U}}{d\alpha}\right)$, e $\left(\frac{d\text{U}}{d\alpha'}\right)$ nelle espressioni generali delle coordinate x', y' del punto di contatto C, determinate nella nota a piedi della pag. prec., si avrà

$$x' = \frac{\alpha\frac{d^2\beta}{d\alpha^2}\left[(\alpha'-\alpha)^2 + (\beta'-\beta)^2\right] + (\alpha'-\alpha)\left[\beta'-\beta-(\alpha'-\alpha)\frac{d\beta}{d\alpha}\right]\left(1+\frac{d\beta^2}{d\alpha^2}\right)}{\frac{d^2\beta}{d\alpha^2}\left[(\alpha'-\alpha)^2 + (\beta'-\beta)^2\right]},$$

$$y' = \frac{\beta\frac{d^2\beta}{d\alpha^2}\left[(\alpha'-\alpha)^2 + (\beta'-\beta)^2\right] + (\beta'-\beta)\left[\beta'-\beta-(\alpha'-\alpha)\frac{d\beta}{d\alpha}\right]\left(1+\frac{d\beta^2}{d\alpha^2}\right)}{\frac{d^2\beta}{d\alpha^2}\left[(\alpha'-\alpha)^2 + (\beta'-\beta)^2\right]}.$$

S' indichino ora con x'', y'' le coordinate del centro di curvatura del punto (α, β); sarà

$$x'' = \alpha - \frac{1 + \frac{d\beta^2}{d\alpha^2}}{\frac{d^2\beta}{d\alpha^2}} \times \frac{d\beta}{d\alpha}, \qquad y'' = \beta + \frac{1 + \frac{d\beta^2}{d\alpha^2}}{\frac{d^2\beta}{d\alpha^2}};$$

dunque
$$y' - y'' = \frac{-(\alpha' - \alpha)\left[\alpha' - \alpha + (\beta' - \beta)\frac{d\beta}{d\alpha}\right]\left(1 + \frac{d\beta^2}{d\alpha^2}\right)}{\frac{d^2\beta}{d\alpha^2}\left[(\alpha' - \alpha)^2 + (\beta' - \beta)^2\right]},$$

$$x' - x'' = \frac{(\beta' - \beta)\left[\alpha' - \alpha + (\beta' - \beta)\frac{d\beta}{d\alpha}\right]\left(1 + \frac{d\beta^2}{d\alpha^2}\right)}{\frac{d^2\beta}{d\alpha^2}\left[(\alpha' - \alpha)^2 + (\beta' - \beta)^2\right]};$$

e quindi $\frac{y' - y''}{x' - x''} = \frac{-(\alpha' - \alpha)}{\beta' - \beta}$. Quest'equazione mostra che la retta che unisce i due punti (x', y'), (x'', y'') è perpendicolare a quella che passa per i punti (α, β), (α', β'), cioè alla corda MN, e però risulta evidente il teorema enunciato nel §. 4.

NOTA *C.*

Per dimostrare col mezzo delle formole stabilite precedentemente l'analogia ultima del §. 6., e con essa il teorema del §. 5., si osservi, che indicati per (α, β), (α', β') rispettivamente i punti M, N, le rette QM, QC, QN formano con l' asse delle ascisse angoli che hanno per tangenti trigonometriche rispettivamente

$$\frac{d\beta'}{d\alpha'}, \qquad \frac{\frac{d\beta'}{d\alpha'}\left(\frac{dU}{d\alpha}\right) - \frac{d\beta}{d\alpha}\left(\frac{dU}{d\alpha'}\right)}{\left(\frac{dU}{d\alpha}\right) - \left(\frac{dU}{d\alpha'}\right)}, \qquad \frac{d\beta}{d\alpha}.$$

Quindi sarà

$$\text{sen MQC} = \frac{\left(\frac{dU}{d\alpha'}\right)\left[\frac{d\beta}{d\alpha} - \frac{d\beta'}{d\alpha'}\right]}{\sqrt{1 + \left(\frac{\frac{d\beta'}{d\alpha'}\left(\frac{dU}{d\alpha}\right) - \frac{d\beta}{d\alpha}\left(\frac{dU}{d\alpha'}\right)}{\left(\frac{dU}{d\alpha}\right) - \left(\frac{dU}{d\alpha'}\right)}\right)^2}\sqrt{1 + \frac{d\beta'^2}{d\alpha'^2}}},$$

$$\text{e sen NQC} = \frac{\left(\frac{dU}{d\alpha}\right)\left[\frac{d\beta'}{d\alpha'} - \frac{d\beta}{d\alpha}\right]}{\sqrt{1 + \left(\frac{\frac{d\beta'}{d\alpha'}\left(\frac{dU}{d\alpha}\right) - \frac{d\beta}{d\alpha}\left(\frac{dU}{d\alpha'}\right)}{\left(\frac{dU}{d\alpha}\right) - \left(\frac{dU}{d\alpha'}\right)}\right)^2}\sqrt{1 + \frac{d\beta^2}{d\alpha^2}}} \quad (1);$$

e di seguito $$\frac{\text{sen MQC}}{\text{sen NQC}} = \frac{-d\alpha'\left(\frac{dU}{d\alpha'}\right)\sqrt{d\alpha^2 + d\beta^2}}{d\alpha\left(\frac{dU}{d\alpha}\right)\sqrt{d\alpha'^2 + d\beta'^2}}.$$

Ma per essere la funzione U di α ed α' eguale a zero, lo sarà pure il suo differenziale, dunque dovrà essere

$$\left(\frac{dU}{d\alpha}\right)d\alpha + \left(\frac{dU}{d\alpha'}\right)d\alpha' = 0, \quad \text{donde si trae} \quad \frac{-d\alpha'\left(\frac{dU}{d\alpha'}\right)}{d\alpha\left(\frac{dU}{d\alpha}\right)} = 1,$$

e quindi sen MQC : sen NQC : : $\sqrt{d\alpha^2 + d\beta^2} : \sqrt{d\alpha'^2 + d\beta'^2}$, che è l' analogia che dovevasi dimostrare, mentre i termini del secondo rapporto esprimono precisamente gli archetti MM′, NN′.

NOTA *D*.

Si prenda per origine delle coordinate il punto fisso A; s' indichino con (α, β), (α', β') rispettivamente i punti M, N; e chiamisi t la tangente trigonometrica dell' angolo costante MAN. Si avrà per questo caso

$$\frac{\alpha'\beta - \alpha\beta'}{\alpha\alpha' + \beta\beta'} - t = U = 0; \qquad \text{e di seguito}$$

$$\left(\frac{dU}{d\alpha}\right) = -\frac{\left(\beta - \alpha\frac{d\beta}{d\alpha}\right)\left(\alpha'^2 + \beta'^2\right)}{(\alpha\alpha' + \beta\beta')^2}, \quad \left(\frac{dU}{d\alpha'}\right) = \frac{\left(\beta' - \alpha'\frac{d\beta'}{d\alpha'}\right)\left(\alpha^2 + \beta^2\right)}{(\alpha\alpha' + \beta\beta')^2}.$$

---

(1) In generale se due rette formano con l' asse delle x angoli che hanno per tangenti trigonometriche h, ed h', e si chiami ϕ l' angolo compreso da queste rette, dovrà essere

$$\text{tang.}\,\phi = \frac{\text{sen}\,\phi}{\sqrt{1 - \text{sen}^2\phi}} = \frac{h - h'}{1 + hh'}; \qquad \text{e quindi} \quad \text{sen}\,\phi = \frac{h - h'}{\sqrt{1 + h^2 + h'^2 + h^2h'^2}}.$$

Sarà dunque (Nota *A*)

$$\left(y-\beta-(x-\alpha)\frac{d\beta'}{d\alpha'}\right)\left(\beta-\alpha\frac{d\beta}{d\alpha}\right)\left(\alpha'^2+\beta'^2\right)-$$

$$\left(y-\beta'-(x-\alpha')\frac{d\beta}{d\alpha}\right)\left(\beta'-\alpha'\frac{d\beta'}{d\alpha'}\right)\left(\alpha^2+\beta^2\right)=v=0$$

l' equazione della retta che passa pel punto Q, e taglia la corda MN nel punto cercato; e se per l' origine A delle coordinate si tiri la parallela AD a questa retta, si avrà

$$\left[y-x\frac{d\beta'}{d\alpha'}\right]\left(\beta-\alpha\frac{d\beta}{d\alpha}\right)\left(\alpha'^2+\beta'^2\right)-$$

$$\left[y-x\frac{d\beta}{d\alpha}\right]\left(\beta'-\alpha'\frac{d\beta'}{d\alpha'}\right)\left(\alpha^2+\beta^2\right)=0\ \ldots\ldots\ldots\ (\mathrm{P}).$$

Ora aggiungendo e togliendo insieme al primo membro della precedente equazione la quantità

$$\left(\beta-\alpha\frac{d\beta}{d\alpha}\right)\left(\beta'-\alpha'\frac{d\beta'}{d\alpha'}\right)\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\,\sqrt{\alpha'^2+\beta'^2},$$

essa, messo per brevità $\frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{\sqrt{\alpha'^2+\beta'^2}}=m$, prenderà la forma

$$\left[y-x\frac{d\beta'}{d\alpha'}-\left(\beta'-\alpha'\frac{d\beta'}{d\alpha'}\right)m\right]\left(\beta-\alpha\frac{d\beta}{d\alpha}\right)\left(\alpha'^2+\beta'^2\right)-$$

$$\left[y-x\frac{d\beta}{d\alpha}-\frac{\beta-\alpha\frac{d\beta}{d\alpha}}{m}\right]\left(\beta'-\alpha'\frac{d\beta'}{d\alpha'}\right)\left(\alpha^2+\beta^2\right)=0\ \ldots\ldots\ (\mathrm{P}),$$

ed è visibile che deve essere verificata quando si ha contemporaneamente

$$y-m\beta'=\frac{d\beta'}{d\alpha'}(x-m\alpha')\ \ldots\ (p),\qquad y-\frac{\beta}{m}=\frac{d\beta}{d\alpha}\left(x-\frac{\alpha}{m}\right)\ \ldots\ (p').$$

Adunque la retta AD, rappresentata da (P), passa pel punto d' intersezione delle due rette (p), (p') che sono le parallele tirate alle tangenti PN, PM rispettivamente pe' punti $(m\alpha', m\beta')$, $\left(\frac{\alpha}{m}, \frac{\beta}{m}\right)$. Or il primo di questi punti si trova sulla retta AN ad una distanza dal punto A eguale ad AM, ed il secondo trovasi sopra AM distante da A per AN; dunque: *Se nelle* AN, AM *si prendano le parti* AF, AE

rispettivamente eguali ad AM, AN, *e pe' punti* E, F *si tirino alle tangenti* PM, PN *le parallele* ED, FD *che s' incontrino nel punto* D; *unendo* AD, *e tirandogli per* Q *la parallela* QC, *questa retta incontrerà la* MN *nel punto cercato.*

Intanto per passare da questa costruzione a quella che geometricamente s'è rilevata nel §. 10, si osservi che deve stare

sen ADF : sen ADE : : AF sen AFD : AE sen AED,

ovvero per costruzione

sen ADF : sen ADE : : AM sen ANP : AN sen AMP,

o ancora

sen MQC : sen NQC : : AM sen ANP : AN sen AMP,

e di seguito

PM . MC : PN . NC : : AM sen ANP : AN sen AMP.

Quest' ultima analogia è quella che si è ottenuta nel §. 10., donde s' è ricavata la costruzione ivi riportata.

NOTA *E*.

Preso per origine delle coordinate il punto fisso A, s' indichino con (α, β), (α', β') gli estremi M, N della corda; e sia n il rapporto costante che i due raggi vettori si debbono serbare. Dovrà essere $\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha'^2+\beta'^2} - n^2 = \mathrm{U} = 0$, donde risulta

$$\left(\frac{d\mathrm{U}}{d\alpha}\right) = \frac{2\left(\alpha'^2+\beta'^2\right)\left(\alpha+\beta\frac{d\beta}{d\alpha}\right)}{(\alpha'^2+\beta'^2)^2}, \text{ e } \left(\frac{d\mathrm{U}}{d\alpha'}\right) = -\frac{2\left(\alpha^2+\beta^2\right)\left(\alpha'+\beta'\frac{d\beta'}{d\alpha'}\right)}{(\alpha'^2+\beta'^2)^2};$$

e quindi l' equazione della retta, che passa pel punto Q, e pel punto cercato, sarà

$$\left[y-\beta-(x-\alpha)\frac{d\beta'}{d\alpha'}\right]\left(\alpha+\beta\frac{d\beta}{d\alpha}\right)\left(\alpha'^2+\beta'^2\right) -$$

$$\left[y-\beta'-(x-\alpha')\frac{d\beta}{d\alpha}\right]\left(\alpha'+\beta'\frac{d\beta'}{d\alpha'}\right)\left(\alpha^2+\beta^2\right) = v = 0.$$

Per l' origine A delle coordinate si abbassi la perpendicolare AD su questa retta; tal perpendicolare sarà rappresentata dall' equazione

$$\left[y\frac{d\beta'}{d\alpha'}+x\right]\left(\alpha+\beta\frac{d\beta}{d\alpha}\right)\left(\alpha'^2+\beta'^2\right)-$$

$$\left[y\frac{d\beta}{d\alpha}+x\right]\left(\alpha'+\beta'\frac{d\beta'}{d\alpha'}\right)\left(\alpha^2+\beta^2\right)=0$$

al primo membro della quale aggiungendo, e togliendo insieme la quantità

$$\left(\alpha+\beta\frac{d\beta}{d\alpha}\right)\left(\alpha'+\beta'\frac{d\beta'}{d\alpha'}\right)\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\sqrt{\alpha'^2+\beta'^2},$$

essa, messo per brevità $\frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{\sqrt{\alpha'^2+\beta'^2}}=m$, prenderà la forma

$$\left[y\frac{d\beta'}{d\alpha'}+x-\left(\alpha'+\beta'\frac{d\beta'}{d\alpha'}\right)m\right]\left(\alpha+\beta\frac{d\beta}{d\alpha}\right)\left(\alpha'^2+\beta'^2\right)-$$

$$\left[y\frac{d\beta}{d\alpha}+x-\frac{\alpha+\beta\frac{d\beta}{d\alpha}}{m}\right]\left(\alpha'+\beta'\frac{d\beta'}{d\alpha'}\right)\left(\alpha^2+\beta^2\right)=0.$$

Intanto verificandosi quest'equazione quando si ha nello stesso tempo

$$y-m\beta'=\frac{-d\alpha'}{d\beta'}(x-m\alpha')\ldots\ldots(q),\qquad y-\frac{\beta}{m}=\frac{-d\alpha}{d\beta}\left(x-\frac{\alpha}{m}\right)\ldots\ldots(q'),$$

si vede che la retta AD da essa rappresentata deve passare pel punto d' intersezione delle due rette (q), (q') che sono le perpendicolari tirate alle tangenti PN, PM rispettivamente pe' due punti $(m\alpha', m\beta')$, $\left(\frac{\alpha}{m}, \frac{\beta}{m}\right)$. Or questi due punti si trovano sopra i due raggi vettori ciascuno distante dal punto fisso A per quanto è l' altro raggio vettore. Adunque risulta da ciò il teorema enunciato nel §. 11.

NOTA *F*.

Per risolvere questo problema prendansi per assi coordinati la retta che unisce i due punti fissi A, B, e la perpendicolare elevatale nel suo punto medio. Questi punti potranno allora esprimersi per $(p, 0)$, $(-p, 0)$; e le congiungenti loro con gli estremi (α, β), (α', β') della corda saranno rappresentate dalle equazioni

$$y = \frac{\beta}{\alpha - p}(x - p), \qquad \text{ed} \qquad y = \frac{\beta'}{\alpha' + p}(x + p).$$

Ciò posto dovrà essere per la condizione del problema

$$\frac{\beta}{\alpha - p} - \frac{\beta'}{\alpha' + p} = \mathrm{U} = 0, \quad \text{ovvero} \quad \beta(\alpha' + p) - \beta'(\alpha - p) = \mathrm{U} = 0,$$

donde ricavasi

$$\left(\frac{d\mathrm{U}}{d\alpha}\right) = (\alpha' + p)\frac{d\beta}{d\alpha} - \beta', \qquad \text{e} \qquad \left(\frac{d\mathrm{U}}{d\alpha'}\right) = \beta - (\alpha - p)\frac{d\beta'}{d\alpha'}.$$

Adunque l' equazione della retta che passa pel punto Q, e pel contatto cercato sarà

$$\left(y - \beta - (x - \alpha)\frac{d\beta'}{d\alpha'}\right)\left[(\alpha' + p)\frac{d\beta}{d\alpha} - \beta'\right] -$$

$$\left(y - \beta' - (x - \alpha')\frac{d\beta}{d\alpha}\right)\left[(\alpha - p)\frac{d\beta'}{d\alpha'} - \beta\right] = v = 0,$$

ossia

$$\left[y - x\frac{d\beta'}{d\alpha'}\right]\left[(\alpha' + p)\frac{d\beta}{d\alpha} - \beta'\right] - \left[y - x\frac{d\beta}{d\alpha}\right]\left[(\alpha - p)\frac{d\beta'}{d\alpha'} - \beta\right] +$$

$$p\alpha'\frac{d\beta}{d\alpha}\frac{d\beta'}{d\alpha'} + p\alpha\frac{d\beta}{d\alpha}\frac{d\beta'}{d\alpha'} - p\beta'\frac{d\beta'}{d\alpha'} - p\beta\frac{d\beta}{d\alpha} = 0,$$

o ancora

$$\left[y - x\frac{d\beta'}{d\alpha'} + p\frac{d\beta'}{d\alpha'}\right]\left((\alpha' + p)\frac{d\beta}{d\alpha} - \beta'\right) -$$

$$\left[y - x\frac{d\beta}{d\alpha} - p\frac{d\beta}{d\alpha}\right]\left((\alpha - p)\frac{d\beta'}{d\alpha'} - \beta\right) = 0.$$

Or si vede che la retta rappresentata da quest' equazione passa pel punto d' intersezione delle due rette

$$y = \frac{d\beta'}{d\alpha'}(x - p), \qquad \text{ed} \qquad y = \frac{d\beta}{d\alpha}(x + p)$$

che sono le parallele tirate per i due punti fissi $(p, 0)$, $(-p, 0)$ alle tangenti PN, PM applicate agli estremi della corda. Adunque si ha da ciò il teorema che si è conchiuso nel §. 12.

MEMORIA

DELL' AB. REMIGIO DEL GROSSO

SULLE PROPRIETÀ DELLE LINEE DI 2.° ORDINE CIRCOSCRITTE AD UN QUADRILATERO, E DELLE SUPERFICIE DEL MEDESIMO ORDINE CIRCOSCRITTE AD UN OTTAEDRO.

Presentata dal Socio Cav. Vincenzo Flauti
e approvata dal Socio e Segretario Prof. Giuseppe Bianchi.

L' illustre Matematico Gergonne nel Volume XVII de' suoi *Annali delle Matematiche* a pag. 284 faceva la proposta de' tre seguenti problemi: I. *Qual è l' ellissi più approssimata al circolo che possa circoscriversi ad un dato quadrilatero.* II. *Qual è il cono a base circolare più approssimato al cono retto che possa circoscriversi ad un dato tetraedro.* III. *Qual è l'elissoide più approssimato alla sfera che possa circoscriversi ad un ottaedro dato.* Qualche anno dopo la proposta di questi problemi il Cav. Steiner si occupava della soluzione del primo soltanto, e nel II Volume del pregiatissimo Giornale Matematico di Crelle a pag. 64 rendeva di pubblica ragione i risultamenti delle sue ricerche. Ecco per intero l' articolo del Geometra Berlinese, che mi sono studiato di voltare dal tedesco nel nostro natìo idioma.

« Problema. *Qual è l' ellissi più approssimata al circolo che possa circoscriversi ad un dato quadrilatero?*

Soluzione. (*a*) *Per quattro punti posti in una superficie piana può sempre farsi passare un' ellissi, se ciascun punto è collocato dalla parte esterna delle rette menate per gli altri tre.*

(*b*) *Tutte le sezioni coniche, che passano per questi quattro punti, hanno un sistema di diametri coniugati rispettivamente paralleli.*

(c) *Tra tutte le coppie dei diametri coniugati di una ellissi, gli eguali formano fra loro l' angolo più piccolo: e l' ellissi si approssima tanto più al cerchio, quanto più il rapporto degli assi si avvicina all' unità, ovveramente quanto più l' angolo dei due diametri coniugati eguali si avvicina all' angolo retto; poichè se* a, b *sono i semiassi dell' ellissi, ed* α *l' angolo di quei diametri, si ha*

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\, \alpha = \frac{b}{a}.$$

(d) *Quindi conseguita che l' ellissi cercata è quella, i cui diametri coniugati eguali appartengono al sistema dei paralleli. Perciocchè in qualunque altra ellissi i due diametri coniugati, che appartengono al sistema dei paralleli, non essendo eguali fra loro, in questa i due diametri eguali formano un angolo più piccolo che nell' altra, e però la divisata ellissi differenzia dal circolo più dell' altra.*

(e) *Inoltre tra tutte le sezioni coniche, che passano per quattro punti dati, esistono due sole parabole; e di più uno dei diametri coniugati della parabola essendo sempre parallelo al suo asse, ne siegue che gli assi di tali parabole sono paralleli al sistema dei diametri paralleli.*

(f) *E poichè il centro della parabola è a distanza infinita, se ne deduce che la* locale *dei centri di tutte le sezioni coniche suddette è un' iperbole, i cui assintoti debbono esser paralleli ai due assi delle parabole.* »

Questo articolo del Cav. Steiner mi spinse a cercare nei seguenti Volumi del Giornale di Crelle se per avventura da quel sommo Geometra o da altri si fosse dato opera a risolvere i due ultimi problemi proposti dal Gergonne. Tutte le mie ricerche però sono state frustranee; e non pure in quel Giornale Matematico, ma eziandio nei seguenti Volumi degli *Annales des Mathématiques*, nella Corrispondenza Matematica e Fisica del Quetelet, nelle Memorie del Poncélet, nel Giornale Matematico di Liouville, ed in altre opere di simil fatta non ho trovato una sola parola scritta in rapporto

alle due divisate quistioni geometriche. Questo mi ha indotto a giudicare che forse sinora nessuna soluzione ne abbian dato i Geometri.

Tralasciando del tutto la 2.ª delle quistioni proposte dal Gergonne, io ho voluto, in seguito di siffatto giudizio, studiare le proprietà delle superficie del 2.° ordine circoscritte ad un ottaedro; ed ho verificato che queste proprietà contengono come casi particolari quelle trovate dal Geometra Berlinese relativamente alle coniche circoscritte ad un quadrilatero.

In questa Memoria io presento il processo analitico da me seguìto per giugnere allo scoprimento di sì belle verità. Nè a questo solo mi sto contento, ma dimostro pure come possa coll' analisi devenirsi ai medesimi risultati ottenuti dal Cav. Steiner, applicandola alle coniche circoscritte ad un quadrilatero. Divido perciò questa mia Memoria in due parti; ed espongo nella prima le dimostrazioni analitiche dei teoremi del Geometra di Berlino, e nell'altra quelle de' teoremi da me rinvenuti relativamente alle superficie di 2.° ordine circoscritte ad un ottaedro.

PARTE PRIMA.

Delle proprietà delle coniche circoscritte ad un quadrilatero.

Sieno dati in una superficie piana quattro punti A, B, C, D disposti per modo, che ciascuno di essi si trovi dalla parte esterna delle rette che passano per gli altri tre, e rappresenti

$$(1) \qquad y^2 + 2axy + bx^2 + 2cy + 2ex + f = 0$$

l' equazione di una curva conica che passa per cotesti punti. Se si pone l'origine delle coordinate (x, y) (le quali supporremo rettangolari) nel punto A, e si assume per asse delle ordinate y la retta $\overline{AC}$, s' intende di leggieri che, posto $\overline{AC} = 2k$, l'equazione (1) dovrà essere soddisfatta dai seguenti valori delle coordinate

$$x=0, \quad y=0$$
$$x=0, \quad y=2k.$$

Sostituendoli successivamente nella (1), si troverà

$$f=0, \quad 4k^2+4ck=0,$$

dall' ultima delle quali risulta $c=-k$. In conseguenza la proposta equazione (1) si traduce in

$$(2) \qquad y^2-2ky+2axy+bx^2+2ex=0.$$

Sieno inoltre (α, β), $(-\alpha', \beta')$ le coordinate degli altri due punti B, D. Dovendo questi particolari valori di (x, y) soddisfare alla equazione (2), si avrà

$$\left.\begin{array}{l} \beta^2-2k\beta+2a\alpha\beta+b\alpha^2+2e\alpha=0 \\ \beta'^2-2k\beta'-2a\alpha'\beta'+b\alpha'^2-2e\alpha'=0 \end{array}\right\} (E).$$

Risolvendo quest' equazioni per rispetto alle incognite b, e, troveremo

$$b=m+na$$
$$e=p+qa,$$

dinotando m, n, p, q funzioni di α, β, α', β', k. Questi valori cangiano la (2) in

$$(3) \qquad y^2-2ky+2axy+(m+na)x^2+2(p+qa)x=0,$$

la quale equazione a cagione dell' indeterminata a che contiene dimostra la verità del seguente teorema:

Teor. I. *Il numero delle curve coniche, che possono passare per quattro punti disposti in un piano, per modo che ciascuno si trovi dalla parte esterna del triangolo, che formano le rette tirate per gli altri tre punti, è infinito.*

Ho dimostrato a pag. 13 della mia *Teorica Analitica delle linee di 2.° ordine* che se un diametro di una conica qualunque incontra l' asse delle x sotto l' angolo ψ, l' altro diametro coniugato taglierà il medesimo asse sotto un tale angolo μ, che sarà definito per l' equazione

$$\text{(4)} \qquad \operatorname{tg}\mu = -\frac{\mathrm{A}\operatorname{tg}\psi + 2\mathrm{C}}{2\operatorname{tg}\psi + \mathrm{A}},$$

purchè l' equazione della conica data sia

$$y^2 + y(\mathrm{A}x + \mathrm{B}) + \mathrm{C}x^2 + \mathrm{D}x + \mathrm{E} = 0 \quad (\mathrm{H}).$$

Nel caso presente si ha

$$\mathrm{A} = 2a,\ \mathrm{B} = -2k,\ \mathrm{C} = m + na,\ \mathrm{D} = p + qa,\ \mathrm{E} = 0;$$

onde la equazione (4) si cangia in

$$\operatorname{tg}\mu = -\frac{a\operatorname{tg}\psi + na + m}{\operatorname{tg}\psi + a}.$$

Facciamo svanire il denominatore da questa equazione, e poscia riducendone a zero il secondo membro avremo

$$0 = m + \operatorname{tg}\mu\operatorname{tg}\psi + a(\operatorname{tg}\mu + \operatorname{tg}\psi + n).$$

Supponendo che si voglia soddisfare a questa equazione indipendentemente da qualunque valore aver possa l' indeterminata a, sarà mestieri che abbiasi simultaneamente

$$0 = m + \operatorname{tg}\mu\operatorname{tg}\psi$$
$$0 = n + \operatorname{tg}\mu + \operatorname{tg}\psi.$$

Adunque i valori di $\operatorname{tg}\mu$, $\operatorname{tg}\psi$ sono tali da potersi riguardare come le radici dell' equazione

$$z^2 + nz - m = 0.$$

Risolvendo questa equazione si trova

$$\text{(5)} \qquad \begin{cases} \operatorname{tg}\mu = -\frac{n}{2} + \frac{\sqrt{n^2 + 4m}}{2} \\ \operatorname{tg}\psi = -\frac{n}{2} - \frac{\sqrt{n^2 + 4m}}{2}. \end{cases}$$

Sia adesso ε l' angolo sotto il quale si tagliano questi diametri coniugati, e sarà per le note formole della Trigonometria

$$\operatorname{sen}\varepsilon = \frac{\operatorname{tg}\mu - \operatorname{tg}\psi}{\sqrt{(1 + \operatorname{tg}^2\mu)(1 + \operatorname{tg}^2\psi)}}.$$

Sostituendo qui i trovati valori di $\operatorname{tg}\mu$, $\operatorname{tg}\psi$, e ponendo mente che si ha

$$(1+\mathrm{tg}^2\mu)(1+\mathrm{tg}^2\psi)=1+\mathrm{tg}^2\mu+\mathrm{tg}^2\psi+(\mathrm{tg}\,\mu\;\mathrm{tg}\,\psi)^2,$$

si deverrà agevolmente a questo risultato

$$\text{(6)}\qquad \mathrm{sen}\,\varepsilon=\frac{\sqrt{n^2+4m}}{\sqrt{n^2+(m+1)^2}}\,.$$

Intanto l' equazioni (5) dimostrano la verità di quest' altro bel teorema:

Teor. II. *L' infinite sezioni coniche, le quali possono farsi passare per quattro dati punti, hanno una coppia di diametri coniugati paralleli a due rette di posizione invariabile.*

L' equazione (H) appartiene alla parabola quando resta verificata l' equazione

$$\text{(7)}\qquad A^2-4C=0,$$

e la posizione dell'asse di cotesta curva per rispetto a quello delle x è definito dall' equazione

$$\text{(8)}\qquad \mathrm{tg}\,\mu=-\frac{A}{2}\,.$$

Quando si vogliono determinare nel numero le curve paraboliche che si contengono nella equazione (3), bisogna sostituire nella (7) rispettivamente $2a$, $m+na$ in luogo di A, C. Così facendo la (7) si traduce in

$$a^2-na-m=0,$$

la quale risoluta per rispetto ad a porge

$$\text{(9)}\qquad a=\frac{n}{2}\pm\frac{\sqrt{n^2+4m}}{2}\,.$$

Sieno μ_1, μ_2 i valori di μ corrispondenti a questi valori di a, e facendo la sostituzione dei medesimi nella (8), troveremo successivamente

$$\mathrm{tg}\,\mu_1=-\frac{n}{2}-\frac{\sqrt{n^2+4m}}{2}$$

$$\mathrm{tg}\,\mu_2=-\frac{n}{2}+\frac{\sqrt{n^2+4m}}{2}\,.$$

Quest' equazioni e la (9) dimostrano la verità del teorema seguente:

Teor. III. *Tra le infinite coniche, che possono passare per quattro punti collocati in un piano nel modo dianzi descritto, due sole possono esser paraboliche, e gli assi di queste sono paralleli alle due rette di posizione invariabile.*

Sieno (ξ, η) le coordinate del centro di una delle curve comprese nell' equazione (3), e sarà

$$(10) \qquad (y-\eta)^2 + 2a(y-\eta)(x-\xi) + (m+na)(x-\xi)^2 - s = 0$$

una nuova forma che potremo dare alla divisata equazione. La identità dell' equazioni (3) e (10) importa che abbiasi

$$k = \eta + a\xi$$

$$p + qa = -a\eta - (m+na)\xi$$

$$s = \eta^2 + 2a\xi\eta + (m+na)\xi^2.$$

Eliminando a fra le due prime di quest' equazioni, si ottiene

$$(11) \qquad 0 = (k-\eta)(\eta + n\xi + q) + m\xi^2 + p\xi.$$

Paragonando questa equazione colla (H), si trova

$$A = n, \quad B = q - k, \quad C = -m, \quad D = -p - nk, \quad E = -qk$$

e conseguentemente

$$A^2 - 4C = n^2 + 4m > 0.$$

Essa dunque appartiene all' iperbole. Inoltre a pag. 12 del mentovato mio opuscolo ho dimostrato che gli angoli, sotto i quali gli assintoti dell' iperbole tagliano l' asse delle ascisse, sono le due radici dell' equazione

$$\operatorname{tg}^2\psi + A \cdot \operatorname{tg}\psi + C = 0.$$

In conseguenza gli angoli ψ_1, ψ_2, che misurano le inclinazioni degli assintoti della curva (11) sull' asse delle ascisse, saranno definiti per l' equazioni seguenti

$$\operatorname{tg}\psi_1 = -\frac{n}{2} + \frac{\sqrt{n^2+4m}}{2}$$

$$\operatorname{tg}\psi_2 = -\frac{n}{2} - \frac{\sqrt{n^2+4m}}{2}.$$

Di qui risulta evidente quest' altro teorema:

Teor. IV. *La locale di tutti i centri delle infinite sezioni coniche, che possono farsi passare per quattro punti dati in un piano, è un' iperbole, i cui assintoti son paralleli alle due rette di posizione invariabile.*

Rappresentino (α_0, β_0) le coordinate di un punto preso nel piano delle coniche definite dall' equazione (1). La *polare* di questo punto presa per rispetto ad una qualunque delle coniche suddette sarà definita per l' equazione

$$0 = (\beta_0 + a\alpha_0 - k)y + [p + m\alpha_0 + a(\beta_0 + n\alpha_0 + q)]x - k\beta_0 + \alpha_0(p + aq).$$

Ora supponiamo che vogliasi l' *inviluppo* di questa retta. Ponendo che siano (u, v) le coordinate dell' inviluppo richiesto, bisognerà che sian vere le due equazioni differenziali seguenti

$$\frac{dv}{du} = -\frac{p + m\alpha_0 + a(\beta_0 + n\alpha_0 + q)}{\beta_0 + a\alpha_0 - k}$$

$$v - u\frac{dv}{du} = \frac{k\beta_0 - p\alpha_0 - aq\alpha_0}{\beta_0 + a\alpha_0 - k}.$$

Eliminando a fra queste due equazioni risulta

$$\frac{(\beta_0 - k)\frac{dv}{du} + p + m\alpha_0}{\alpha_0\frac{dv}{du} + \beta_0 + n\alpha_0 + q} = \frac{(\beta_0 - k)\left(v - u\frac{dv}{du}\right) - k\beta_0 + p\alpha_0}{\left(v - u\frac{dv}{du}\right)\alpha_0 + q\alpha_0}.$$

Si facciano svanire i denominatori, e poscia eseguendo le moltiplicazioni indicate e le riduzioni de' termini simili, si avrà un risultato della forma

$$0 = \mathrm{M} \cdot \frac{dv}{du} + \mathrm{N}\left(v - u\frac{dv}{du}\right) + \mathrm{P},$$

dinotando M, N, P funzioni di α_0, β_0, k, m, n, p, q. Differenziando questa equazione viene

$$0 = \mathrm{M} - \mathrm{N}u,$$

dopo di aver diviso pel fattor comune $\frac{d^2v}{du^2}$. Quindi risulta

$$u = \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{N}} = \text{cost}:,$$

valore che sostituito nella precedente equazione porge

$$v = -\frac{P}{N} = \text{cost}:$$

L' inviluppo cercato adunque è un punto, e però risulta evidente la verità di quest' altro teorema:

Teor. V. *Se nel piano delle infinite sezioni coniche, che possono farsi passare per quattro punti dati comunque, si prende un punto a piacimento, le polari di questo punto corrispondenti a ciascuna delle coniche suddette passano tutte per un altro punto determinato.*

L' angolo che misura la reciproca inclinazione dei due diametri coniugati eguali di una qualunque dell' ellissi, che si comprendono nell' equazione (3), si ponga $= W$; e dinotando per H, K i due semiassi di questa medesima curva, sarà in conseguenza di un conosciuto teorema

$$\text{sen } W = \frac{2HK}{H^2 + K^2}. \tag{12}$$

Da quanto trovasi dimostrato a pag. 23 del mentovato mio opuscolo i valori di H, K dipendono dall' equazioni

$$\frac{R^2}{H^2} = \frac{1+m+na}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{4a^2 + (1-m-na)^2}$$

$$\frac{R^2}{K^2} = \frac{1+m+na}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{4a^2 + (1-m-na)^2},$$

dinotando R una certa funzione di a, m, n, p, q. Si sostituiscano questi valori nella (12), e sarà agevole devenire al seguente risultato

$$\text{sen } W = \frac{2\sqrt{m+na-a^2}}{1+m+na}. \tag{13}$$

Quando si vuole che la funzione sen W e quindi W sia un *maximum*, bisogna primamente determinare a per modo che resti soddisfatta l' equazione differenziale

$$\frac{d \text{ sen } W}{da} = 0,$$

e poscia vedere se questo valor di a verifichi l'altra condizione

$$\frac{d^2 \operatorname{sen} W}{d a^2} < 0 .$$

Sarà meglio però render prima *razionale* l' esprcssione della funzione trigonometrica sen W, e poscia procedere alla ricerca del *maximum*. E però si faccia

$$m + na - a^2 = (a - \lambda')(\lambda'' - a),$$

adottando le lettere λ', λ'' per simboli delle radici dell'equazione

$$\lambda^2 - n\lambda - m = 0;$$

e rappresentando con θ una nuova indeterminata, supponiamo che abbiasi

$$(a - \lambda')(\lambda'' - a) = \theta^2 (a - \lambda')^2 :$$

il valore di a sarà dato in funzione di θ^2 per l' equazione

$$a = \frac{\lambda'' + \lambda' \theta^2}{1 + \theta^2} .$$

Ciò posto, sarà facile verificare quest' altre equazioni

$$a - \lambda' = \frac{\lambda'' - \lambda'}{1 + \theta^2}$$

$$(a - \lambda')(\lambda'' - a) = \frac{(\lambda'' - \lambda')^2 \theta^2}{(1 + \theta^2)^2}$$

$$1 + m + na = \frac{1 + \lambda''^2 + (1 + \lambda'^2)\theta^2}{1 + \theta^2},$$

avvertendo che si ha

$$m = -\lambda' \lambda''$$

$$n = \lambda' + \lambda''.$$

Sostituendo questi valori nella (13) troveremo

$$(14) \qquad \operatorname{sen} W = \frac{2(\lambda'' - \lambda')\theta}{1 + \lambda''^2 + (1 + \lambda'^2)\theta^2} .$$

Adesso si differenzi questa equazione, nella quale θ è la variabile indipendente, e si avrà

$$(15) \qquad \frac{1}{2} \frac{d \operatorname{sen} W}{d\theta} = \frac{(\lambda'' - \lambda')[1 + \lambda''^2 - (1 + \lambda'^2)\theta^2]}{[1 + \lambda''^2 + (1 + \lambda'^2)\theta^2]^2},$$

onde per adempire la prima condizione del *maximum* converrà che sia

$$\theta = \sqrt{\frac{1+\lambda''^2}{1+\lambda'^2}}\,.$$

La seconda condizione a cui deve adempirsi, affinchè questo valore di θ renda un *maximum* la funzione sen W, si è che sostituendolo in $\frac{d^2 \operatorname{sen} W}{d\theta^2}$ risulti

$$\frac{d^2 \operatorname{sen} W}{d\theta^2} < 0\,.$$

Si differenzi perciò una seconda volta l' equazione (15), e trovandosi

$$\frac{1}{2}\,\frac{d^2 \operatorname{sen} W}{d\theta^2} = \frac{-(\lambda''-\lambda')(1+\lambda'^2)\,\theta\,[6(1+\lambda''^2)-2(1+\lambda'^2)\theta^2]}{[1+\lambda''^2+(1+\lambda'^2)\theta^2]^3}\,,$$

il determinato valore di θ farà evidentemente risultare

$$\frac{d^2 \operatorname{sen} W}{d\theta^2} < 0\,,$$

essendo $\lambda''-\lambda' > 0$. Ora si sostituisca questo valore di θ nella (14), e verrà

$$\text{(16)} \qquad \operatorname{sen} W = \frac{2(\lambda''-\lambda')}{\sqrt{(1+\lambda'^2)(1+\lambda''^2)}}\,.$$

E poichè dall' equazione

$$\lambda^2 - n\lambda - m = 0$$

si deduce

$$\lambda'' = \frac{n}{2} + \frac{\sqrt{n^2+4m}}{2}$$

$$\lambda' = \frac{n}{2} - \frac{\sqrt{n^2+4m}}{2}\,,$$

sostituendo nella (16) si avrà

$$\operatorname{sen} W = \frac{\sqrt{n^2+4m}}{\sqrt{n^2+(m+1)^2}}\,.$$

Paragonando questa equazione colla (6) risulta

$$W = \varepsilon\,.$$

Adunque resta dimostrato il seguente teorema:

Teor. VI. *Tra tutte l'ellissi, che possono passare per quattro dati punti nel modo stabilito fin dal principio di questa ricerca, a quella appartengono i diametri coniugati eguali che si tagliano sotto un angolo massimo, nella quale questi diametri riescono paralleli alle due rette di posizione invariabile.*

Dall' equazione (12) risulta che, posto $W = 90^\circ$, viene

$$H = K,$$

e conseguentemente l' ellissi si trasforma in un circolo. Di quì avviene che a misura che W più si avvicina a diventare eguale all' angolo retto, l' ellissi più si approssima alla figura circolare. Ma abbiamo dimostrato che W diventa un *maximum* quando i diametri coniugati eguali dell' ellissi riescono paralleli alle due rette di posizione invariabile. In conseguenza risulta evidente il teorema:

Teor. VII. *Tra le infinite ellissi che possono farsi passare per quattro dati punti, quella si approssima più alla figura circolare, nella quale i diametri coniugati eguali riescono paralleli alle due rette di posizione invariabile.*

NOTA.

Tutti i teoremi precedenti, eccetto il I. e V., reggono nella ipotesi che sia $n^2 + 4m > 0$. Sarà dunque prezzo dell' opera il dimostrare come questa condizione rimanga sempre soddisfatta quando i punti A, B, C, D son disposti in un medesimo piano per modo, che ciascuno resti dalla parte esterna del triangolo che formano le rette condotte per gli altri tre. Ora l' equazioni (E) porgono

$$m = \frac{\alpha'\beta(2k - \beta) + \alpha\beta'(2k - \beta')}{\alpha\alpha'(\alpha + \alpha')}.$$

Ma quando i punti A, B, C, D sono disposti nel modo dianzi indicato risulta sempre

$$2k - \beta > 0, \qquad 2k - \beta' > 0.$$

Adunque sarà eziandio in cosiffatta ipotesi

$$n^2 + 4m > 0,$$

come dovevasi dimostrare.

PARTE SECONDA.

Delle proprietà delle superficie di 2°. ordine circoscritte ad un dato ottaedro.

L' equazione ad un sistema di superficie di 2°. ordine, che si può far passare pei vertici degli angoli di un dato ottaedro, è sempre della forma

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} 0 = &\ (a+a'\omega)z^2+(b+b'\omega)y^2+(c+c'\omega)x^2 \\ &+2(e+e'\omega)zy+2(f+f'\omega)zx+2(g+g'\omega)yx \\ &+2(h+h'\omega)z+2(i+i'\omega)y+2(k+k'\omega)x\,, \end{aligned}\right.$$

rappresentando con a, a', b, b',...., k, k' date quantità costanti, con ω una quantità indeterminata, e finalmente con x, y, z un sistema di coordinate rettangole aventi la loro origine in uno dei vertici del dato ottaedro. Ed in vero l'equazione generale ad una superficie di 2°. ordine è della forma seguente

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} 0 = &\ Az^2+By^2+Cx^2+2Ezy+2Fzx+2Gyx \\ &+2Hz+2Iy+2Kx+L\,. \end{aligned}\right.$$

Quando l' origine delle coordinate rettangole si pone in uno dei vertici degli angoli del dato ottaedro, intorno al quale si suppone circoscritta la superficie dell' equazione (2), questa equazione deve restar verificata supponendo

$$z=0,\quad y=0,\quad x=0,$$

per la qual cosa sarà $L=0$. Inoltre sieno

$$(x', y', z'),\quad (x'', y'', z''),\ \ldots\ldots,\ (x^{\text{VII}}, y^{\text{VII}}, z^{\text{VII}})$$

le coordinate dei vertici degli altri sette angoli dell'ottaedro, e dovendo la superficie (2) passare per cosiffatti punti si avranno sette equazioni lineari per rispetto alle indeterminate A, B, C, ..., K. Queste indeterminate sono nove di numero, ma si possono ben ridurre ad otto, dividendo per A le suddette

equazioni. Le quali risolute coi metodi che s' insegnano nell' Algebra non potranno porgere per $\frac{B}{A}$, $\frac{C}{A}$, ..., $\frac{K}{A}$ se non valori della forma

$$p + q\omega,$$

dinotando p, q quantità date in funzione delle coordinate de' vertici degli angoli dell' ottaedro, ed ω una fra le quantità $\frac{B}{A}$, $\frac{C}{A}$, ..., $\frac{K}{A}$, che necessariamente deve restare indeterminata. Quindi è vero il nostro assunto, purchè però suppongasi $a = 1$, $a' = \omega$. Noi però riterremo tuttavia $a + a'\omega$ pel coefficiente di z^2 nella (1), e cotesto in grazia della simmetria delle formole che dobbiamo svolgere quì appresso.

L' equazione (1) a cagione dell' indeterminata ω che contiene rende evidente questo teorema:

Teor. I. *Pei vertici degli angoli di un qualunque ottaedro si possono far passare infinite superficie di 2°. ordine.*

È da por mente però che se tutti gli angoli del dato ottaedro non sono salienti, nessuna di queste infinite superficie di 2°. ordine, che gli si possono circoscrivere, potrà essere del genere degli ellissoidi.

Rappresentino

$$(3) \qquad \begin{cases} x = mz + p \\ y = nz + q \end{cases}$$

l'equazioni di un diametro qualunque di una delle superficie (1); e ponendo per brevità

$$(4) \qquad \begin{cases} 0 = M + \dfrac{e + e'\omega + (b + b'\omega)n + (g + g'\omega)m}{a + a'\omega + (e + e'\omega)n + (f + f'\omega)m} \\[2ex] 0 = N + \dfrac{f + f'\omega + (g + g'\omega)n + (c + c'\omega)m}{a + a'\omega + (e + e'\omega)n + (f + f'\omega)m} \\[2ex] 0 = P + \dfrac{h + h'\omega + (i + i'\omega)n + (k + k'\omega)m}{a + a'\omega + (e + e'\omega)n + (f + f'\omega)m} \end{cases}$$

si avrà per l' equazione del piano diametrale coniugato al diametro (3)

$$z = My + Nx + P.$$

Ora supponiamo che la posizione di questo piano per rispetto a quelli delle coordinate debba essere indipendente da ω: chiara cosa è che le due prime equazioni (4) dovrannosi risolvere in

$$M = -\frac{e+bn+gm}{a+en+fm} = -\frac{e'+b'n+g'm}{a'+e'n+f'm}$$

$$N = -\frac{f+gn+cm}{a+en+fm} = -\frac{f'+g'n+c'm}{a'+e'n+f'm}.$$

Di quì risulta

$$\frac{a+en+fm}{a'+e'n+f'm} = \frac{e+bn+gm}{e'+b'n+g'm} = \frac{f+gn+cm}{f'+g'n+c'm} = w,$$

dinotando w il valore di queste tre frazioni eguali. Facendo sparire i denominatori da quest' equazioni, se ne deducono queste altre tre

$$(5)\quad \begin{cases} o = a - a'w + n(e - e'w) + m(f - f'w) \\ o = e - e'w + n(b - b'w) + m(g - g'w) \\ o = f - f'w + n(g - g'w) + m(c - c'w). \end{cases}$$

Eliminando m ed n fra le due prime di quest'equazioni si ha

$$m = -\frac{(a-a'w)(b-b'w)-(e-e'w)^2}{(b-b'w)(f-f'w)-(e-e'w)(g-g'w)}$$

$$n = \frac{(a-a'w)(g-g'w)-(e-e'w)(f-f'w)}{(b-b'w)(f-f'w)-(e-e'w)(g-g'w)},$$

valori che sostituiti nella terza porgono

$$(6)\quad \begin{cases} o = (a-a'w)(b-b'w)(c-c'w)-(c-c'w)(e-e'w)^2 \\ \quad -(b-b'w)(f-f'w)^2-(a-a'w)(g-g'w)^2 \\ \quad +2(e-e'w)(f-f'w)(g-g'w). \end{cases}$$

Questa equazione di terzo grado in w ha tutte e tre reali le sue radici (*). In conseguenza esistono tre sistemi di valori

(*) Sarebbe superfluo il recare quì la dimostrazione della *realità* delle tre radici dell' equazione (6). Dessa si traduce agevolmente in quest' altra

reali di m, n, e perciò anche di M, N che soddisfano alla quistione proposta. Possiamo dunque stabilire la verità del seguente teorema:

Teor. II. *Ciascuna dell' infinite superficie di 2°. ordine, che possono farsi passare per otto punti dati, ammette un sistema di diametri coniugati paralleli a tre rette di posizione invariabile.*

Affinchè una delle superficie (1) sia sfornita di centro, ed in conseguenza appartenga alla specie de' *paraboloidi*, è mestieri che si verifichino l' equazioni seguenti

$$a + a'\omega + (e + e'\omega)n + (f + f'\omega)m = 0$$
$$e + e'\omega + (b + b'\omega)n + (g + g'\omega)m = 0$$
$$f + f'\omega + (g + g'\omega)n + (c + c'\omega)m = 0 .$$

Quest' equazioni si traducono nelle (5), ponendovi $-w$ in luogo di ω; onde l' eliminata in ω avrà la stessa forma della (6). Adunque sebbene all' indeterminata ω si possono attribuire infiniti valori nella (1), pure per tre soli e non più la corrispondente superficie è della specie de' paraboloidi. Inoltre i valori, che in corrispondenza a questi di ω prendono m ed n, sono identici con quelli dipendenti dall' equazione (6). Ma m ed n in questo caso fissano la posizione degli assi de' paraboloidi. In conseguenza è incontrastabile anche la verità di quest' altro teorema:

Teor. III. *Delle infinite superficie di 2°. ordine, le quali possono circoscriversi ad un dato ottaedro, tre sole sono para-*

$$0 = (X - A)(X - B)(X - C) - (X - A)(X\cos\lambda - a)^2$$
$$- (X - B)(X\cos\mu - b)^2 - (X - C)(X\cos\nu - c)^2$$
$$+ 2(X\cos\lambda - a)(X\cos\mu - b)(X\cos\nu - c),$$

le radici della quale sono tutte reali, siccome ha dimostrato il Signor Jacobi (v. il Giornale Matematico di Crelle), riducendo a questa equazione la soluzione del problema dei tre assi principali delle superficie di 2°. ordine nella ipotesi che le medesime sieno riferite ad un sistema di coordinate oblique, le quali si taglino rispettivamente sotto gli angoli λ, μ, ν.

boloidi; ed i costoro assi sono paralleli alle tre rette di posizione invariabile.

Sieno (ξ, η, ζ) le coordinate del centro di una qualunque delle superficie (1), e si dia alla divisata equazione la seguente forma

$$\begin{aligned} 0 = &(a+a'\omega)(z+\zeta)^2 + (b+b'\omega)(y+\eta)^2 + (c+c'\omega)(x+\xi)^2 \\ &+ 2(e+e'\omega)(z+\zeta)(y+\eta) + 2(f+f'\omega)(z+\zeta)(x+\xi) \\ &+ 2(g+g'\omega)(y+\eta)(x+\xi) - S. \end{aligned}$$

Sviluppando i termini di questa equazione e paragonandoli con quelli della (1) si ottiene

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} &(a+a'\omega)\zeta + (e+e'\omega)\eta + (f+f'\omega)\xi = h+h'\omega \\ &(b+b'\omega)\eta + (e+e'\omega)\zeta + (g+g'\omega)\xi = i+i'\omega \\ &(c+c'\omega)\xi + (f+f'\omega)\zeta + (g+g'\omega)\eta = k+k'\omega \end{aligned} \right.$$

$$S = F(\xi, \eta, \zeta),$$

la quale funzione è un polinomio in ξ, η, ζ come lo è in x, y, z il 2°. membro dell' equazione (1). Eliminando ω fra la prima e terza, e seconda e terza delle (7), verrà

$$\frac{a\zeta + e\eta + f\xi - h}{a'\zeta + e'\eta + f'\xi - h'} = \frac{c\xi + f\zeta + g\eta - k}{c'\xi + f'\zeta + g'\eta - k'}$$

$$\frac{b\eta + e\zeta + g\xi - i}{b'\eta + e'\zeta + g'\xi - i'} = \frac{c\xi + f\zeta + g\eta - k}{c'\xi + f'\zeta + g'\eta - k'},$$

equazioni che evidentemente appartengono a due iperboloidi. Quindi risulta evidente il teorema:

Teor. IV. *La* Locale *di tutti i centri delle superficie di 2°. ordine circoscrittibili ad un dato ottaedro, è l' intersezione di due iperboloidi.*

Rappresentino (α, β, γ) un sistema di coordinate oblique parallele alle tre rette di posizione invariabile, e fra questo sistema di coordinate e quello delle rettangolari (x, y, z) esisteranno le relazioni lineari che sieguono

$$x = p\alpha + q\beta + r\gamma$$
$$y = p'\alpha + q'\beta + r'\gamma$$
$$z = p''\alpha + q''\beta + r''\gamma.$$

In quest' equazioni p, q, r; p', q', r'; p'', q'', r'' rappresentano quantità indipendenti da ω; onde sostituendo nella (1) i valori che esse forniscono per x, y, z, e ponendo mente che gli assi delle nuove coordinate sono paralleli ad un sistema di diametri coniugati, si avrà una trasformata in α, β, γ della forma seguente

$$\begin{aligned} 0 = (P + P'\omega)\gamma^2 + (Q + Q'\omega)\beta^2 + (R + R'\omega)\alpha^2 \\ + 2(T + T'\omega)\gamma + 2(U + U'\omega)\beta + (V + V'\omega)\alpha. \end{aligned}$$

Sieno (ξ', η', ζ') le coordinate del centro di una delle superficie contenute in questa equazione, computate parallelamente alle tre rette di posizione invariabile; e verrà in seguito di un ragionamento analogo a quello, che abbiam fatto precedentemente,

$$\frac{P\zeta' - T}{P'\zeta' - T'} = \frac{Q\eta' - U}{Q'\eta' - U'}$$
$$\frac{Q\eta' - U}{Q'\eta' - U'} = \frac{R\xi' - V}{R'\xi' - V'}$$
$$\frac{P\zeta' - T}{P'\zeta' - T'} = \frac{R\xi' - V}{R'\xi' - V'}.$$

Quest' equazioni appartengono a tre iperboli riferite agli assintoti come assi delle coordinate. In conseguenza risulta evidente quest' altro teorema:

Teor. V. *Le projezioni della locale de' centri delle superficie di 2°. ordine circoscritte ad un ottaedro fatte nei tre piani diametrali, che determinano i diametri coniugati paralleli alle tre rette di posizione invariabile, sono iperboli coniche, i cui assintoti sono paralleli a queste rette medesime.*

Sieno (λ, μ, ν) le coordinate di un punto preso a piacere nello spazio, e supponiamole computate parallelamente

al sistema degli assi obliqui paralleli alle tre rette di posizione invariabili. In questo caso l'equazione del piano *polare* corrispondente al punto (λ, μ, ν) sarà

$$\begin{aligned} o = [(P+P'\omega)\nu + T + T'\omega]\gamma + [(Q+Q'\omega)\mu + U + U'\omega]\beta \\ + [(R+R'\omega)\lambda + V + V'\omega]\alpha + (T+T'\omega)\nu + (U+U'\omega)\mu \\ + (V+V'\omega)\lambda . \end{aligned}$$

Differenziando questa equazione relativamente all' indeterminata ω, ed eguagliando a zero il coefficiente differenziale che ne risulta, si ottiene

$$(8) \qquad \left\{ \begin{aligned} o = (P'\nu + T')\gamma + (Q'\mu + U')\beta + (R'\lambda + V')\alpha \\ + T'\nu + U'\mu + V'\lambda . \end{aligned} \right.$$

Si moltiplichi questa equazione per ω, e sottratta dalla precedente porge

$$(9) \qquad \left\{ \begin{aligned} o = (P\nu + T)\gamma + (Q\mu + U)\beta + (R\lambda + V)\alpha \\ + T\nu + U\mu + V\lambda . \end{aligned} \right.$$

L' *inviluppo* di tutti i piani *polari* corrispondenti al punto (λ, μ, ν), e relativi alle infinite superficie di 2°. ordine rappresentate dall' equazione (1), sarà dunque determinato dal sistema dell' equazioni (8) e (9), cioè sarà una linea retta. Di quì il seguente teorema:

Teor. VI. *Tutti i piani* polari *relativi alle infinite superficie di 2°. ordine circoscrittibili ad un dato ottaedro, e corrispondenti ad un medesimo punto posto comunque nello spazio, si tagliano lungo una stessa linea retta.*

Sieno φ, π, ψ,; φ', π', ψ' due sistemi di diametri coniugati appartenenti ad uno qualunque degli ellissoidi (1), ed A, B, C; A', B', C' gli angoli sotto i quali si tagliano a due a due i rispettivi diametri di ciascun sistema; e si avranno le seguenti relazioni

$$\varphi'^2 + \pi'^2 + \psi'^2 = \varphi^2 + \pi^2 + \psi^2,$$

$$\varphi'^2 \pi'^2 \operatorname{sen}^2 A' + \varphi'^2 \psi'^2 \operatorname{sen}^2 B' + \pi'^2 \psi'^2 \operatorname{sen}^2 C'$$

$$= \varphi^2 \pi^2 \operatorname{sen}^2 A + \varphi^2 \psi^2 \operatorname{sen}^2 B + \pi^2 \psi^2 \operatorname{sen}^2 C.$$

Quando si suppone che $\varphi' = \pi' = \psi'$, da quest' equazioni evidentemente si deduce

$$\operatorname{sen}^2 A' + \operatorname{sen}^2 B' + \operatorname{sen}^2 C' = \frac{\varphi^2 \pi^2 \operatorname{sen}^2 A + \varphi^2 \psi^2 \operatorname{sen}^2 B + \pi^2 \psi^2 \operatorname{sen}^2 C}{\frac{1}{9}(\varphi^2 + \pi^2 + \psi^2)^2};$$

dove ponendo per brevità e maggior comodo di algoritmo

$$H = \operatorname{sen}^2 A' + \operatorname{sen}^2 B' + \operatorname{sen}^2 C'$$

$$\pi^2 = \varphi^2 (1 - e^2)$$

$$\psi^2 = \varphi^2 (1 - e'^2),$$

verrà

$$(10) \qquad H = \frac{9\left[(1-e^2) \operatorname{sen}^2 A + (1-e'^2) \operatorname{sen}^2 B + (1-e^2)(1-e'^2) \operatorname{sen}^2 C\right]}{(3 - e^2 - e'^2)^2}.$$

Ora immaginiamo che i diametri coniugati φ, π, ψ diventino paralleli alle tre rette di posizione invariabile; e diventando quantità costanti in seguito di questa ipotesi le tre funzioni sen A, sen B, sen C, cerchiamo che cosa debban diventare e ed e' onde la funzione H sia un *massimo*. È indubitato primamente dover esser e ed e' tali quantità, che debbono verificare simultaneamente le due equazioni di condizione

$$(11) \qquad \frac{dH}{de} = 0, \quad \frac{dH}{de'} = 0.$$

Differenziando la (10) successivamente per rispetto ad e ed e' si ottiene

$$(12) \quad \begin{cases} \dfrac{dH}{de} = \dfrac{-18e\left[(1+e^2-e'^2)(\operatorname{sen}^2 A + (1-e'^2)\operatorname{sen}^2 C) - 2(1-e'^2)\operatorname{sen}^2 B\right]}{(3-e^2-e'^2)^3} \\[2ex] \dfrac{dH}{de'} = \dfrac{-18e'\left[(1-e^2+e'^2)(\operatorname{sen}^2 B + (1-e^2)\operatorname{sen}^2 C) - 2(1-e^2)\operatorname{sen}^2 A\right]}{(3-e^2-e'^2)^3} \end{cases}$$

dalla semplice inspezione de' quali risultati si argomenta non potersi soddisfare alle (11) se non che supponendo

$$(13)\qquad e=0,\quad e'=0,$$

ovveramente

$$(14)\quad \begin{cases} (1+e^2-e'^2)(\text{sen}^2A+(1-e'^2)\,\text{sen}^2C)-2(1-e'^2)\,\text{sen}^2B=0\\ (1-e^2+e'^2)(\text{sen}^2B+(1-e^2)\,\text{sen}^2C)-2(1-e^2)\,\text{sen}^2A=0. \end{cases}$$

Ritenendo i valori di e ed e' che somministrano l' equazioni (13), se con

$$\left(\frac{d^2H}{de^2}\right),\ \left(\frac{d^2H}{de'^2}\right),\ \left(\frac{d^2H}{de\,de'}\right)$$

si rappresenta ciò che diventano in tale ipotesi

$$\frac{d^2H}{de^2},\ \frac{d^2H}{de'^2},\ \frac{d^2H}{de\,de'}$$

sarà facile verificare le seguenti equazioni

$$\left(\frac{d^2H}{de^2}\right)=-\tfrac{2}{3}(\text{sen}^2A+\text{sen}^2C-2\,\text{sen}^2B)$$

$$\left(\frac{d^2H}{de'^2}\right)=-\tfrac{2}{3}(\text{sen}^2B+\text{sen}^2C-2\,\text{sen}^2A)$$

$$\left(\frac{d^2H}{de\,de'}\right)=0,$$

le quali dimostrano essere H un *massimo* nel solo caso di

$$\text{sen}^2A+\text{sen}^2C-2\,\text{sen}^2B>0$$

$$\text{sen}^2B+\text{sen}^2C-2\,\text{sen}^2A>0,$$

Se poi l'equazioni (14) si risolvono relativamente ad e ed e', i valori che esse porgono per tali quantità non soddisfano affatto alle condizioni di massimo o minimo. In conseguenza la funzione H ovvero il trinomio

$$\text{sen}^2A'+\text{sen}^2B'+\text{sen}^2C'$$

non può altrimenti diventare un massimo, se non che nella ipotesi che i tre diametri eguali dell' ellissoide diventino paralleli alle tre rette di posizione invariabile. Di qui risulta manifesta la verità del seguente teorema:

Teor. VII. *Se i diametri coniugati eguali di qualchedono degli ellissoidi contenuti nell' equazione* (1) *si tagliano a due a due sotto angoli massimi, ciò non può avvenire se non che diventando paralleli alle tre rette di posizione invariabile.*

Pel centro di uno qualunque degli ellissoidi circoscritti al nostro ottaedro immaginiamo che si tiri un piano parallelamente ad uno dei tre piani, che determinano le tre rette di posizione invariabile: questo piano taglierà la superficie anzidetta secondo una conica ellittica. Siano φ, π i diametri coniugati di questa conica paralleli alle corrispondenti due rette di posizione invariabile; A l'angolo che ne misura l'inclinazione; ed A' sia l'angolo sotto il quale si tagliano i diametri coniugati eguali della conica divisata: chiara cosa è che fra siffatte quantità avrà luogo la relazione seguente

$$\text{sen A}' = \frac{2\varphi\pi \text{ sen A}}{\varphi^2 + \pi^2}.$$

Poniamo, come abbiam fatto quì innanzi,

$$\pi^2 = \varphi^2 (1 - e^2),$$

e sostituendo nella precedente equazione sarà agevole tradurla in quest' altra

$$\text{sen A}' = \frac{2 \text{ sen A} \sqrt{1 - e^2}}{2 - e^2}.$$

Quadrando questa equazione viene

$$\text{sen}^2 \text{A}' = \frac{4 \text{ sen}^2 \text{A} (1 - e^2)}{4 - 4e^2 + e^4} = \frac{\text{sen}^2 \text{A}}{1 + \frac{e^4}{4(1 - e^2)}}$$

onde volendo che sen A' sia un *massimo*, deve verificarsi l'unica equazione di condizione $e = 0$. Di quì il seguente teorema:

Teor. VIII. *I diametri coniugati eguali delle sezioni ellittiche fatte sugli ellissoidi* (1) *con piani diametrali paralleli ai piani, che determinano le tre rette di posizione invariabile, si tagliano sotto angoli massimi nel solo caso, nel quale siffatti diametri riescono paralleli a quelle rette.*

La figura di un ellissoide si approssima più e più alla figura sferica a misura che gli angoli, sotto i quali tagliansi i suoi diametri eguali, più si approssimano all' angolo retto. In conseguenza fra molti dati ellissoidi quello si approssima più alla sfera, nel quale gli angoli che misurano le reciproche inclinazioni de' diametri eguali, sono altrettanti massimi. Ora nei nostri ellissoidi questi angoli non possono diventar massimi, se non che quando solamente i diametri coniugati eguali diventano paralleli alle tre rette di posizione invariabile. Adunque stabiliremo quest' altro teorema:

Teor. IX. *Tra gli ellissoidi compresi nell' equazione* (1) *quello si approssima più di ogni altro alla sfera, nel quale i diametri coniugati eguali riescono paralleli alle tre rette di posizione invariabile.*

APPLICAZIONI DEI TRASCENDENTI ELLITTICI
ALLA QUADRATURA DI ALCUNE CURVE SFERICHE

MEMORIA

DEL SOCIO ATTUALE

AB. BARNABA TORTOLINI

PROFESSORE DI CALCOLO SUBLIME

NELLA PONTIFICIA UNIVERSITÀ DELLA SAPIENZA IN ROMA.

Ricevuta il 26 Luglio 1849.

INTRODUZIONE.

Se x, y, z rappresentino le coordinate ortogonali di un punto appartenente ad una superficie conica, ed α, β, γ le coordinate del suo vertice, che chiameremo anche Centro del Cono, l' equazioni della generatrice saranno della forma

$$x-\alpha=m(z-\gamma), \quad y-\beta=n(z-\gamma)$$

m, n variano secondo la posizione variabile della generatrice, ed uno è funzione dell' altro. Quando la curva che dirige il movimento della generatrice sia collocata nel piano delle xy, e di equazione

$$f(x', y')=0,$$

facendo $z=0$ nell' equazioni della generatrice i valori delle x, y appartengono ad un punto qualunque (x', y') della direttrice, in modo che si avrà

$$x'=\alpha-m\gamma, \quad y'=\beta-n\gamma,$$

ove sostituendo

$$m=\frac{x-\alpha}{z-\gamma}, \quad n=\frac{y-\beta}{z-\gamma}$$

si dedurrà per l' equazione della superficie conica

$$f\left(\frac{\alpha(z-\gamma)-\gamma(x-\alpha)}{z-\gamma},\quad \frac{\beta(z-\gamma)-\gamma(y-\beta)}{z-\gamma}\right)=0\,.$$

Se l' asse delle z si confondesse coll' asse del cono e se di più l' origine delle coordinate sia situata nel centro dello stesso cono, sarà $\alpha=0$, $\beta=0$ e converrà inoltre sostituire $\gamma-z$ invece di z; perciò l' equazione della superficie conica diviene

$$f\left(\frac{\gamma x}{z},\ \frac{\gamma y}{z}\right)=0,$$

d' onde segue che dall' equazione $f(x,y)=0$ della direttrice si passa all' equazione del cono costruito sopra questa curva coll' origine al centro del cono, sostituendo $\frac{\gamma x}{z}$, $\frac{\gamma y}{z}$ invece delle coordinate x,y. L' ordinata γ denota l' altezza del cono, e potrebbe anche scriversi semplicemente

$$f\left(\frac{x}{z},\ \frac{y}{z}\right)=0\,.$$

Ciò posto imaginiamo una sfera concentrica al cono, in modo che per gli stessi valori delle coordinate, sia

$$x^2+y^2+z^2=1\,.$$

In questo caso dalla mutua intersezione delle due superficie verrà delineata nella sfera una curva a doppia curvatura, che nella sua forma avrà una somiglianza colla figura della direttrice. La varietà di queste *curve sferiche* dipenderà dalla varietà delle curve piane direttrici del cono, e saranno esse completamente determinate dalla coesistenza delle due equazioni

$$f\left(\frac{x}{z},\ \frac{y}{z}\right)=0,\qquad x^2+y^2+z^2=1\,.$$

Dal centro ora della sfera si conduca una retta ad un punto (x,y,z) comune alle due superficie, e che sarà anche un punto della curva sferica, e si chiamino ξ, η gli angoli che le projezioni di questa retta ne' piani xz, yz formano coll' asse delle z, si avrà evidentemente

$$\frac{x}{z} = \operatorname{tang}\xi, \quad \frac{y}{z} = \operatorname{tang}\eta,$$

d' onde

$$x = \frac{\operatorname{tang}\xi}{\sqrt{(1+\operatorname{tang}^2\xi+\operatorname{tang}^2\eta)}}, \quad y = \frac{\operatorname{tang}\eta}{\sqrt{(1+\operatorname{tang}^2\xi+\operatorname{tang}^2\eta)}}, \quad z = \frac{1}{\sqrt{(1+\operatorname{tang}^2\xi+\operatorname{tang}^2\eta)}}.$$

Di qui l' equazione della superficie conica diviene

$$f(\operatorname{tang}\xi, \operatorname{tang}\eta) = 0.$$

Le nuove variabili ξ, η diconsi *coordinate sferiche* della nuova curva, e la precedente equazione si dirà l' equazione della curva sferica riferita alle sue coordinate sferiche: le medesime ξ, η rappresenteranno per ciascun punto (x, y, z) due archi di circoli massimi condotti perpendicolarmente dallo stesso punto (x, y, z) sopra due circoli massimi della sfera, fra loro perpendicolari. Da tutto ciò si deduce, che costruito un cono sopra una curva di equazione $f(x, y) = 0$, ed intersecato con una superficie sferica concentrica, si passerà dall' equazione della direttrice all' equazione della curva sferica, riferita alle sue coordinate sferiche ortogonali colla semplice sostituzione di $\operatorname{tang}\xi$, $\operatorname{tang}\eta$ invece di x, y. Che anzi se intendiamo che x, y sieno queste tangenti trigonometriche, allora la medesima equazione potrà servire a rappresentare tanto la direttrice, quanto la curva sferica. Inoltre come le curve piane si distinguono in diversi ordini secondo il grado delle loro equazioni, così le indicate curve sferiche si distingueranno in altrettanti ordini secondo il grado delle variabili $\operatorname{tang}\xi$, $\operatorname{tang}\eta$, e potremo enunciare che tanto le direttrici, quanto le curve sferiche appartengono ad uno stesso ordine. Queste considerazioni sono d' accordo con quanto nel suo Saggio di Geometria analitica sferica stabilisce il Sig. Professor *A. Borgnet* di Tours (1), e più anticamente anche il Signor *Gudermann* di Munster. Le denominazioni poi si potrebbero desumere in alcuni casi dalle denominazioni delle curve di-

(1) Essai de Géometrie analytique de la sphère. *Tours*, 12 Giugno 1847.

rettrici. Così se la direttrice sia una curva conica, l' intersezione del cono con una sfera concentrica produrrà delle curve, che chiamansi *coniche sferiche*.

Le *coniche sferiche* sono state studiate, e si studiano dai Geometri, e specialmente da Fuss nel secolo scorso negli Atti dell' Accademia di Pietroburgo, dal Sig. *Gudermann*, dal Sig. *Chasles*, *Borgnet* ed altri. Un gran numero di proposizioni eleganti, e di teoremi al tutto somiglianti a quei che già da lungo tempo si conoscono nelle curve coniche ordinarie, si trova sussistere anche per queste nuove curve: l' equazioni poi di una qualunque delle indicate curve riferite alle loro coordinate sferiche ortogonali si ritrova assai facilmente, quando sia data la equazione della direttrice del cono. Così per esempio se

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

sia l' equazione di un ellissi, e sia c l' altezza di un cono da costruirsi sopra questa curva, l' equazione del cono si otterrà col sostituire $\frac{cx}{z}$, $\frac{cy}{z}$ invece di x, y, e sarà

$$\frac{c^2 x^2}{a^2} + \frac{c^2 y^2}{b^2} = z^2 .$$

Chiamando α, β gli angoli formati coll' altezza c dalle due generatrici del cono che vanno all' estremità dei semiassi maggiore, e minore a, b, si avrà

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{a}{c}, \quad \operatorname{tang}\beta = \frac{b}{c};$$

per ciò l' equazione del cono diviene

$$\frac{x^2}{\operatorname{tang}^2\alpha} + \frac{y^2}{\operatorname{tang}^2\beta} = z^2 .$$

Infine per la sostituzione di $\operatorname{tang}\xi$, $\operatorname{tang}\eta$ invece di $\frac{x}{z}$, $\frac{y}{z}$, otterremo l' equazione dell' ellissi sferica

$$\frac{\operatorname{tang}^2\xi}{\operatorname{tang}^2\alpha} + \frac{\operatorname{tang}^2\eta}{\operatorname{tang}^2\beta} = 1$$

riferita alle coordinate sferiche ortogonali. Ognun vede che l' equazione è al tutto somigliante a quella dell' ellissi piana. Nella stessa guisa prendendo la curva

$$(x^2+y^2)^2=a^2x^2-b^2y^2$$

l'equazione del cono di altezza c e coll'origine al centro sarà

$$c^2(x^2+y^2)^2=z^2(a^2x^2-b^2y^2).$$

Qui pure ponendo $a=c\tan\alpha$, $b=c\tan\beta$, otterremo una modificazione relativa alle costanti, ma più semplicemente possiamo supporre $c=1$, ed allora le costanti a, b rappresenteranno le due indicate tangenti trigonometriche, e potremo scrivere

$$(x^2+y^2)^2=z^2(a^2x^2-b^2y^2).$$

Infine per la curva sferica riferita alle sue coordinate sferiche ortogonali, si avrà l' equazione

$$(\operatorname{tang}^2\xi+\operatorname{tang}^2\eta)^2=a^2\operatorname{tang}^2\xi-b^2\operatorname{tang}^2\eta$$

somigliante all' equazione della direttrice. In questa Memoria ci prefiggiamo di intraprendere delle ricerche sulla quadratura di alcune curve sferiche, delle quali la formazione è desunta da quelle curve piane più comunemente studiate dai Geometri. I trascendenti ellittici si presentano in un gran numero di problemi riguardanti la rettificazione delle curve, la quadratura delle superficie curve, e cubatura dei solidi. Si vedrà in molti esempi che in quelle curve piane, ove l' arco viene espresso da qualche trascendente ellittico delle tre note specie, costruendo sopra queste un cono, ed intersecandolo con una sfera concentrica, l' area segnata e compresa da questa intersezione viene in molti casi egualmente espressa da uno o più trascendenti ellittici. Non così accade delle rettificazioni delle medesime che per lo più sono espresse da trascendenti ultraellittici. Gli esempi scelti, la qualità dell'analisi, e gli sviluppi che mi si sono presentati in queste ricerche mostreranno una nuova applicazione ai trascendenti ellittici,

importante ramo di analisi creato da Legendre, che è stato portato al più alto grado di perfezionamento dai più grandi Geometri del nostro secolo.

Quadratura di alcune curve sferiche provenienti dalle intersezioni di un cono, e di una sfera concentrica.

1. La formola generale per la quadratura delle superficie curve è come si conosce

$$S = \iint dx\,dy \sqrt{\left[1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right]}.$$

Quando i punti x, y, z sono situati sopra la superficie di una sfera di equazione

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

si avrà per le derivate parziali

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{x}{z}, \quad \frac{dz}{dy} = -\frac{y}{z},$$

quindi otterremo per la sostituzione

$$S = \iint \frac{dx\,dy}{\sqrt{(1 - x^2 - y^2)}}.$$

Intersecando pertanto la sfera con un cono concentrico di equazione

$$f\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) = 0$$

ed eliminando la z, otterremo per la projezione della curva sferica nel piano delle xy, l'equazione

$$f\left(\frac{x}{\sqrt{(1 - x^2 - y^2)}}, \frac{y}{\sqrt{(1 - x^2 - y^2)}}\right) = 0$$

e la integrazione dovrà eseguirsi per tutti quei valori di x, y. che verificano la precedente equazione. Nelle applicazioni che sceglieremo, l'integrazione riesce più comoda col sostituire alle x, y un'angolo u, ed un raggio ρ compreso fra i

limiti $\rho = 0$, $\rho = 1$, in modo che per la nota teorica della trasformazione degli integrali multipli si otterrà il cangiamento di differenziali e delle derivate, e si procederà quindi alle integrazioni estese entro i convenuti limiti, che soddisfino all' equazione della projezione della curva sferica, come si vedrà dagli esempi che mostreremo.

2. Projettando il centro dell' iperbola sulle sue tangenti, otteniamo pel luogo geometrico la curva del quarto ordine

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2 x^2 - b^2 y^2.$$

Questa curva dotata di centro, e limitata in tutte le direzioni nella sua figura somiglia alla *lemniscata*, e ad essa si riduce nel caso dell' iperbola equilatera. Costruendo sopra di essa un cono di altezza c, e coll' origine delle coordinate nel centro del cono, si avrà per la sua equazione

$$c^2 (x^2 + y^2)^2 = z^2 (a^2 x^2 - b^2 y^2)$$

I rapporti $\frac{a}{c}$, $\frac{b}{c}$ rappresentano le tangenti trigonometriche degli angoli, che le generatrici del cono formano con il suo asse, allorchè passano per l' estremità dei semiassi a, b; tuttavia le costanti a, b, c potranno nell' equazione del cono ridursi a due per la supposizione di $c = 1$, ed in questa guisa le quantità a, b rappresenteranno esse stesse i valori delle indicate tangenti trigonometriche. Adottando adunque la coesistenza delle due equazioni

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1, \qquad (x^2 + y^2)^2 = z^2 (a^2 x^2 - b^2 y^2)$$

è chiaro che dalla intersezione di queste due superficie concentriche verrà delineata nella sfera una curva a doppia curvatura, e somigliante nella sua figura a quella della *lemniscata*. Eliminando la z, e prendendo per fissare le idee $b < 1$ otterremo per la projezione della curva sferica nel piano delle xy la curva di quarto ordine

$$(x^2 + y^2) [(1 + a^2) x^2 + (1 - b^2) y^2] = a^2 x^2 - b^2 y^2.$$

La figura della nuova curva è parimenti somigliante alla *lemniscata*, il centro è un punto doppio, e le intersezioni coll' asse delle x sono determinate dai valori

$$x=0, \quad x=0, \quad x=\frac{a}{\sqrt{(1+a^2)}}, \quad x=-\frac{a}{\sqrt{(1+a^2)}}.$$

Per l' equazione polare prendiamo

$$x=r\cos u, \quad y=r\,\mathrm{sen}\,u;$$

per ciò

$$r^2=\frac{a^2\cos^2 u-b^2\,\mathrm{sen}^2 u}{(1+a^2)\cos^2 u+(1-b^2)\,\mathrm{sen}^2 u}.$$

L'origine del raggio vettore r trovasi nel centro della curva, punto doppio della medesima, ove la direzione del raggio è tangente alla curva, e l' angolo u sarà allora per $r=0$ determinato dalla condizione

$$a^2\cos^2 u-b^2\,\mathrm{sen}^2 u=0, \qquad \text{ovvero} \quad \mathrm{tang}\,u=\frac{a}{b}.$$

Infine per $u=0$ il raggio r si confonde con uno dei semiassi della curva, il che porge $r=\frac{a}{\sqrt{(1+a^2)}}$, come si è ritrovato con le coordinate ortogonali. I valori poi delle coordinate x, y, z comuni alle due superficie si esprimeranno evidentemente colla sola variabile u per mezzo delle equazioni

$$x^2=\frac{(a^2+b^2)\cos^4 u-b^2\cos^2 u}{1-b^2+(a^2+b^2)\cos^2 u}$$

$$y^2=\frac{a^2\,\mathrm{sen}^2 u-(a^2+b^2)\,\mathrm{sen}^4 u}{1-b^2+(a^2+b^2)\cos^2 u}$$

$$z^2=\frac{1}{1-b^2+(a^2+b^2)\cos^2 u}$$

e delle quali faremo uso nella ricerca dell' area sferica.

3. Per applicare la formola generale della quadratura sferica riportata al parag. 1. al caso in questione, basterà verificare l' equazione della curva di projezione

$$(x^2+y^2)[(1+a^2)x^2+(1-b^2)y^2]=a^2x^2-b^2y^2$$

per mezzo di due valori di x, y espressi da altre due variabili, il che avvertendo alle ultime equazioni del parag. antecedente, e ponendo per brevità

$$R^2 = 1 - b^2 + (a^2 + b^2)\cos^2 u$$

potremo fare col prendere

$$x = \frac{\rho \cos u \sqrt{[(a^2+b^2)\cos^2 u - b^2]}}{R}$$

$$y = \frac{\rho \operatorname{sen} u \sqrt{[(a^2+b^2)\cos^2 u - b^2]}}{R}.$$

La variabile ausiliare ρ dovrà esser compresa fra i limiti $\rho = 0$, $\rho = 1$, e per la z avremo

$$z = \sqrt{\left(1 - \frac{\rho^2[(a^2+b^2)\cos^2 u - b^2]}{R^2}\right)}.$$

Ciò posto indichiamo con x', y' le derivate delle x, y relative alla variabile ρ, e con x_i, y_i le derivate relative ad u_i, e pongasi per brevità

$$A = a^2 + 2b^2 - b^4,\quad B = -2(1-b^2)(a^2+b^2),\quad C = -(a^2+b^2)^2$$

$$A_i = (1-b^2)b^2,\quad R_i^2 = (a^2+b^2)\cos^2 u - b^2$$

avremo, eseguite le riduzioni

$$x' = \frac{R_i \cos u}{R},\qquad y' = \frac{R_i \operatorname{sen} u}{R}$$

$$x_i = \frac{\rho \operatorname{sen} u\,(A_i + B\cos^2 u + C\cos^4 u)}{R_i R^3}$$

$$y_i = -\frac{\rho \cos u\,(A + B\cos^2 u + C\cos^4 u)}{R_i R^3}.$$

Nell' integrale duplicato all' elemento $dx\,dy$ si deve nella trasformazione delle variabili sostituire il nuovo elemento $x'y_i - x_i y'$, perciò facendo

$$\alpha = -b^2(1-b^2),\quad \beta = -(a^2+b^2)(2b^2-1),\quad \gamma = -C = (a^2+b^2)^2$$

otterremo

$$x'y_i - x_i y' = \frac{\rho(\alpha + \beta\cos^2 u + \gamma\cos^4 u)}{R^4},$$

quindi l' integrale del parag. 1. rappresentante la quadratura sferica diviene

$$S = \iint \frac{\rho(\alpha + \beta\cos^2 u + \gamma\cos^4 u)\, d\rho\, du}{R^4 \sqrt{\left(1 - \frac{\rho^2 R_{,}^2}{R^2}\right)}}.$$

Questo integrale è suscettivo di una riduzione: riprendiamo infatti i valori di R^2, $R_{,}^2$ e di α, β, γ, si troverà

$$R^2 . R_{,}^2 = \alpha + \beta\cos^2 u + \gamma\cos^4 u$$

per ciò

$$S = \iint \frac{R_{,}^2\, \rho\, d\rho\, du}{R^2 \sqrt{\left(1 - \frac{\rho^2 R_{,}^2}{R^2}\right)}}.$$

I limiti dell' integrale sono $\rho = 0$, $\rho = 1$, ed $u = 0$ $u = \text{arc tang}\left(\frac{a}{b}\right) = \theta$ per la quarta parte dell' area sferica, onde per l' intera si ha

$$S = 4\int_0^\theta \int_0^1 \frac{R_{,}^2\, \rho\, d\rho\, du}{R^2 \sqrt{\left(1 - \frac{\rho^2 R_{,}^2}{R^2}\right)}}.$$

Integrando adunque relativamente alla variabile ρ fra i prescritti limiti, abbiamo per $R^2 - R_{,}^2 = 1$

$$\int_0^1 \frac{\rho\, d\rho}{\sqrt{\left(1 - \frac{R_{,}^2}{R^2}\rho^2\right)}} = \frac{R^2}{R_{,}^2} - \frac{R}{R_{,}^2},$$

quindi l' integrale definito duplicato si ridurrà agli integrali definiti semplici

$$S = 4\left(\int_0^\theta du - \int_0^\theta \frac{du}{R}\right).$$

Il secondo degli integrali è un trascendente ellittico incompleto di prima specie: infatti per $b < 1$ potremo scegliere una quantità k minore dell' unità in modo che sia

$$k^2 = \frac{a^2 + b^2}{a^2 + 1}, \qquad \text{ed} \quad R = \sqrt{(1 + a^2)} \cdot \sqrt{(1 - k^2 \operatorname{sen}^2 u)}$$

d' onde

$$S = 4\left(\theta - \frac{1}{\sqrt{(1+a^2)}} \int_0^\theta \frac{du}{\sqrt{(1 - k^2 \operatorname{sen}^2 u)}}\right),$$

e ponendo come fa Legendre

$$F(k, \theta) = \int_0^\theta \frac{du}{\sqrt{(1 - k^2 \operatorname{sen}^2 u)}}$$

si avrà in fine

$$S = 4 \cdot \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{a}{b}\right) - \frac{4}{\sqrt{(1+a^2)}} F(k, \theta),$$

ove

$$\theta = \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{a}{b}\right).$$

È dunque esprimibile per un trascendente ellittico incompleto di prima specie l' area della nuova curva sferica.

4. Volendo intraprendere una somigliante ricerca per la misura dell' area compresa fra le due superficie concentriche

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad (x^2 + y^2)^2 = z^2 (a^2 x^2 + b^2 y^2),$$

nel qual caso la base del cono è una curva del quarto ordine, luogo geometrico della projezione ortogonale del centro dell' ellissi sulle sue tangenti, non si avranno che a ripetere tutte le precedenti operazioni col solo cangiamento di b^2 in $-b^2$, ed i limiti dell' angolo u saranno $u = 0$, $u = \frac{\pi}{2}$, onde la richiesta superficie sarà data immediatamente da

$$S = 4\left[\int_0^{\frac{1}{2}\pi} du - \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{du}{\sqrt{[1 + b^2 + (a^2 - b^2)\cos^2 u]}}\right].$$

Qui pure facendo pel modulo $k < 1$, $k^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + 1}$ si ha definitivamente

$$S = 4\left(\frac{\pi}{2} - \frac{F(k)}{\sqrt{(1+a^2)}}\right),$$

ove per la funzione ellittica completa abbiamo

$$F(k) = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{du}{\sqrt{(1 - k^2 \operatorname{sen}^2 u)}}.$$

Quando fosse $a=b$, il cono di quarto ordine si riduce ad un cono retto circolare, ed il valore di S sarà quello di una calotta sferica: infatti per $a=b$, $k=0$ e $F(k)=\frac{\pi}{2}$, quindi

$$S=2\pi\left(1-\frac{1}{\sqrt{(1+a^2)}}\right).$$

Il valore del coefficiente di 2π esprimendo l' altezza della calotta sferica, il valore di S è quello che si ha dalla Geometria elementare. Il metodo esposto nei due precedenti esempi, e che seguiremo anche pei nuovi è quello adoperato dal Sig. *Catalan* nella ricerca dell' area dell' ellissi sferica, e che trovasi nel Tomo 6°. del Giornale del Sig. Liouville per l'anno 1841.

5. Sia la curva di equazione

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}}=1$$

la quale priva dei radicali ascenderà al sesto ordine: questa curva è somigliante nella sua figura all' evoluta dell' ellissi, e ad essa si riduce quando fra le costanti a, b passa una certa relazione: se poi fosse $a=b$, allora la curva viene generata dal movimento di una retta fissa a che striscia sopra due rette perpendicolari, ed ammette proprietà eleganti. Ciò posto per ottenere l' equazione di un cono di altezza c coll' origine alla sommità, e per direttrice del moto l'indicata curva del sesto ordine, si avrà per un' osservazione di già emessa nell' introduzione

$$\left(\frac{cx}{az}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{cy}{bz}\right)^{\frac{2}{3}}=1.$$

Togliendo i radicali, si trova egualmente che la superficie conica è del sesto ordine: intersechiamola con una sfera concentrica

$$x^2+y^2+z^2=1$$

è chiaro che verrà delineata nella superficie sferica una curva a doppia curvatura, della quale la figura è somigliante all'evoluta dell' ellissi: eliminiamo la z, otterremo l' equazione

$$\left(\frac{cx}{a\sqrt{(1-x^2-y^2)}}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{cy}{b\sqrt{(1-x^2-y^2)}}\right)^{\frac{2}{3}}=1$$

la quale appartiene alla projezione della curva sferica nel piano delle xy: quì pure togliendo le irrazionalità l' equazione è di sesto grado, e non essendovi omogeneità nelle variabili x, y ne segue che fatta la sostituzione polare, il raggio r si trova determinato da un'equazione di sesto grado a tutte potenze pari, il che sarebbe assai complicato per le applicazioni che ci siamo prefissi: per trarre adunque un partito utile osserviamo che ponendo $x^2+y^2=r^2$ la precedente ultima equazione trovasi verificata dalla sostituzione trigonometrica

$$\frac{cx}{a\sqrt{(1-r^2)}}=\cos^3 u, \qquad \frac{cy}{b\sqrt{(1-r^2)}}=\operatorname{sen}^3 u,$$

d' onde

$$c^2 x^2=a^2(1-r^2)\cos^6 u, \quad c^2 y^2=b^2(1-r^2)\operatorname{sen}^6 u.$$

Sommando si trova

$$r^2=\frac{a^2\cos^6 u+b^2\operatorname{sen}^6 u}{c^2+a^2\cos^6 u+b^2\operatorname{sen}^6 u}.$$

Di quì pe' valori di x^2, y^2 abbiamo

$$x^2=\frac{a^2\cos^6 u}{c^2+a^2\cos^6 u+b^2\operatorname{sen}^6 u}$$

$$y^2=\frac{b^2\operatorname{sen}^6 u}{c^2+a^2\cos^6 u+b^2\operatorname{sen}^6 u}.$$

In questa guisa i valori di x^2, y^2, r^2 saranno funzioni razionali di $\operatorname{sen}^2 u$, $\cos^2 u$: aggiungiamo anche il valore di $z^2=1-x^2-y^2$, che sarà

$$z^2=\frac{c^2}{c^2+a^2\cos^6 u+b^2\operatorname{sen}^6 u}.$$

Se come si è praticato di sopra si voglia calcolare l'area compresa fra l' indicata superficie conica colla sfera concentrica, avremo ad eseguire primieramente una trasformazione di variabili nell' integrale duplicato. Prendiamo pertanto una variabile ausiliare ρ entro i limiti $\rho=0$, $\rho=1$, allora per verificare l' equazione della projezione della curva sferica nel piano delle xy, e con fare per brevità

$$R^2=c^2+a^2\cos^6 u+b^2\operatorname{sen}^6 u, \quad R_1^2=a^2\cos^6 u+b^2\operatorname{sen}^6 u$$

potremo supporre

$$x = \frac{a\rho\cos^3 u}{R}, \qquad y = \frac{b\rho\,\mathrm{sen}^3 u}{R},$$

quindi

$$z^2 = 1 - \frac{R_i^2\rho^2}{R^2}.$$

Sieno x', y' le derivate relative a ρ, ed x_i, y_i le derivate relative ad u, avremo

$$x' = \frac{a\cos^3 u}{R}, \qquad y' = \frac{b\,\mathrm{sen}^3 u}{R}$$

$$x_i = -\frac{3a\rho\,\mathrm{sen}\,u\cos^2 u\,(c^2 + b^2\,\mathrm{sen}^4 u)}{R^3}$$

$$y_i = \frac{3b\rho\cos u\,\mathrm{sen}^2 u\,(c^2 + a^2\cos^4 u)}{R^3},$$

d' onde si trae

$$x'y_i - x_iy' = \frac{3ab\rho\,\mathrm{sen}^2 u\cos^2 u}{R^2}$$

e siccome per le nuove variabili ρ, u

$$dx\,dy = (x'y_i - x_iy')\,d\rho\,du$$

così pel noto integrale dell' area sferica, ricaviamo

$$S = 3ab\iint\frac{\rho\,d\rho\,du\,\mathrm{sen}^2 u\cos^2 u}{R^2\sqrt{\left(1 - \frac{R_i^2}{R^2}\rho^2\right)}}.$$

Esteso questo integrale all' intera area della curva sferica, abbiamo

$$S = 12ab\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\int_0^1\frac{\rho\,d\rho\,du\,\mathrm{sen}^2 u\cos^2 u}{R^2\sqrt{\left(1 - \frac{R_i^2}{R^2}\rho^2\right)}}.$$

Integrando relativamente a ρ come si è fatto nel parag. 3. otteniamo dopo la sostituzione

$$S = 12ab\left[\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\mathrm{sen}^2 u\cos^2 u\,du}{R_i^2} - \int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{c\,.\,\mathrm{sen}^2 u\cos^2 u\,du}{R_i^2 R}\right].$$

Il primo di questi integrali per mezzo di una ripetuta decomposizione della frazione razionale si può ottenere in quantità algebriche, il che però tralasciamo di fare, perchè ci porterebbe troppo a lungo; ed il secondo appartiene alla classe dei trascendenti ultraellittici: tuttavia nel caso di $a=b$ è riducibile ai trascendenti ellittici completi di prima e terza specie, come si vedrà da quanto siamo ad esporre.

6. I valori di R^2, $R_{\prime}^2$ per $a=b$ divengono

$$R^2 = c^2 + a^2 (1 - 3 \operatorname{sen}^2 u \cos^2 u), \quad R_{\prime}^2 = a^2 (1 - 3 \operatorname{sen}^2 u \cos^2 u).$$

Poniamo $u = 2\phi$, per ciò

$$R^2 = \frac{4(c^2 + a^2) - 3a^2 \operatorname{sen}^2 \phi}{4}, \quad R_{\prime}^2 = \frac{a^2}{4} (4 - 3 \operatorname{sen}^2 \phi)$$

ed integriamo entro i medesimi limiti purchè si duplichi l'integrale, sarà

$$S = 24 \left[\frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\operatorname{sen}^2 \phi \, d\phi}{(4 - 3 \operatorname{sen}^2 \phi)} - c \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\operatorname{sen}^2 \phi \, d\phi}{(4 - 3 \operatorname{sen}^2 \phi) \sqrt{[4(c^2 + a^2) - 3a^2 \operatorname{sen}^2 \phi]}} \right].$$

Il primo integrale è algebrico, ed il secondo contiene i trascendenti ellittici completi di prima e terza specie. Dalla decomposizione delle frazioni risulta come per la divisione

$$\frac{\operatorname{sen}^2 \phi}{4 - 3 \operatorname{sen}^2 \phi} = \frac{4}{3(4 - 3 \operatorname{sen}^2 \phi)} - \frac{1}{3},$$

quindi avvertendo che

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\phi}{(4 - 3 \operatorname{sen}^2 \phi)} = \frac{\pi}{4},$$

si avrà col togliere il fattore comune 3

$$S = 8 \left[\frac{\pi}{4} + \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{c \, d\phi}{\sqrt{[4(c^2 + a^2) - 3a^2 \operatorname{sen}^2 \phi]}} - 4 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{c \, d\phi}{(4 - 3 \operatorname{sen}^2 \phi) \sqrt{[4(c^2 + a^2) - 3a^2 \operatorname{sen}^2 \phi]}} \right].$$

Pongasi

$$n = -\frac{3}{4}, \quad k^2 = -\frac{3a^2}{4(c^2 + a^2)}, \quad \Delta = \sqrt{(1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \phi)}$$

si ricaverà

$$S = 4 \left[\frac{\pi}{2} + \frac{c}{\sqrt{(c^2 + a^2)}} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\phi}{\Delta} - \frac{c}{\sqrt{(c^2 + a^2)}} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\phi}{(1 + n \operatorname{sen}^2 \phi) \Delta} \right].$$

È dunque esprimibile l' area sferica di cui si tratta in trascendenti ellittici completi di prima e terza specie, e sarà secondo le notazioni di Legendre

$$S = 4\left[\frac{\pi}{2} + \frac{c\,F(k) - c\,\Pi(n, k)}{\sqrt{(c^2 + a^2)}}\right].$$

Il parametro n negativo trovasi compreso fra la quantità, $-k^2$, e, -1, per ciò chiamando k' il complemento del modulo, e θ un' angolo ausiliare si potrà fare con Legendre

$$n = -1 + k'^2 \operatorname{sen}^2\theta.$$

Nel caso in cui siamo $n = -\frac{3}{4}$, $k'^2 = \frac{4c^2 + a^2}{4(c^2 + a^2)}$, e per ciò

$$\operatorname{sen}^2\theta = \frac{c^2 + a^2}{(4c^2 + a^2)}.$$

Ciò posto ritenendo che $F(k, \theta)$, $E(k, \theta)$ rappresentino i due trascendenti ellittici di prima e seconda specie di modulo k, e di ampiezza θ, per una formola data da Legendre si ha la riduzione dei trascendenti ellittici completi di terza specie in quei incompleti di prima e seconda, sicchè facendo

$$\Phi(\theta) = F(k)\,E(k', \theta) + F(k', \theta)\,E(k) - F(k)\,F(k', \theta)$$
$$\Delta(k, \theta) = \sqrt{(1 - k^2 \operatorname{sen}^2\theta)}$$

avremo (1)

$$\frac{k'^2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta}{\Delta(k', \theta)}\Big(\Pi(n, k) - F(k)\Big) = \frac{\pi}{2} - \Phi(\theta).$$

Nel problema che abbiamo risoluto

$$\cos\theta = \frac{c\sqrt{3}}{\sqrt{(4c^2 + a^2)}},\quad \operatorname{sen}\theta = \frac{\sqrt{(c^2 + a^2)}}{\sqrt{(4c^2 + a^2)}},\quad \Delta(k', \theta) = \sqrt{(1 - k'^2 \operatorname{sen}^2\theta)} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Di quì

$$\frac{F(k) - \Pi(n, k)}{\sqrt{(c^2 + a^2)}} = \frac{2\Phi(\theta)}{c} - \frac{\pi}{c},$$

d' onde

$$S = 4\left(2\Phi(\theta) - \frac{\pi}{2}\right).$$

(1) Fonctions elliptiques; Tom. 3°, pag. 144.

Ognun vede che l'area della curva sferica dipende in questo modo dai trascendenti ellittici incompleti di prima e seconda specie.

7. L' esposta applicazione ne somministra un' altra, che è ben di conoscere. Riprendiamo la curva di equazione

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = 1,$$

la quale potrà rappresentare l'evoluta dell'ellissi quando alle costanti a, b si sostituiscano le nuove costanti

$$\frac{a^2-b^2}{a}, \quad \frac{a^2-b^2}{b},$$

e cerchiamo nella generalità l' equazione della curva, luogo geometrico delle perpendicolari abbassate dal centro di questa curva sulle sue tangenti, sarà facile il vedere che la nuova curva è composta di quattro ovali eguali e simili, che si riuniscono nel centro, e somiglianti nelle loro figure a quella della *lemniscata*. Quando poi si voglia che l' equazione precedente rappresenti l' evoluta dell' ellissi, allora è chiaro che le tangenti all' evolute sono normali all' ellissi, e perciò la curva luogo dei piedi del centro dell' evoluta dell' ellissi sulle sue tangenti dovrà coincidere con la curva luogo geometrico della projezione ortogonale del centro dell' ellissi sulle sue normali. Differenziando perciò la precedente equazione, abbiamo

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{-\frac{1}{3}} \frac{dx}{a} + \left(\frac{y}{b}\right)^{-\frac{1}{3}} \frac{dy}{b} = 0,$$

quindi l' equazioni della tangente e della normale abbassata dal centro saranno

$$\frac{X}{a\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{3}}} + \frac{Y}{b\left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{1}{3}}} = 1 \qquad bY\left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{1}{3}} - aX\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{3}} = 0.$$

L' eliminazione delle x, y porgerà la richiesta equazione fra le X, Y della nuova curva.

Osserviamo che l' equazione fra le x, y è verificata dalla sostituzione

$$x = a\cos^3 u, \qquad y = b\,\text{sen}^3 u,$$

d'onde l'equazioni della tangente e della normale divengono

$$b\,\text{X}\,\text{sen}\,u + a\,\text{Y}\cos u = a\,b\,\text{sen}\,u\cos u. \qquad \text{tang}\,u = \frac{a}{b}\cdot\frac{\text{X}}{\text{Y}}.$$

Dalla seconda si trae

$$\text{sen}\,u = \frac{a\,\text{X}}{\sqrt{(a^2\text{X}^2 + b^2\text{Y}^2)}}, \qquad \cos u = \frac{b\,\text{Y}}{\sqrt{(a^2\text{X}^2 + b^2\text{Y}^2)}}.$$

Infine per la sostituzione nella prima, otteniamo

$$(\text{X}^2 + \text{Y}^2)^2(a^2\text{X}^2 + b^2\text{Y}^2) = a^2 b^2 \text{X}^2\text{Y}^2.$$

La richiesta curva è di sesto ordine come la primitiva. Mutiamo per semplicità le lettere X, Y in x, y, sarà

$$(x^2 + y^2)^2(a^2x^2 + b^2y^2) = a^2b^2x^2y^2.$$

Nell' ipotesi di $a = b$ quest' equazione si ridurrà ad

$$(x^2 + y^2)^3 = a^2x^2y^2.$$

In ambedue i casi il centro è un punto quadruplo, e cercando l' espressione dell' arco per $a = b$ trovasi esso rappresentato da un trascendente ellittico di prima specie nel quale l' angolo del modulo è di 60°. Che se la primitiva curva fosse l' evoluta dell' ellissi, allora la curva derivata avrà evidentemente per equazione

$$(x^2 + y^2)^2(a^2y^2 + b^2x^2) = (a^2 - b^2)^2x^2y^2$$

e coinciderà con la projezione ortogonale del centro dell' ellissi sulle sue normali.

8. Per semplificare alquanto le operazioni algebraiche, si sostituisca a, b invece di a^2, b^2, si riprenda l'equazione generale

$$(x^2 + y^2)^2(a\,x^2 + b\,y^2) = a\,b\,x^2y^2$$

e si costruisca sopra questa curva un cono di altezza $\sqrt{c}$, con l' origine alla sua sommità, e coll' asse delle z nella direzione di $\sqrt{c}$. avremo per l' equazione di questo cono

$$c(x^2 + y^2)^2(a\,x^2 + b\,y^2) = a\,b\,x^2y^2z^2.$$

Intersecando ora la superficie conica con una sfera concentrica

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

verrà delineata nella superficie sferica una curva a doppia curvatura somigliante nella sua figura alla base del cono. L' eliminazione della z porge l' equazione della projezione della curva sferica nel piano delle xy, e sarà

$$c(x^2 + y^2)^2(ax^2 + by^2) + ab(x^2 + y^2)x^2y^2 = abx^2y^2,$$

la quale appartiene al sesto ordine, ed è anche essa composta di quattro ovali, che si riuniscono nel suo centro. Facendo la sostituzione

$$x = r\cos u, \qquad y = r\,\mathrm{sen}\,u$$

si trova per l' equazione polare

$$r^2 = \frac{ab\,\mathrm{sen}^2 u\cos^2 u}{bc + (ab + ac - bc)\cos^2 u - ab\cos^4 u}.$$

Di quì ponendo

$$R^2 = bc + (ab + ac - bc)\cos^2 u - ab\cos^4 u$$

si trae per i valori di x^2, y^2, z^2

$$x^2 = \frac{ab\,\mathrm{sen}^2 u\cos^4 u}{R^2}, \quad y^2 = \frac{ab\cos^2 u\,\mathrm{sen}^4 u}{R^2}, \quad z^2 = \frac{c(a\cos^2 u + b\,\mathrm{sen}^2 u)}{R^2}.$$

Tutte le precedenti espressioni prendono un' aspetto più semplice per $a = b$, in modo che l' equazione del cono e della projezione dell' area sferica nel piano delle xy, saranno

$$c(x^2 + y^2)^3 = ax^2y^2z^2, \quad (x^2 + y^2)[c(x^2 + y^2)^2 + ax^2y^2] = ax^2y^2.$$

In fine per i valori di x^2, y^2, z^2, si ha

$$x^2 = \frac{a\,\mathrm{sen}^2 u\cos^4 u}{c + a\,\mathrm{sen}^2 u\cos^2 u}, \quad y^2 = \frac{a\cos^2 u\,\mathrm{sen}^4 u}{c + a\,\mathrm{sen}^2 u\cos^2 u}, \quad z^2 = \frac{c}{c + a\,\mathrm{sen}^2 u\cos^2 u}.$$

I limiti dell'angolo u in ambedue i casi saranno per l' ottava parte dell' estensione $u = 0$, $u = 45°$.

9. Nel caso generale di a diverso da b volendo cercare la quadratura dell'area sferica, intersezione del cono, e della

sfera concentrica, converrà trasformare l' integrale duplicato riportato nel parag. 1. in altre variabili. A questo oggetto scelta una grandezza ρ entro i limiti $\rho = 0$, $\rho = 1$, prenderemo per x, y le espressioni

$$x = \frac{\sqrt{ab} \,.\, \rho \operatorname{sen} u \cos^2 u}{R}, \qquad y = \frac{\sqrt{ab} \,.\, \rho \cos u \operatorname{sen}^2 u}{R},$$

d' onde per la $z^2 = 1 - x^2 - y^2$, si deduce

$$z^2 = 1 - \rho^2 \frac{ab \operatorname{sen}^2 u \cos^2 u}{R^2}.$$

Sieno sempre x', y' le derivate relative a ρ, ed $x_{,}$, $y_{,}$ le relative ad u, e pongasi in queste ultime per un istante $\cos u = U$, sarà

$$x' = \frac{\sqrt{ab} \,.\, \operatorname{sen} u \cos^2 u}{R}, \qquad y' = \frac{\sqrt{ab} \,.\, \cos u \operatorname{sen}^2 u}{R}$$

$$x_{,} = \sqrt{ab} \,.\, \rho \cos u \left[\frac{-2bc + (4bc - ab - ac) U^2 + 2(ab + ac - bc) U^4 - ab U^6}{R^3} \right]$$

$$y_{,} = \sqrt{ab} \,.\, \rho \operatorname{sen} u \left[\frac{-bc + 3bc U^2 + (ab + 2ac - 2bc) U^4 - ab U^6}{R^3} \right].$$

Formando con queste derivate le differenze dei prodotti $x' y_{,}$, $x_{,} y'$, il numeratore conterrà il valore di R^2, perciò

$$x' y_{,} - x_{,} y' = \frac{ab \rho \operatorname{sen}^2 u \cos^2 u}{R^2},$$

d' onde

$$dx\, dy = \frac{ab \rho \operatorname{sen}^2 u \cos^2 u \, d\rho \, du}{R^2}.$$

Avvertendo dunque al valore di z, ed il tutto sostituito nell' integrale della superficie sferica, ed integrando entro i limiti $\rho = 0$, $\rho = 1$, $u = 0$, $u = 45^\circ$, si avrà per l' area sferica della nostra curva

$$S = 8ab \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^1 \frac{\rho \, d\rho \, du \operatorname{sen}^2 u \cos^2 u}{R^2 \sqrt{\left(1 - \frac{ab \operatorname{sen}^2 u \cos^2 u}{R^2} \,.\, \rho^2\right)}}.$$

Dalla integrazione relativa a ρ deduciamo

$$\int_0^1 \frac{\rho\, d\rho}{\sqrt{\left(1 - \frac{\rho^2 ab \operatorname{sen}^2 u \cos^2 u}{R^2}\right)}} = \frac{R^2}{ab \operatorname{sen}^2 u \cos^2 u} - \frac{R\sqrt{(R^2 - ab \operatorname{sen}^2 u \cos^2 u)}}{ab \operatorname{sen}^2 u \cos^2 u}.$$

Sostituendo si troverà

$$S = 8\left[\frac{\pi}{4} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{du\sqrt{[bc + c(a-b)\cos^2 u]}}{\sqrt{[bc + (ab + ac - bc)\cos^2 u - ab\cos^4 u]}}\right].$$

Nell' ipotesi di $a = b$, si ha

$$S = 8\left[\frac{\pi}{4} - \sqrt{c}\,.\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{du}{\sqrt{(c + a\cos^2 u - a\cos^4 u)}}\right],$$

ed allora l' integrale del secondo membro riducesi ad un trascendente ellittico completo di prima specie. Infatti ponendo $2u = \frac{\pi}{2} - \varphi$, perciò ai limiti $u = 0$, $u = \frac{\pi}{4}$, corrispondono $\varphi = \frac{\pi}{2}$, $\varphi = 0$; rovesciando quindi i limiti col cangiamento di segno, e facendo

$$k^2 = \frac{a}{4c + a}$$

si otterrà

$$S = 8\left[\frac{\pi}{4} - \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{(4c + a)}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{(1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi)}}\right],$$

ossia

$$S = 8\left[\frac{\pi}{4} - \frac{\sqrt{c}\,.\,F(k)}{\sqrt{(4c + a)}}\right].$$

Sostituendo nuovamente c^2, a^2 invece di c, a il valore di S diviene

$$S = 8\left[\frac{\pi}{4} - \frac{c\,F(k)}{\sqrt{(4c^2 + a^2)}}\right]$$

ed il modulo, $k^2 = \frac{a^2}{4c^2 + a^2}$.

10. Un' altra applicazione la desumeremo da una curva piana, che può derivarsi nel seguente modo. Quando si cerchi la natura della linea alla quale sieno tangenti le rette perpendicolari all' estremità di tutti i diametri di un ellissi data

si giunge a riconoscere che la linea in questione è algebrica, e di sesto ordine. In una nota pubblicata nella Raccolta scientifica di Roma nel Marzo 1846, mostrai che se $x = a \cos\varphi$, $y = b \operatorname{sen}\varphi$ sieno l' equazioni di un ellissi, le coordinate x, y della nuova curva, sono

$$x = \frac{\cos\varphi}{a}\left[a^2 + (a^2 - b^2)\operatorname{sen}^2\varphi\right]$$

$$y = \frac{\operatorname{sen}\varphi}{b}\left[b^2 - (a^2 - b^2)\cos^2\varphi\right],$$

quindi come può vedersi nell' indicata nota, facendo l' eliminazione dell'angolo φ trovai un'equazione di sesto grado colle potenze pari tutte delle x, y, e con un termine indipendente. Questa curva è chiamata comunemente la curva di *Talbot*. Essa è dotata di un centro, di forma ovale, e passa pe' quattro vertici dell' ellissi. Per costruire sopra di una essa un cono di altezza c basterà sostituire $\frac{cx}{z}$, $\frac{cy}{z}$ invece di x, y, perciò l'equazione della superficie conica fra le coordinate x, y, z sarà la risultante ottenuta dall'eliminazione dell'angolo φ fra le due equazioni

$$\frac{cx}{z} = \frac{\cos\varphi}{a}\left[a^2 + (a^2 - b^2)\operatorname{sen}^2\varphi\right]$$

$$\frac{cy}{z} = \frac{\operatorname{sen}\varphi}{b}\left[b^2 - (a^2 - b^2)\cos^2\varphi\right].$$

Intersecando poi la superficie conica con una sfera concentrica

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1,$$

verrà delineata nella superficie sferica una linea, che nella sua figura somiglia alla detta curva di *Talbot*.

Infine l' eliminazione della z porgerà la curva di projezione nel piano xy, ed anche essa di sesto ordine; ma senza eseguire tutte queste operazioni noi ci serviremo delle precedenti formole coll'angolo ausiliare φ, le quali si adoperano più facilmente nel problema della quadratura sferica.

11. Mutiamo le costanti a^2, b^2, c^2 in a, b, c, eleviamo al quadrato, e sostituiamo $r^2 = x^2 + y^2$, $z^2 = 1 - r^2$, si avrà

$$\frac{cx^2}{1-r^2} = \frac{\cos^2\phi}{a}[a+(a-b)\,\text{sen}^2\phi]^2$$

$$\frac{cy^2}{1-r^2} = \frac{\text{sen}^2\phi}{b}[b-(a-b)\cos^2\phi]^2.$$

Sommando queste due equazioni, e riducendo tutto alle potenze di $\cos\phi$, e ponendo

$A = b(a-b)(2a-b)$, $B=(a-b)^2(a-2b)$, $C=-(a-b)^3$, $\cos\phi = u$ otteniamo

$$\frac{abcr^2}{1-r^2} = ab^2 + Au^2 + Bu^4 + Cu^6,$$

d' onde prendendo

$$R^2 = ab(c+b) + Au^2 + Bu^4 + Cu^6$$

si troverà

$$r^2 = \frac{ab^2 + Au^2 + Bu^4 + Cu^6}{R^2}.$$

Questo è il valore del quadrato del raggio vettore r condotto dal centro della curva di projezione ad un suo punto qualunque corrispondente al punto (x, y, z) della curva sferica. Una cosa importante da osservarsi è, che le due quantità componenti il valore di r^2 rimangono invariabili, se si muti a in b, b in a, $\cos\phi$ in $\text{sen}\,\phi$, che anzi il numeratore è decomponibile in tre fattori, due dei quali sono ripetuti. Rappresentiamo con R_i^2 il numeratore di r^2, e sostituiamo nuovamente i valori di A, B, C, e poniamo inoltre $(a-b)u^2 = \omega$, si avrà

$$R_i^2 = -[\omega^3 - (a-2b)\omega^2 - b(2a-b)\omega - ab^2].$$

Ora l' equazione $R_i^2 = 0$ si verifica non solo per $\omega = a$, ma ben anche per altre due radici eguali e negative $\omega = -b$, per ciò

$$R_i^2 = -(\omega - a)(\omega + b)^2,$$

ovvero per la sostituzione di ω e di u, sarà

$$R_i^2 = [a-(a-b)\cos^2\phi][b+(a-b)\cos^2\phi]^2.$$

Il valore di R_i^2 rimane evidentemente invariabile col cangiare a in b, b in a, $\cos\phi$ in $\text{sen}\,\phi$. Di più fra le due quantità R^2, R_i^2 sussiste la relazione

$$R^2 = abc + R_i^2$$

e rimarrà per conseguenza anche invariabile R_i^2 sotto il prefisso cangiamento: giova tuttavia di ottenere anche l' espressione di R^2 per le potenze ascendenti di sen φ.

Sia $\operatorname{sen}\varphi = v$, avremo identicamente

$$R^2 = ab(c+b) + A(1-v^2) + B(1-v^2)^2 + C(1-v^2)^3.$$

Sviluppando il secondo membro, e fatto per brevità

$$A_i = a(b-a)(2b-a),\ B_i = (b-a)^2(b-2a),\ C = -(b-a)^3$$

si ha

$$R^2 = ab(c+a) + A_i v^2 + B_i v^4 + C_i v^6.$$

Le nuove costanti A_i, B_i, C_i si deducono dalle precedenti A, B, C col solo cangiamento di a in b e di b in a. Ciò premesso otteniamo

$$1 - r^2 = z^2 = \frac{abc}{R^2}$$

come dalle prime equazioni di questo parag.

$$x^2 = \frac{b\cos^2\varphi\,[2a-b-(a-b)\cos^2\varphi]^2}{R^2}$$

$$y^2 = \frac{a\operatorname{sen}^2\varphi\,[b-(a-b)\cos^2\varphi]^2}{R^2}.$$

Questi sono quei valori che convenientemente modificati ci occorreranno nella ricerca dell' area sferica in questione.

12. Come già si è fatto nelle precedenti applicazioni trasformiamo l' integrale definito

$$S = \iint \frac{dx\,dy}{\sqrt{(1-x^2-y^2)}}$$

in altre variabili. Prendendo sempre un raggio ρ entro i limiti $\rho=0$, $\rho=1$, i valori di x, y nel problema del quale ora ci occupiamo, saranno

$$x = \sqrt{b}\cdot\frac{\rho\cos\varphi\,[2a-b-(a-b)\cos^2\varphi]}{R}$$

$$y = \sqrt{a}\cdot\frac{\rho\operatorname{sen}\varphi\,[b-(a-b)\cos^2\varphi]}{R},$$

dai quali in forza del valore di R_i^2, si ha

$$z^2 = 1 - x^2 - y^2 = 1 - \rho^2 \frac{R_i^2}{R^2}.$$

Le derivate parziali x', y' relative a ρ si riducono evidentemente ai coefficienti di $\sqrt{b}$, $\sqrt{a}$, e sono

$$x' = \sqrt{b} \cdot \frac{\cos\phi\,[2a - b - (a-b)\cos^2\phi]}{R}$$

$$y' = \sqrt{a} \cdot \frac{\operatorname{sen}\phi\,[b - (a-b)\cos^2\phi]}{R}.$$

Per le derivate x_i, y_i relative all' angolo ϕ prendiamo per ora il valore della x, ed eleviamo al quadrato, si avrà col moltiplicare per R^2

$$R^2 x^2 = b\rho^2 \cos^2\phi\,[2a - b - (a-b)\cos^2\phi]^2.$$

Differenziamo relativamente a ϕ, e trasportiamo nel secondo membro i termini provenienti dalla differenziazione di R^2, e poniamo

$$L = 2a - b - (a-b)\cos^2\phi, \quad M = 3(a-b)\cos^2\phi - (2a-b)$$

$$N = A + 2B\cos^2\phi + 3C\cos^4\phi$$

avremo

$$R^2 x\,dx = \operatorname{sen}\phi\cos\phi\,d\phi\,[b\rho^2.L.M + N x^2]$$

e sostituendoci nuovamente il valore di x^2, si ha

$$R^2 x\,dx = \frac{b\rho^2 \operatorname{sen}\phi\cos\phi\,d\phi\,L.[M R^2 + L N\cos^2\phi]}{R^2} \quad \ldots\ldots (m)$$

Si eseguiscano nel secondo membro le moltiplicazioni e riduzioni col sostituire nuovamente i valori di A, B, C, L, M, N, e pongasi

$$\alpha = -ab(c+b)(2a-b), \quad \beta = 3ab(c+b)(a-b)$$

$$\gamma = a(a-b)^2(2a-b), \quad \delta = -3a(a-b)^3,$$

otterremo

$$x_i = \sqrt{b}\,\frac{\rho\operatorname{sen}\phi\,(\alpha + \beta\cos^2\phi + \gamma\cos^4\phi + \delta\operatorname{sen}^6\phi)}{R^3}.$$

Per la derivata $y_{,}$ basterà mutare a in b, e b in a, sen φ, cos φ in cos φ, sen φ, e $d\varphi$ in $-d\varphi$, e siccome il valore di R rimane invariabile da questo cangiamento ne segue, che posto

$$\alpha' = -ab(c+a)(2b-a), \quad \beta' = 3ab(c+a)(b-a)$$

$$\gamma' = b(b-a)^2(2b-a), \quad \delta' = -3b(b-a)^3,$$

si avrà

$$y_{,} = -\sqrt{a}\,\frac{\rho\cos\varphi\,(\alpha' + \beta'\,\mathrm{sen}^2\varphi + \gamma'\,\mathrm{sen}^4\varphi + \delta'\,\mathrm{sen}^6\varphi)}{\mathrm{R}^3}.$$

Non sono queste le forme più comode delle derivate per ultimare semplicemente la risoluzione del problema. Partiamo piuttosto dalla formola (m) e troviamone una somigliante pel differenziale della y. A questo oggetto si osservi che il valore di M rimane invariabile alla mutazione di a, b, cos φ in b, a, sen φ, onde richiamando il significato di $\mathrm{A}_{,}$, $\mathrm{B}_{,}$, $\mathrm{C}_{,}$ nel parag. 11., e ponendo

$$\mathrm{L}_{,} = 2b - a - (b-a)\,\mathrm{sen}^2\varphi, \quad \mathrm{N}_{,} = \mathrm{A}_{,} + 2\,\mathrm{B}_{,}\,\mathrm{sen}^2\varphi + 3\,\mathrm{C}_{,}\,\mathrm{sen}^4\varphi,$$

si avrà

$$\mathrm{R}^2 y\,dy = \frac{a\rho^2\,\mathrm{sen}\,\varphi\cos\varphi\,d\varphi\,\mathrm{L}_{,}\,[\mathrm{M}\,\mathrm{R}^2 + \mathrm{L}_{,}\mathrm{N}_{,}\,\mathrm{sen}^2\varphi]}{\mathrm{R}^2} \quad \ldots\ldots \quad (n)$$

In fine tanto da questa formola quanto dalla (m) otteniamo per la sostituzione dei primitivi valori di x, y le derivate

$$x_{,} = \sqrt{b}\,\frac{\rho\,\mathrm{sen}\,\varphi\,[\mathrm{M}\,\mathrm{R}^2 + \mathrm{L}\,\mathrm{N}\cos^2\varphi]}{\mathrm{R}^3}$$

$$y_{,} = -\sqrt{a}\,\frac{\rho\cos\varphi\,[\mathrm{M}\,\mathrm{R}^2 + \mathrm{L}_{,}\mathrm{N}_{,}\,\mathrm{sen}^2\varphi]}{\mathrm{R}^3}.$$

Queste saranno le espressioni delle derivate, che si adattano più speditamente alle operazioni analitiche. Componiamo infatti i prodotti $x' y_{,}$, $x_{,} y'$, e pongasi per un' istante

$$\mathrm{P} = b + (a-b)\cos^2\varphi$$

e si ritenga $u = \cos\varphi$, $v = \mathrm{sen}\,\varphi$, otterremo

$$x' y_{,} - x_{,} y' = -\sqrt{ab}\,\frac{\rho\,[\mathrm{M}\,\mathrm{R}^2\mathrm{P} + \mathrm{L}\,\mathrm{L}_{,}(\mathrm{N}+\mathrm{N}_{,})\,u^2 v^2]}{\mathrm{R}^4}.$$

Si riprendano i valori di N, $N_{,}$ ed ordiniamo relativamente alle potenze di $u = \cos\varphi$, avremo

$$N + N_{,} = A + A_{,} + 2B_{,} + 3C_{,} + 2(B - B_{,} - 3C_{,})u^2 + 3(C + C_{,})u^4,$$

ove sostituendo i valori di A, B.... tutti i termini si annullano; perciò si ottiene definitivamente

$$x'y_{,} - x_{,}y' = \sqrt{ab}\,\frac{\rho[b + (a-b)u^2][2a - b - 3(a-b)u^2]}{R^2}.$$

Questa è la forma più semplice che possa ottenersi pel valore del primo membro. Siccome poi nell'integrale esprimente la quadratura sferica all' elemento $dx\,dy$ deve sostituirsi il nuovo elemento differenziale $(x'y_{,} - x_{,}y')\,d\rho\,d\varphi$, così facendo l'intera sostituzione nella formola riportata al principio di questo parag. ed integrando entro i limiti $\rho = 0$, $\rho = 1$, $\varphi = 0$, $\varphi = \frac{1}{2}\pi$, avremo

$$S = 4\sqrt{ab}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\int_0^1 \frac{[b + (a-b)u^2][2a - b - 3(a-b)u^2]\,\rho\,d\rho\,d\varphi}{R^2\sqrt{\left(1 - \rho^2\frac{R_{,}^2}{R^2}\right)}}.$$

Integriamo relativamente a ρ, sarà dopo la sostituzione

$$S = 4\sqrt{ab}\left[\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{[b + (a-b)u^2][2a - b - 3(a-b)u^2]\,d\varphi}{R_{,}^2}\right.$$

$$\left. - \int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\sqrt{abc}\,.\,[b + (a-b)u^2][2a - b - 3(a-b)u^2]\,d\varphi}{R_{,}^2\,R}\right].$$

Da altra parte si è veduto nel parag. 11. che per $R_{,}^2$, si ha

$$R_{,}^2 = [a - (a-b)u^2][b + (a-b)u^2]^2,$$

perciò

$$S = 4\sqrt{ab}\left[\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{[2a - b - 3(a-b)u^2]\,d\varphi}{[a - (a-b)u^2][b + (a-b)u^2]}\right.$$

$$\left. - \sqrt{abc}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{[2a - b - 3(a-b)u^2]\,d\varphi}{[a - (a-b)u^2][b + (a-b)u^2]\,R}\right].$$

Il primo degli integrali si trova in termini algebrici, ma il secondo col richiamare il valore della quantità irrazionale R dipende dai trascendenti ultraellittici. Per giungere infine

alle riduzioni ultime decomponiamo in frazioni semplici il coefficiente razionale di $d\phi$, ed osserviamo che

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\phi}{a-(a-b)\cos^2\phi} = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\phi}{b+(a-b)\cos^2\phi} = \frac{\pi}{2\sqrt{ab}},$$

si otterrà col sostituire nuovamente a^2, b^2, c^2 invece di a, b, c

$$S = 4ab.\left[\frac{\pi}{2ab} - 2\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{abc\,d\phi}{[b^2+(a^2-b^2)\cos^2\phi]\,R} + \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{abc\,d\phi}{[a^2-(a^2-b^2)\cos^2\phi]\,R}\right],$$

ove per la R si ha come dal parag. 11.

$$R^2 = a^2 b^2 c^2 + [a^2 - (a^2 - b^2)\cos^2\phi][b^2 + (a^2 - b^2)\cos^2\phi]^2.$$

La irrazionale R contenendo le potenze seste di $\cos\phi$, i due integrali non sono riducibili ai trascendenti ellittici delle tre note specie.

13. Prendiamo ancora per base di un cono una curva di quarto ordine, derivata dall' ellissi secondo una certa legge, la qual curva vien conosciuta comunemente sotto il nome di *Curva dei parametri*. Un' ellissi di semiassi principali a, b coll' origine al centro ha per equazione

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

ed il parametro $p = \frac{2b^2}{a}$, la distanza c del foco dal centro è $c = \sqrt{(a^2 - b^2)}$, e si trova col sostituire nell' equazione della curva $\frac{1}{2}p$ invece della y. Sieno ora m, n due semiassi dell' ellissi obliqui e conjugati, l' equazione della curva riferita ai nuovi assi sarà sempre della forma

$$\frac{x^2}{m^2} + \frac{y^2}{n^2} = 1,$$

e generalizziamo la definizione del parametro col fare per $m > n$, $p_1 = \frac{2n^2}{m}$, è evidente che ad una ordinata eguale ad $\frac{1}{2}p_1$ corrisponderà un' ascissa $c_1 = \sqrt{(m^2 - n^2)}$. Ciò posto le coordinate $\frac{1}{2}p_1, c_1$ sono variabili per ogni sistema di assi obliqui e diametrali, in modo che segnando tutti i punti nel piano

dell' ellissi per ogni sistema di assi diametrali risulterà una nuova linea, della quale è facile rintracciar l' equazione. Osserviamo primieramente che questa curva passa pe' due fochi dell' ellissi, mentre nei vertici le tre grandezze m, n $c_{,}$ si riducono ad a, b, c. La curva in questione passerà anche pel centro: infatti è noto, che nell' ellissi esiste un sistema di assi obliqui diametrali eguali inclinati fra loro del minimo angolo: in questo sistema si avrà $c_{,}=0$, per ciò il centro sarà un punto della nuova curva. Questo ragionamento potendosi estendere a tutti i quattro rami dell' ellissi, ne viene che la nuova curva sarà composta di quattro rami chiusi eguali e simili, che si riuniscono nel centro, punto doppio della medesima, e la sua figura sarà al tutto somigliante alla *lemniscata*. Per trovare la sua equazione riferiamo l' ellissi e la nuova curva coll' origine al centro agli assi principali della stessa ellissi, e dal centro C conduciamo un raggio vettore m, e prendiamo sulla sua direzione a partir da C una lunghezza $c_{,}=\sqrt{(m^2-n^2)}$, ove n sia il semiasse conjugato ad m. Ciò posto è chiaro che l' estremità del semiasse m appartiene ad un punto dell' ellissi e l' estremità della lunghezza $c_{,}$ ad un punto della nuova curva, perciò il centro e i due punti corrispondenti alle due curve sono in linea retta. Sieno adunque x, y le coordinate di un punto qualunque dell'ellissi, ed X, Y di un punto corrispondente della nuova curva, si avrà facilmente

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \qquad \frac{x}{X}=\frac{y}{Y}, \qquad m^2=x^2+y^2$$

$$X^2+Y^2=m^2-n^2, \qquad a^2+b^2=m^2+n^2.$$

Eliminiamo tra le due ultime il semiasse n, e cangiamo m in r, avremo

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \qquad \frac{x}{X}=\frac{y}{Y}, \qquad r^2=x^2+y^2$$

$$2r^2=X^2+Y^2+a^2+b^2.$$

Dalla seconda deduciamo

$$\frac{x^2}{X^2}=\frac{y^2}{Y^2}=\frac{x^2+y^2}{X^2+Y^2}=\frac{r^2}{X^2+Y^2};$$

d' onde

$$x^2 = \frac{X^2(X^2+Y^2+a^2+b^2)}{2(X^2+Y^2)}$$

$$y^2 = \frac{Y^2(X^2+Y^2+a^2+b^2)}{2(X^2+Y^2)}.$$

Questi valori sostituiti nell' equazione dell' ellissi danno

$$(X^2+Y^2)(a^2Y^2+b^2X^2) = (a^2-b^2)(b^2X^2-a^2Y^2).$$

La nuova curva è del quarto ordine, e la precedente trovasi già esposta dal Capitano di artiglieria Sig. *Jacob* (1). L' analisi della equazione trovata conduce a quelle conseguenze di sopra enunciate. Per l' equazione polare ponendo

$$X = R\cos u, \quad Y = R \operatorname{sen} u$$

si ha

$$R^2 = \frac{(a^2-b^2)(b^2\cos^2 u - a^2 \operatorname{sen}^2 u)}{a^2\operatorname{sen}^2 u + b^2\cos^2 u},$$

la quale si potrebbe anche trovare immediatamente dalla relazione fra i raggi r, R delle due curve, pe' quali si ha

$$2r^2 = R^2 + a^2 + b^2,$$

mentre l' angolo polare u essendo il medesimo sotto due punti corrispondenti delle due curve, si avrà nell' ellissi

$$r^2 = \frac{a^2 b^2}{b^2\cos^2 u + a^2\operatorname{sen}^2 u},$$

d'onde si trae il valore di R^2. È importante poi di osservare che verificando l' equazione dell' ellissi per mezzo delle sostituzioni

$$x = a\cos\theta, \quad y = b\operatorname{sen}\theta, \quad r^2 = a^2\cos^2\theta + b^2\operatorname{sen}^2\theta$$

si ricaverà per la nuova curva, l' equazione

$$R^2 = (a^2-b^2)\cos^2\theta,$$

la quale ha una somiglianza coll' equazione polare della *lemniscata*. Fra gli angoli u, θ sussiste la relazione

(1) Terquem. Annales de Mathé. Vol. 2.°, pag. 138. An. 1843.

$$a \operatorname{tang} u = b \operatorname{tang} \theta.$$

Infine osserviamo, che come si sono ottenuti i valori delle x, y espressi per le X, Y della nuova curva, così potremo ottenere reciprocamente i valori delle X, Y per le x, y. Infatti dalle equazioni simultanee

$$X = R \cos u, \quad Y = R \operatorname{sen} u, \quad x = r \cos u, \quad y = r \operatorname{sen} u$$

$$2 r^2 = R^2 + a^2 + b^2$$

ricaviamo

$$X = \frac{x}{r} \sqrt{(2 r^2 - a^2 - b^2)}, \qquad Y = \frac{y}{r} \sqrt{(2 r^2 - a^2 - b^2)},$$

d' onde

$$X = \frac{x \sqrt{2 (x^2 + y^2) - (a^2 + b^2)}}{\sqrt{(x^2 + y^2)}}$$

$$Y = \frac{y \sqrt{2 (x^2 + y^2) - (a^2 + b^2)}}{\sqrt{(x^2 + y^2)}}.$$

I medesimi valori di X, Y sarebbe assai facile di esprimere per uno degli angoli u, o θ, il che per brevità tralasciamo di eseguire.

14. Sia dunque la curva di quarto ordine

$$(x^2 + y^2)(a^2 y^2 + b^2 x^2) = (a^2 - b^2)(b^2 x^2 - a^2 y^2)$$

e si costruisca sopra di essa un cono di altezza c con l'origine alla sua sommità, avremo per l'equazione della sua superficie

$$c^2 (x^2 + y^2)(a^2 y^2 + b^2 x^2) = (a^2 - b^2)(b^2 x^2 - a^2 y^2) z^2.$$

Intersecando questo cono di quarto ordine con una sfera concentrica

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1,$$

la curva sferica d' intersezione sarà somigliante nella sua figura a quella della base conica. Eliminiamo la z, e per fissare le idee sia $c^2 > a^2 - b^2$, avremo per la projezione della curva sferica nel piano delle $x y$

$$(x^2 + y^2)[b^2 (a^2 - b^2 + c^2) x^2 + a^2 [c^2 - (a^2 - b^2)] y^2] = (a^2 - b^2)(b^2 x^2 - a^2 y^2),$$

ove i coefficienti di x^2, y^2 nel primo membro sono ambedue positivi: la sua equazione polare per la sostituzione di

$$x = r\cos u, \quad y = r\,\text{sen}\, u$$

sarà

$$r^2 = \frac{(a^2 - b^2)(b^2\cos^2 u - a^2\,\text{sen}^2 u)}{b^2(c^2 + a^2 - b^2)\cos^2 u + a^2[c^2 - (a^2 - b^2)]\,\text{sen}^2 u};$$

i limiti dell'angolo u sono per la quarta parte dell'estensione

$$u = 0, \quad u = \text{arc tang}\left(\frac{b}{a}\right),$$

ove si ha $\qquad r^2 = \dfrac{a^2 - b^2}{c^2 + a^2 - b^2}, \quad r = 0.$

Di quì pe' valori di x, y, z col porre per brevità

$$R^2 = b^2(c^2 + a^2 - b^2)\cos^2 u + a^2[c^2 - (a^2 - b^2)]\,\text{sen}^2 u$$

$$R_{,}^2 = b^2\cos^2 u - a^2\,\text{sen}^2 u$$

si avrà

$$x = \frac{\sqrt{(a^2 - b^2)}\,.\,R_{,}\cos u}{R}, \quad y = \frac{\sqrt{(a^2 - b^2)}\,.\,R_{,}\,\text{sen}\, u}{R}, \quad z = \frac{cR_{,}}{R}.$$

Questi valori appartengono nello stesso tempo ad un punto qualunque della curva sferica.

15. Nel preparare le diverse formole che ci serviranno nella quadratura della sua area, cangiamo per semplicità a^2, b^2, c^2 in a, b, c, e poniamo ancora

$$A = b(c + a - b), \quad B = a(c - a + b),$$

per ciò

$$R^2 = A\cos^2 u + B\,\text{sen}^2 u, \quad R_{,}^2 = b\cos^2 u - a\,\text{sen}^2 u:$$

i valori di x, y che dovremo assumere, saranno

$$x = \frac{\sqrt{(a - b)}\,.\,\rho R_{,}\cos u}{R}, \quad y = \frac{\sqrt{(a - b)}\,.\,\rho R_{,}\,\text{sen}\, u}{R},$$

d' onde

$$z = \sqrt{\left(1 - \frac{(a - b)R_{,}^2}{R^2}\rho^2\right)},$$

ove sempre deve prendersi la ρ entro i limiti $\rho = 0$, $\rho = 1$. Le derivate parziali relative ad ρ sono

$$x' = \frac{\sqrt{(a - b)}\,.\,R_{,}\cos u}{R}, \quad y' = \frac{\sqrt{(a - b)}\,.\,R_{,}\,\text{sen}\, u}{R}.$$

Per le derivate $x_{,}$, $y_{,}$ relative all' angolo u prendiamo il valore della x, eleviamo al quadrato, e riduciamo tutto alle potenze di sen u, si avrà

$$R^2 x^2 = (a-b)\rho^2 [b-(a+2b)\,\text{sen}^2 u + (a+b)\,\text{sen}^4 u].$$

Differenziando, e trasportando nel secondo membro i termini provenienti dalla differenziazione di R^2, sostituendo nuovamente il valore di x^2, e facendo di più

$$\alpha = \text{A}a+\text{B}b+\text{A}b = b[c(2a+b)+b(a-b)]$$

$$\beta = 2\text{A}(a+b) = 2b(a+b)(c+a-b)$$

$$\gamma = (\text{B}-\text{A})(a+b) = (a^2-b^2)(c-a-b),$$

otterremo

$$\frac{x\,dx}{du} = \frac{(a-b)\rho^2 \,\text{sen}\, u \cos u\,[-\alpha+\beta\,\text{sen}^2 u - \gamma\,\text{sen}^4 u]}{[\text{A}+(\text{B}-\text{A})\,\text{sen}^2 u]^2},$$

d' onde per la sostituzione dei valori di x ed R, sarà

$$x_{,} = -\frac{\sqrt{(a-b)}\,.\,\rho\,\text{sen}\,u\,(\alpha-\beta\,\text{sen}^2 u+\gamma\,\text{sen}^4 u)}{\text{R}_{,}\,\text{R}^3}.$$

Ripetendo nella stessa guisa le operazioni analoghe nella differenziazione della y^2, si avrà per la derivata

$$y_{,} = \frac{\sqrt{(a-b)}\,\rho\cos u\,[b^2(c+a-b)-\beta\,\text{sen}^2 u-\gamma\,\text{sen}^4 u]}{\text{R}_{,}\,.\,\text{R}^3}.$$

Determinati i valori delle quattro derivate formiamo la differenza dei prodotti $x'y_{,}$, $x_{,}y'$, e poniamo

$$\text{L} = b^2(c+a-b),\ \text{M} = -2b(bc-a^2+b^2),\ \text{N} = -(a^2-b^2)(c-a-b)$$

si otterrà

$$x'y_{,} - x_{,}y' = \frac{(a-b)\rho\,[\text{L}+\text{M}\,\text{sen}^2 u+\text{N}\,\text{sen}^4 u]}{\text{R}^4}.$$

Ora la quantità che trovasi nel numeratore entro parentesi è evidentemente eguale al prodotto $\text{R}^2\text{R}_{,}^2$, perciò la precedente formola diverrà

$$x'y_{,} - x_{,}y' = \frac{(a-b)\rho\,\text{R}_{,}^2}{\text{R}^2}.$$

Si sostituisca adunque nel noto integrale della quadratura sferica l' elemento $(x'y_{,} - x_{,}y')\,d\rho\,du$ all' elemento $dx\,dy$, ed i limiti per la quarta parte dell'estensione saranno $\rho=0$, $\rho=1$, ed

$$u=0, \quad u=\text{arc tang}\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{2}}=\theta.$$

Avremo per la quadratura della nostra curva sferica l'integrale

$$S=4(a-b)\int_0^\theta\int_0^1\frac{R_{,}^2\,\rho\,d\rho\,du}{R^2\sqrt{\left(1-\frac{(a-b)R_{,}^2}{R^2}\rho^2\right)}}.$$

Integriamo relativamente a ρ, abbiamo

$$\int_0^1\frac{\rho\,d\rho}{\sqrt{1-\frac{(a-b)R_{,}^2}{R^2}\rho^2}}=\frac{R^2}{(a-b)R_{,}^2}-\frac{R\sqrt{R^2-(a-b)R_{,}^2}}{(a-b)R_{,}^2},$$

d' onde per la sostituzione di R, $R_{,}$, il valore di S diviene

$$S=4\left[\int_0^\theta du-\sqrt{c}\int_0^\theta\frac{du\sqrt{[b+(a-b)\,\text{sen}^2 u]}}{\sqrt{[A+(B-A)\,\text{sen}^2 u]}}\right].$$

Il secondo degli integrali si riduce ad un trascendente ellittico di terza specie. È noto in generale che la formola differenziale

$$\frac{du}{\sqrt{(\alpha+\beta\,\text{sen}^2 u)}\sqrt{(\gamma+\delta\,\text{sen}^2 u)}}$$

si riporta alle formole differenziali dei trascendenti ellittici col fare una delle due trasformazioni

$$\text{tang}\,u=\sqrt{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}\,.\,\text{tang}\,\varphi, \qquad \text{tang}\,u=\sqrt{\frac{\gamma}{\gamma+\delta}}\,.\,\text{tang}\,\varphi,$$

ove uno dei prodotti $\alpha(\alpha+\beta)$, $\gamma(\gamma+\delta)$ sia positivo. Nel nostro caso possiamo fare $\alpha=b$, $\beta=a-b$, perciò

$$\text{tang}\,u=\sqrt{\frac{b}{a}}\,.\,\text{tang}\,\varphi,$$

e quindi

$$\text{sen}^2 u=\frac{b\,\text{sen}^2\varphi}{a\cos^2\varphi+b\,\text{sen}^2\varphi}, \qquad \cos^2 u=\frac{a\cos^2\varphi}{a\cos^2\varphi+b\,\text{sen}^2\varphi}$$

$$du=\frac{\sqrt{ab}\,.\,d\varphi}{a\cos^2\varphi+b\,\text{sen}^2\varphi}, \quad \sqrt{[A+(B-A)\,\text{sen}^2 u]}=\frac{\sqrt{[Aa+(Bb-Aa)\,\text{sen}^2\varphi]}}{\sqrt{(a\cos^2\varphi+b\,\text{sen}^2\varphi)}}.$$

Ai limiti poi $u=0$, $u=\theta=\text{arc tang}\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{2}}$, corrispondono i limiti $\phi=0$, $\phi=\frac{\pi}{4}$, e perciò

$$\int_0^\theta \frac{du\sqrt{[b+(a-b)\,\text{sen}^2 u]}}{\sqrt{[A+(B-A)\,\text{sen}^2 u]}} = ab\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\phi}{(a\cos^2\phi+b\,\text{sen}^2\phi)\sqrt{[Aa-(Aa-Bb)\text{sen}^2\phi]}}.$$

L' integrale del secondo membro è un trascendente ellittico di terza specie: infatti ponendo

$$n=-\frac{(a-b)}{a},\quad k^2=\frac{Aa-Bb}{Aa}=1-\frac{[c-(a-b)]}{c+a-b}$$

per $a>b$, il parametro n sarà negativo, e $k<1$ pel valore del modulo, e l' ampiezza sarà data da un angolo di 45°; d' onde per la cognita notazione di Legendre otterremo

$$\int_0^\theta \frac{du\sqrt{[b+(a-b)\,\text{sen}^2 u]}}{\sqrt{[A+(B-A)\,\text{sen}^2 u]}} = \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{(c+a-b)}}\cdot\Pi\left(n,k,\frac{\pi}{4}\right),$$

dunque per l' area della nostra curva sferica si ha

$$S=4\left[\text{arc tang}\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{2}}-\frac{\sqrt{bc}}{\sqrt{(c+a-b)}}\,\Pi\left(n,k,\frac{\pi}{4}\right)\right].$$

Sostituiamo nuovamente a^2, b^2, c^2 invece di a, b, c pel modulo k, e parametro n, abbiamo

$$k^2=\frac{2(a^2-b^2)}{c^2+a^2-b^2},\quad n=-\frac{(a^2-b^2)}{a^2}$$

e quindi

$$S=4\left[\text{arc tang}\left(\frac{b}{a}\right)-\frac{bc}{\sqrt{(c^2+a^2-b^2)}}\,\Pi\left(n,k,\frac{\pi}{4}\right)\right].$$

Onde k sia minore dell' unità, supporremo per fissare le idee $c^2>a^2-b^2$.

16. Aggiungeremo ancora in poche parole l' analisi per la ricerca dell' area dell' ellissi sferica, la quale quantunque già determinata dal Sig. *Catalan*, sarà tuttavia qui riportata. Sia dunque l' ellissi

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

l' equazione del cono avente la detta ellissi per base, e per origine il centro della superficie, sarà

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}.$$

L' intersezione della sfera concentrica

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

determinerà l' ellissi sferica. Eliminiamo la z si avrà per la projezione della curva sferica nel piano delle xy, l'ellissi piana

$$\frac{x^2(c^2+a^2)}{a^2} + \frac{y^2(c^2+b^2)}{b^2} = 1.$$

Facciamo la sostituzione di

$$x = r\cos u, \quad y = r\,\mathrm{sen}\,u$$

avremo per la sua equazione polare

$$r^2 = \frac{a^2 b^2}{b^2(c^2+a^2)\cos^2 u + a^2(c^2+b^2)\,\mathrm{sen}^2 u}.$$

Di qui se per brevità poniamo

$$\mathrm{R}^2 = b^2(c^2+a^2)\cos^2 u + a^2(c^2+b^2)\,\mathrm{sen}^2 u$$

i valori di x, y, z daranno

$$x = \frac{ab\cos u}{\mathrm{R}}, \quad y = \frac{ab\,\mathrm{sen}\,u}{\mathrm{R}}, \quad z = \frac{c\sqrt{(b^2\cos^2 u + a^2\,\mathrm{sen}^2 u)}}{\mathrm{R}}.$$

Onde queste espressioni sieno applicabili alla ricerca dell'area dell' ellissi sferica, converrà prendere una variabile ausiliare ρ entro i limiti di $\rho = 0$, $\rho = 1$, per poter quindi ottenere il nuovo elemento differenziale da sostituirsi invece di $dx\,dy$: pe' valori adunque di x, y, z si avrà

$$x = \frac{ab\rho\cos u}{\mathrm{R}}, \quad y = \frac{ab\rho\,\mathrm{sen}\,u}{\mathrm{R}}, \quad z = \sqrt{\left(1 - \frac{a^2 b^2 \rho^2}{\mathrm{R}^2}\right)}.$$

Le derivate poi relative a ρ ed u saranno

$$x' = \frac{ab\cos u}{\mathrm{R}}, \quad y' = \frac{ab\,\mathrm{sen}\,u}{\mathrm{R}},$$

$$x_{,} = -\frac{a^3 b(c^2+b^2)\rho\,\mathrm{sen}\,u}{\mathrm{R}^3}, \quad y_{,} = \frac{b^3 a(c^2+a^2)\rho\cos u}{\mathrm{R}^3},$$

dalle quali equazioni si trae facilmente

$$x'y_{,} - x_{,}y' = \frac{a^2 b^2 \rho}{R^2}.$$

Sostituendo pertanto tutti questi valori nell' integrale duplicato rappresentante la quadratura sferica, ed integrando entro i limiti $\rho = 0$, $\rho = 1$ $u = 0$, $u = \frac{\pi}{2}$, si avrà per l'intera ellissi sferica

$$S = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \frac{a^2 b^2 \rho \, d\rho \, du}{R^2 \sqrt{\left(1 - \frac{a^2 b^2 \rho^2}{R^2}\right)}}.$$

Dalla prima integrazione abbiamo

$$\int_0^1 \frac{\rho \, d\rho}{\sqrt{\left(1 - \frac{a^2 b^2 \rho^2}{R^2}\right)}} = \frac{R^2}{a^2 b^2} - \frac{R^2}{a^2 b^2} \cdot \frac{\sqrt{c^2(a^2 \operatorname{sen}^2 u + b^2 \cos^2 u)}}{R},$$

perciò

$$S = 4\left(\frac{\pi}{2} - c \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{du \sqrt{(a^2 \operatorname{sen}^2 u + b^2 \cos^2 u)}}{\sqrt{[b^2(c^2 + a^2)\cos^2 u + a^2(c^2 + b^2)\operatorname{sen}^2 u]}}\right).$$

L' integrale del secondo membro riducesi ad un trascendente ellittico completo di terza specie, e la trasformazione delle variabili si opera in un modo al tutto somigliante a quello già praticato nel precedente parag. 15°. Infatti ponendo

$$\operatorname{tang} u = \frac{b}{a} \operatorname{tang} \varphi$$

i limiti dell' integrazione saranno i medesimi; perciò se si rappresenti con U questo integrale si avrà

$$U = a b \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{(a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \operatorname{sen}^2 \varphi) \sqrt{[c^2 + a^2 - (a^2 - b^2)\operatorname{sen}^2 u]}}.$$

Infine col porre

$$n = -\frac{(a^2 - b^2)}{a^2}, \quad k^2 = \frac{a^2 - b^2}{c^2 + a^2}$$

otterremo il trascendente ellittico di parametro n e di modulo k, vale a dire

$$U = \frac{b}{a\sqrt{(c^2+a^2)}}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{d\phi}{(1+n\,\text{sen}^2\phi)\sqrt{(1-k^2\,\text{sen}^2\phi)}} = \frac{b}{a\sqrt{(c^2+a^2)}}\,.\,\Pi\,(n,\,k).$$

Avremo dunque per l' area dell' ellissi sferica

$$S = 4\left(\frac{\pi}{2} - \frac{b\,c}{a\sqrt{(c^2+a^2)}}\,\Pi\,(n,\,k)\right).$$

Questa espressione è d' accordo, e coincide con quella trovata dal Signor Catalan nel Giornale del Signor Liouville, Tom. 6°.

17. Termineremo questa Memoria col fare un cenno sopra due curve piane, una di sesto ordine, e l'altra di quarto ambedue derivate dall' ellissi, o più generalmente da una sezione conica, e sopra le quali costruiti due coni, le aree delle loro intersezioni con una sfera concentrica dipendono dai trascendenti ultraellittici. La prima curva è il luogo geometrico della sommità di un angolo retto del quale i due lati sieno costantemente perpendicolari ad una conica data. Quando la conica riducesi ad un ellissi, l' equazione della nuova curva sarà (1)

$$(a^2+b^2)\,(x^2+y^2)\,(a^2y^2+b^2x^2)^2 = (a^2-b^2)^2\,(a^2y^2-b^2x^2)^2,$$

la quale trovasi anche più anticamente negli Annali di Matematica del Sig. Gergonne. La curva in questione è composta di quattro ovali, che si riuniscono nel centro dell' ellissi, che sarà nello stesso tempo un punto quadruplo della curva; ma conviene osservare che le due ovali corrispondenti all'asse maggiore dell' ellissi sono diverse dalle altre due corrispondenti all' asse minore. Costruendo pertanto un cono retto sopra questa curva, ed intersecato con una sfera concentrica, la quadratura dell' area sferica proveniente dalle due ovali eguali corrispondenti all' asse maggiore, sarà data dall' integrale doppio definito

(1) Terquem. Annales de Mathém. Tom. 2°, pag. 365, per *M.r Vidal.*

$$S=(a^2-b^2)^2.4\int_0^\theta\int_0^1 \frac{(a^2\,\mathrm{sen}^2 u - b^2\cos^2 u)^2\,\rho\,d\rho\,du}{R^2 R_{,}^2\sqrt{\left(1-\frac{(a^2-b^2)^2(a^2\,\mathrm{sen}^2 u - b^2\cos^2 u)^2}{R^2 R_{,}^2}\rho^2\right)}},$$

ove

$$\theta = \text{arc tang}\left(\frac{b}{a}\right).$$

Le quantità poi $R, R_{,}$ sono formate col seguente modo. Sia c l' altezza del cono, e pongasi

$$A=b^2[c\sqrt{(a^2+b^2)}-(a^2-b^2)],\quad B=a^2[c\sqrt{(a^2+b^2)}+(a^2-b^2)]$$

$$A_{,}=b^2[c\sqrt{(a^2+b^2)}+(a^2-b^2)],\quad B_{,}=a^2[c\sqrt{(a^2+b^2)}-(a^2-b^2)]$$

si avrà

$$R^2 = A\cos^2 u + B\,\mathrm{sen}^2 u,\qquad R_{,}^2 = A_{,}\cos^2 u + B_{,}\,\mathrm{sen}^2 u.$$

Eseguita una prima integrazione relativamente a ρ, il valore di S si ridurrà ad un primo termine di forma finita, ed il secondo ad un integrale definito semplice dipendente dai trascendenti ultra-ellittici. La seconda curva della quale vengo a dar un rapido cenno è il luogo geometrico del punto medio di una retta data iscritta in una conica.

Il Sig. Terquem nel Volume quarto de' suoi Annali di Matematica pag. 590, An. 1845 determina generalmente l'equazione di questa curva, che è di quarto ordine, e concentrica alla conica. Faremo qui osservare che la risoluzione di questo problema trovasi completa in una Dissertazione del Signor Maurizio Steiner di Breslaw in data del 27 Febbrajo 1841 (1). Quando l'equazione della conica riducasi ad un ellissi, e sia $2c$ la grandezza della retta iscritta, l'equazione della curva derivata coll' indicata legge, come può vedersi nelle due citate opere dei Signori *Terquem* e *Steiner*, sarà

$$a^6y^4+b^6x^4+a^2b^2(a^2+b^2)x^2y^2=a^4b^2(a^2-c^2)y^2-a^2b^4(c^2-b^2)x^2.$$

---

(1) Il titolo di questa Dissertazione è: « De loco geometrico centri lineae rectae definitae cujusdam longitudinis cujus termini in Peripheria lineae secundi ordinis moventur. » Vratislaviae. Typis Kepferianis.

Questa curva di quarto ordine concentrica all' ellissi offre delle varietà, secondo la condizione a cui è soggetta la retta $2c$, così se sia $c<a$ e $>b$ la forma della curva è somigliante alla lemniscata, ed avrà un punto doppio nel suo centro. La precedente equazione potrà anche scriversi

$$(a^4 y^2+b^4 x^2)(a^2 y^2+b^2 x^2)=a^2 b^2 [(a^4 y^2+b^4 x^2)-c^2(a^2 y^2+b^2 x^2)],$$

ove ponendo infine

$$R^2 = a^4 y^2 + b^4 x^2, \qquad R_i^2 = a^2 y^2 + b^2 x^2$$

si ridurrà ad

$$\frac{a^2 b^2}{R_i^2} - \frac{c^2}{R^2} = 1 .$$

Costruendo poi sopra questa curva un cono, ed intersecandolo con una sfera concentrica, la quadratura dell' area sferica dipenderà da un integrale semplice definito che appartiene alla classe dei trascendenti ultra-ellittici. Noi per brevità ci dispensiamo di riportare le diverse formole relative a queste ricerche.

Postscriptum. Diversi risultati ai quali siam giunti nella precedente Memoria possono anche rinvenirsi assai facilmente col fare direttamente uso delle coordinate sferiche. Riprendiamo la formola per le quadrature sferiche

$$S = \iint \frac{dx\, dy}{z} = \iint \frac{dz\, dy}{\sqrt{(1-x^2-y^2)}}$$

e pongasi

$$z = \cos\varphi, \quad x = \operatorname{sen}\varphi \cos\theta, \quad y = \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta.$$

Sieno x', y' le derivate parziali delle x, y, relative alla variabile φ ed x_i, y_i le derivate relative a θ, avremo

$$x' y_i - x_i y' = \operatorname{sen}\varphi \cos\varphi,$$

quindi l' integrale duplicato si trasforma in

$$S = \iint \operatorname{sen}\varphi\, d\varphi\, d\theta.$$

Integriamo relativamente a φ, e sia C una costante arbitraria dovuta all' integrazione, sarà

$$S = \int (C - \cos\varphi)\, d\theta.$$

Ora per $\varphi = 0$, $S = 0$, d' onde $C = 1$, e perciò

$$S = \int (1 - \cos\varphi)\, d\theta.$$

Questa è la nota formola per le quadrature in coordinate sferiche, della quale ne mostriamo due applicazioni.

Sia il cono di quarto ordine

$$(x^2 + y^2)^2 = z^2 (a^2 x^2 - b^2 y^2)$$

concentrico alla sfera di raggio 1, si avrà per la sostituzione dei valori di x, y, z

$$\tang^2\varphi = a^2 \cos^2\theta - b^2 \operatorname{sen}^2\theta.$$

Di qui

$$\cos^2\varphi = \frac{1}{1 + a^2 - (a^2 + b^2)\operatorname{sen}^2\theta}.$$

Integrando adunque fra i limiti

$$\theta = 0, \quad \theta = \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{a}{b}\right)$$

otterremo per l' intera area sferica proveniente dall' intersezione del cono, e della sfera concentrica

$$S = 4\left(\theta - \int_0^\theta \frac{d\theta}{\sqrt{[1 + a^2 - (a^2 + b^2)\operatorname{sen}^2\theta]}}\right).$$

Questa formola coincide con quella alla quale giungemmo nel parag. 3°. Con la stessa facilità si otterrebbe la relativa quadratura sferica, quando si prendesse il cono di quarto ordine

$$(x^2 + y^2)^2 = z^2 (a^2 x^2 + b^2 y^2).$$

Sia il cono ellittico

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z^2$$

avremo per la sostituzione dei valori delle x, y, z

$$\operatorname{tang}^2\varphi = \frac{a^2 b^2}{a^2 \operatorname{sen}^2\theta + b^2 \cos^2\theta},$$

d' onde

$$\cos^2 \phi = \frac{b^2 + (a^2 - b^2)\,\text{sen}^2\theta}{b^2(1 + a^2) + (a^2 - b^2)\,\text{sen}^2\theta}\,.$$

Integrando dopo la sostituzione fra i limiti $\theta = 0$, $\theta = \frac{\pi}{2}$, si otterrà per l' intera area dell' ellissi sferica

$$S = 4\left(\frac{\pi}{2} - \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sqrt{[b^2 + (a^2 - b^2)\,\text{sen}^2\theta]}}{\sqrt{[b^2(1 + a^2) + (a^2 - b^2)\,\text{sen}^2\theta]}}\,d\theta\right).$$

L' integrale del secondo membro si riduce ad un trascendente ellittico di terza specie per mezzo di una delle note trasformazioni, e che ci dispensiamo di riportare

FINE della Seconda Parte del Tomo XXIV.